Feuille 3 – Indépendance et convergence en probabilité

Exercice 1 (Évènements presque sûrs)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

1. Montrer que A et $B \in \mathcal{A}$ sont indépendants si et seulement si A et B^c le sont.
2. Si $A \in \mathcal{A}$ est presque sûr, montrer qu'il est indépendant de tout évènement $B \in \mathcal{A}$.
3. Montrer qu'une variable aléatoire constante est indépendante de toute variable aléatoire.

Exercice 2 (Exemples et contre-exemples)**.** Dans cet exercice, par donner un exemple on entend : définir un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, définir des variables aléatoires sur Ω, et prouver qu'elles ont les propriétés souhaitées.

1. Donner un exemple de deux variables aléatoires indépendantes.
2. Donner un exemple de deux variables aléatoires dépendantes.
3. Donner un exemple de trois variables aléatoires X, Y et Z qui sont indépendantes deux à deux, mais globalement dépendantes.
4. Donner un exemple de deux variables aléatoires dépendantes X et Y telles que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

   Indication. Considérer une variable uniforme sur le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (Mouvement social)**.** Vous attendez le bus un jour de grève des transports, et avez le choix entre deux lignes pour vous rendre à la fac. On note X et Y le temps d'attente avant l'arrivée du prochain bus pour chacune des deux lignes. On modélise X et Y par des variables exponentielles indépendantes de paramètre $\lambda > 0$. On note $T_1 = \min(X, Y)$ et $T_2 = \max(X, Y)$ et on admet que ce sont des variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité que X et Y.

1. Déterminer les fonctions de répartition de X, Y et T_1. En déduire la loi de T_1.

Le premier bus arrivant étant bondé, vous hésitez à attendre le suivant (forcément de l'autre ligne pour simplifier), en vous disant que vu ce que vous avez attendu il ne devrait pas trop tarder.

2. Trouver la loi de $T_2 - T_1$, le temps qu'il vous resterait à attendre.
3. Montrer que $T_2 - T_1$ et T_1 sont indépendantes. Cela vaut-il la peine de forcer le passage ?

Exercice 4 (Limite d'un maximum)**.** Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de v.a.i.i.d. réelles, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, dont la loi commune est décrite par la fonction de répartition F_1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que $Y_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$ définit une variable aléatoire sur Ω, dont la fonction de répartition sera notée F_n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer F_n en fonction de F_1.
2. On suppose que $F_1^{-1}(\{1\}) \neq \emptyset$ et on note $x_0 = \inf F_1^{-1}(\{1\})$. Montrer que $F_1(x_0) = 1$.
3. Montrer que $Y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} x_0$.
4. Déterminer x_0 dans le cas où les $(X_k)_{k \geqslant 1}$ suivent une loi uniforme sur $[a; b]$.

Exercice 5 (Convergence en proba mais pas en moyenne)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n une v.a. discrète sur Ω telle que $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$.

1. Montrer que $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} 0$.
2. Est-ce que $\mathbb{E}[X_n] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$?