

Feuille 5 – Estimateurs ponctuels

Dans cette feuille, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 (Comparaison d'estimateurs). On considère le modèle statistique $(\mathcal{B}(\theta))_{\theta \in [0;1]}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit deux estimateurs de θ basés sur le n -échantillon (X_1, \dots, X_n) :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1}{n+2} \left(1 + \sum_{k=1}^n X_k \right).$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in [0;1]$, déterminer les biais de \bar{X}_n et T_n en θ .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in [0;1]$, déterminer les risques de \bar{X}_n et T_n en θ .
3. Parmi les estimateurs \bar{X}_n et T_n , l'un domine-t-il l'autre ? Si oui, lequel ?
4. Les estimateurs \bar{X}_n et T_n sont-ils consistants ? Fortement consistants ?
5. Étudier la normalité asymptotique de \bar{X}_n .

Exercice 2 (Estimations de gaussiennes). On considère le modèle $(\mathcal{N}(\mu, \sigma^2))_{\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les estimateurs $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ de μ et $\tilde{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2$ de σ^2 , basés sur le n -échantillon (X_1, \dots, X_n) .

1. Déterminer le biais et le risque de \bar{X}_n .
2. Étudier la consistance et la normalité asymptotique de \bar{X}_n .
3. Calculer le biais de \tilde{S}_n . Montrer que, si $n \geq 2$, $S_n = \frac{n}{n-1} \tilde{S}_n$ est un estimateur sans biais de σ^2 .
4. On admet que, pour tout $n \geq 2$, $\text{Var}(S_n) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$. Déterminer les risques de S_n et \tilde{S}_n .
5. Parmi les estimateurs S_n et \tilde{S}_n , l'un domine-t-il l'autre ? Si oui, lequel ?

Exercice 3 (Estimation de Bernoullis). On considère le modèle $(\mathcal{B}(\theta))_{\theta \in [0;1]}$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de loi-mère $\mathcal{B}(\theta)$, où $\theta \in [0;1]$. On introduit aussi $X \sim \mathcal{B}(\theta)$.

1. Expliciter l'espace d'observations \mathcal{X} , sa tribu \mathcal{B} et l'espace de paramètres Θ pour ce modèle.
2. Déterminer la fonction $\mu_1 : \theta \mapsto \mathbb{E}_\theta[X]$.
3. En déduire l'estimateur T_n de θ par la méthode des moments.
4. Déterminer la fonction de probabilité $(p_n(\theta, k_1, \dots, k_n))_{0 \leq k_1, \dots, k_n \leq 1}$ de (X_1, \dots, X_n) sous $\mathcal{B}(\theta)$.
5. Pour tout $k = (k_1, \dots, k_n) \in \{0;1\}^n$, déterminer la fonction de vraisemblance V_k associée.
6. En déduire l'estimateur S_n de θ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Exercice 4 (Pile ou face). On joue une infinité de fois à pile ou face avec une probabilité de succès $\theta \in [0;1]$ inconnue. On note X le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un premier succès. On répète n fois l'expérience précédente indépendamment et on note X_1, \dots, X_n les résultats obtenus.

1. Proposer un modèle $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta})$ décrivant cette expérience.
2. Déterminer l'estimateur T_n de θ par la méthode des moments.
3. Déterminer l'estimateur S_n de θ par la méthode du maximum de vraisemblance.
4. Montrer que T_n est un estimateur fortement consistants.
5. Étudier la normalité asymptotique de T_n .

Exercice 5 (Blitzkrieg). Au début de la seconde guerre mondiale, les allemands numérotaient les chars produits un mois donné de 1 à N . Un espion se place au bord d'une route et relève les numéros des chars qui passent. Il cherche à en déduire le nombre N de chars produit ce mois-ci. Un même char peut repasser plusieurs fois, et on suppose les passages indépendants. On note $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre d'observations.

1. Proposer un modèle statistique pour cette expérience.
2. Déterminer l'estimateur M_n de N par la méthode du maximum de vraisemblance.
3. Soient n et $N \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(M_n \neq N)$.
4. Soit $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite positive, montrer que $R_n(M_n - N) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0$.
5. L'estimateur M_n est-il consistant ? Est-il asymptotiquement normal ?
6. Peut-on définir un estimateur T_n de N par la méthode des moments ?

Exercice 6 (Exemple à densité). On étudie le modèle $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), (\mathbb{P}_\theta)_{\theta > 0})$ où, pour tout $\theta > 0$, la loi \mathbb{P}_θ admet la densité $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x\theta}} \mathbf{1}_{]0; \theta]}(x)$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et (X_1, \dots, X_n) un échantillon de loi-mère \mathbb{P}_θ .

1. Déterminer l'estimateur T_n de θ par la méthode des moments.
2. Montrer que T_n est fortement consistant.
3. Montrer que T_n est asymptotiquement normal.
4. Déterminer l'estimateur M_n de θ par la méthode du maximum de vraisemblance.
5. Calculer la fonction de répartition de M_n . Montrer que M_n admet une densité et l'expliciter.
6. Calculer le biais et le risque de M_n .
7. Montrer que M_n est consistant.

Exercice 7 (Méthode des moments, variante). On considère le modèle $(\mathcal{U}([- \theta; \theta]))_{\theta > 0}$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon dans ce modèle. On note aussi $X \sim \mathcal{U}([- \theta; \theta])$.

1. Déterminer les fonctions $\mu_1 : \theta \mapsto \mathbb{E}_\theta[X]$ et $\mu_2 : \theta \mapsto \mathbb{E}_\theta[X^2]$ de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} .
2. Construire un estimateur T_n de θ par la méthode des moments.
3. L'estimateur T_n est-il consistant ? Est-il fortement consistant ?
4. Déterminer l'estimateur M_n de θ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Exercice 8 (Paramètre de dimension 2). On considère le modèle $(\mathcal{N}(m, v))_{m \in \mathbb{R}, v > 0}$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon dans ce modèle. On note $X \sim \mathcal{N}(m, v)$.

1. Déterminer les fonctions $\mu_1 : (m, v) \mapsto \mathbb{E}_{(m, v)}[X]$ et $\mu_2 : (m, v) \mapsto \mathbb{E}_{(m, v)}[X^2]$.
2. Construire des estimateurs T_n de m et S_n de v par la méthode des moments, pour tout $n \geq 2$.
3. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, expliciter la fonction de log-vraisemblance $\ln \circ V_x$.
4. Si $x \notin \text{Vect}(1, \dots, 1)$, montrer que $\ln \circ V_x$ admet un unique point critique sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et le déterminer. On admettra que c'est un maximum global.
5. En déduire l'expression de l'estimateur du maximum de vraisemblance de (m, v) lorsque $n \geq 2$.