Feuille 4 – Fonction caractéristique et convergence en loi

Dans cette feuille, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si X est une variable aléatoire réelle, on note $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sa fonction caractéristique.

Exercice 1 (Fonction caractéristique et transformation affine)**.** Soit X une variable aléatoire réelle. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $Y = aX + b$. Montrer que, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_Y(t) = e^{itb}\phi_X(at)$.

Exercice 2 (Fonction caractéristique et somme indépendante)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes. On note $S = \sum_{k=1}^n X_k$, montrer que $\phi_S = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}$.

Exercice 3 (Fonction caractéristiques usuelles)**.** Déterminer la fonction caractéristique de la variable aléatoire réelle X dans chacun des cas suivants.

1. X est constante égale à $c \in \mathbb{R}$.
2. $X \sim \mathcal{B}(p)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$.
3. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$.
4. $X \sim \mathcal{G}(p)$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1]$.
5. $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 4 (Fonction caractéristique des gaussiennes)**.** Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Justifier que $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et rappeler l'expression de ses dérivées successives.
2. En intégrant par parties, montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi'_X(t) = -t\phi_X(t)$.
3. En déduire l'expression de ϕ_X.
4. Soient $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et $Y \sim \mathcal{N}\big(\mu, \sigma^2\big)$. Déterminer l'expression de ϕ_Y.
5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in]0; +\infty[$. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes telles que, $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $X_k \sim \mathcal{N}\big(\mu_k, \sigma_k^2\big)$. Déterminer la loi de $S = \sum_{k=1}^n X_k$.

Exercice 5 (Un exemple de convergence en loi)**.** Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}([0; 1])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $X_n \sim \mathcal{U}\big(\{\frac{k}{n} \mid k \in [\![1; n]\!]\}\big)$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X$.

Exercice 6 (Approximation de Poisson par des binomiales)**.** Soient $\lambda > 0$ et $X \sim \propto(\lambda)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soient $p_n \in [0; 1]$ et $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$. On suppose $np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X$. On pourra utiliser que $\phi_X : t \mapsto \exp\big(\lambda(e^{it} - 1)\big)$.

Exercice 7 (Convergence en loi de gaussiennes, *facultatif*)**.** On dit qu'une variable aléatoire réelle X est gaussienne s'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \geqslant 0$ tels que $\phi_X : t \mapsto e^{it\mu - \frac{t^2}{2}\sigma^2}$. On note alors $X \sim \mathcal{N}\big(\mu, \sigma^2\big)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit Y_n une variable aléatoire constante égale à $\mu_n \in \mathbb{R}$. On suppose que $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} Y$. Montrer que la fonction de répartition F_Y de Y est à valeurs dans $\{0; 1\}$.
2. Montrer que Y est constante égale à un certain $\mu \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $\mu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit $\mu_n \in \mathbb{R}$, $\sigma_n \geqslant 0$ et $X_n \sim \mathcal{N}\big(\mu_n, \sigma_n^2\big)$. On suppose que la $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} X$.

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}^*$, expliciter $|\phi_{X_n}(t)|$ puis exprimer σ_n en fonction de $\phi_{X_n}(t)$.
5. Montrer qu'il existe $t_0 \neq 0$ tel que $|\phi_X(t_0)| \in]0; 1]$.
6. En déduire qu'il existe $\sigma \geqslant 0$ tel que $\sigma_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma$ et que, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\phi_X(t)| = e^{-\frac{t^2}{2}\sigma^2}$.
7. Montrer que $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\mu \in \mathbb{N}$ et que $X \sim \mathcal{N}\big(\mu, \sigma^2\big)$.

   Indication. Utiliser la convergence simple de $\frac{\phi_{X_n}}{|\phi_{X_n}|}$ et se ramener aux questions 1, 2 et 3.