

Feuille 6 – Intervalles de confiance

Dans cette feuille, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $(q_\alpha)_{0 < \alpha < 1}$ les quantiles de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, qui sont supposés connus.

Exercice 1 (Oeufs de pingouins). On collecte un oeuf de pingouin fécondé et on observe s’il éclos (succès) ou pas (échec). On répète cette expérience n fois, et on cherche à déterminer la proportion théorique $\theta \in [0; 1]$ d’éclosion.

1. Proposer un modèle statistique pour cette expérience.
2. Dans ce modèle, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, déterminer l’estimateur T_n de θ par la méthode des moments.
3. Calculer le risque quadratique de T_n .
4. En déduire un intervalle de confiance non-asymptotique I_n de niveau 0,95 pour θ .

On se restreint désormais à $\Theta =]0; 1[$ et on considère la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d’estimateurs de θ .

5. Montrer que $\sqrt{T_n(1 - T_n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \sqrt{\theta(1 - \theta)}$.
6. Montrer que $\sqrt{n} \frac{T_n - \theta}{\sqrt{T_n(1 - T_n)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$.
7. En déduire un intervalle de confiance asymptotique J_n de niveau 0,95 pour θ .

Exercice 2 (Temps d’attente). Devant CNews, le temps écoulé entre le début d’une émission et le premier propos raciste, sexiste ou homophobe est modélisé par une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On répète l’expérience n fois, avec n beaucoup trop grand, et on cherche à déterminer λ .

1. Proposer un modèle statistique pour cette expérience enrichissante.
2. Déterminer l’estimateur T_n de λ par la méthode des moments.
3. Montrer que $\sqrt{n} \frac{T_n - \lambda}{\lambda} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$.
4. Soit $q \in]0; \sqrt{n}[$, montrer que $-q \leq \sqrt{n} \frac{T_n - \lambda}{\lambda} \leq q \iff \frac{T_n}{1 + \frac{q}{\sqrt{n}}} \leq \lambda \leq \frac{T_n}{1 - \frac{q}{\sqrt{n}}}$.
5. En déduire un intervalle de confiance asymptotique I_n de niveau 0,95 pour λ .

Exercice 3 (Fonction pivot). On considère le modèle statistique $(\mathcal{N}(0, \sigma^2))_{\sigma > 0}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de loi-mère $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, on définit $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2$.

1. Montrer que T_n est un estimateur fortement consistant de σ^2 .
2. On admet que $\frac{nT_n}{\sigma^2}$ suit la loi $\chi^2(n)$ et que cette loi admet des quantiles $(t_\alpha^{(n)})_{0 < \alpha < 1}$ bien définis et strictement positifs. Construire un intervalle de confiance non-asymptotique I_n de niveau $\gamma \in]0; 1[$ pour σ^2 , par la méthode de la fonction pivot.