Feuille 1 – Variables aléatoires

Exercice 1 (Modélisation élémentaire)**.** Pour chacune des situations suivantes, déterminer un espace probabilisé permettant de la modéliser, expliciter les variables aléatoires sous-entendues par l'énoncé et donner leur loi.

1. On divise 120 élèves en trois groupes A, B et C, d'effectifs respectifs 36, 40 et 44. On choisit un groupe au hasard et s'intéresse au nombre d'élèves dans ce groupe.
2. Comme en 1 ci-dessus, mais on choisit un·e élève au hasard et on s'intéresse au nombre d'élèves dans son groupe.
3. On mélange un jeu de 52 cartes et on en pioche 5 successivement. On s'intéresse à la $3^{\text{ème}}$ carte, puis à la paire formée par la $3^{\text{ème}}$ et la $5^{\text{ème}}$ carte.
4. On tire deux nombres réels uniformément au hasard entre 0 et 2, et on s'intéresse à leur somme.
5. Comme en 4 ci-dessus, mais cette fois on note 1 si la somme dépasse 1 et 0 sinon.
6. On considère deux urnes. La première contient 5 boules noires et 5 boules blanches. La seconde contient 2 boules noires en 1 boule blanche. On pioche sans remise 2 boules dans la première urne et 1 boule dans la seconde. On s'intéresse au nombre total de boules noires piochées.

Exercice 2 (Météorologie)**.** On suppose qu'il y a deux météos possibles pour un jour donné (beau temps ou pluie, que l'on encodera en 1 ou 0), que la météo du jour est indépendante de celle des jours précédents, et qu'il pleut avec probabilité $\frac{1}{4}$.

1. Pour un jour donné, quelle est la loi de sa météo ?
2. Quelle est la probabilité qu'il pleuve au moins un jour parmi 5 jours consécutifs ?
3. Quelle est la probabilité que, sur une semaine donnée, il pleuve 2 jours et fasse beau 5 jours ?
4. Quelle est la probabilité que, sur une semaine donnée, il pleuve les 5 premiers jours et fasse beau les 2 derniers ?
5. Il pleut aujourd'hui. Quelle est la loi du nombre de jours à attendre avant qu'il fasse beau ?

Exercice 3 (Barème)**.** Un·e étudiant·e répond à un QCM. Pour chacune des 10 questions, 3 réponses sont proposées, dont une seule est juste. On compte 2 points par réponse juste et -1 point par réponse fausse. On modélise le nombre de bonnes réponses par variable aléatoire X de loi binomiale $\mathcal{B}(10, \frac{1}{3})$.

1. Donner la loi de la note N obtenue par l'étudiant·e.
2. Calculer la probablité que N soit négative.

Exercice 4 (Transformations d'une variable uniforme)**.** Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1;7]\!]$.

1. On note P la variable qui vaut 1 si U est paire et 0 sinon. Déterminer la loi de P.
2. On note A l'aire du triangle de sommets 1, -1 et $e^{\frac{2iU\pi}{7}}$ dans $\mathbb{C}$. Déterminer la loi de A.

Exercice 5 (Densité et transformations affines)**.** Soit X une variable aléatoire réelle continue de densité f. Soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on note $Y = aX + b$. Déterminer la densité de Y. Expliciter la densité de Y dans chacun des cas suivants, et éventuellement reconnaitre une loi connue.

1. $X \sim \mathcal{U}([0,1])$,
2. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$,
3. $X \sim \mathcal{E}(1)$.

Exercice 6 (Baignade interdite)**.** L'été, sur la plage de Guildo, on mesure la concentration d'algues vertes en début de journée. Si cette concentration dépasse $5\,mg.cm^{-2}$, la plage est fermée pour la journée, sinon elle est ouverte.
On suppose que la concentration en algues un jour donné ne dépend pas de celle des jours précédents, et que sa valeur (en $mg.cm^{-2}$) est modélisée par une variable aléatoire $\mathcal{E}(\frac{1}{3})$, dont la densité est

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Pour un jour donné, quelle est la probabilité que la plage ferme ?
2. Pour une semaine donnée, déterminer la loi du nombre de jours de fermeture de la plage.
3. Suite à un amendement législatif, les règles ont changé : si la concentration maximale mesurée au cours d'une semaine dépasse $5\,mg.cm^{-2}$, la plage devra fermer la semaine suivante. Un lundi donné, quelle est la probabilité que la plage soit fermée la semaine suivante ?

Exercice 7 (Loi de Cauchy)**.** Soit $f : t \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est la densité d'une certaine variable aléatoire X.
2. Déterminer la loi de $Y = \frac{2}{\pi}\arctan(X)$.

Exercice 8 (Parties entière et fractionnaire)**.** Soit U une variable aléatoire uniforme sur $]0;1[$.

1. Déterminer la loi de $X = \ln(1/U)$.
2. En notant $Y = \lfloor X \rfloor$ la partie entière de X, déterminer les lois de Y et $X - Y$.