# Feuille 2 – Moments

**Exercice 1** (Lois discrètes usuelles)**.** Rappeler la définition des lois suivantes et calculer leur espérance et leur variance.

1. Loi uniforme $\mathcal{U}([\![1;n]\!])$ sur $[\![1;n]\!]$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ de paramètre $p \in [0;1]$.
3. Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$.
4. Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre $p \in ]0;1]$.
5. Loi de Poisson $\propto(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

**Exercice 2** (Espérance d'une somme)**.** On lance deux dés standards au hasard et on note $X$ le résultat de la somme. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

**Exercice 3** (Prouesse physique)**.** Selon les lois de la physique quantique, vous avez une probabilité $p$ (petite mais positive) de traverser un mur. Pour être optimiste disons $p = 10^{-20}$.

1. Vous voulez en avoir le coeur net et envisagez de foncer sur le mur le plus proche de manière répétée et indépendante jusqu'à traverser, puis de noter $X$ le nombre d'essais nécessaires. Quelle est la loi de $X$ ?
2. En déduire le nombre d'essais minimal garantissant 90% de chances de traverser.

**Exercice 4** (Lois à densité usuelles)**.** Rappeler la définition des lois suivantes et calculer leur espérance et leur variance.

1. Loi uniforme $\mathcal{U}([a;b])$ sur l'intervalle $[a;b]$.
2. Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.
3. Loi gaussienne $\mathcal{N}\big(\mu, \sigma^2\big)$ de paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$ (commencer par $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$).

**Exercice 5** (Saving Coco)**.** L'erreur de mesure de votre balance de cuisine est modélisée par une variable aléatoire $E \sim \mathcal{N}\big(0, \sigma^2\big)$, où $\sigma$ est donné par le constructeur (et vaut disons 1 g). Vous préparez une assiette de graines pour Coco, votre perroquet favori, et mesurez un poids $\mu$. Le poids réel de l'assiette est une variable aléatoire que l'on notera $X = \mu + E$.

1. Déterminer la loi de $X$.
2. Soit $\varepsilon > 0$, donner une majoration de $\mathbb{P}(X \geqslant \mu + \varepsilon)$ en utilisant l'inégalité de Chebyshev.
3. Coco étant diabétique, lui donner plus de 100 g de graines lui serait fatal. Quelle valeur maximale de mesure $\mu$ vous autorisez-vous pour être sûr à 99% de garder Coco en vie ?

**Exercice 6** (Moments de la gaussienne)**.** Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ une gaussienne centrée réduite.

1. Justifier que $X$ est $L^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Est-ce que $X$ est $L^\infty$ ?
2. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}\big[X^{2p+1}\big] = 0$.
3. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}\big[X^{2p+2}\big] = (2p+1)\mathbb{E}\big[X^{2p}\big]$.
4. En déduire l'expression de tous les moments d'ordres pairs de $X$.