Université Paris-Saclay
2024 – 2025

Master Mathématiques et Applications
Distributions et Analyse de Fourier

Enseignant·e·s : Blanche Buet, Dominique Hulin et Thomas Letendre.

Feuille 9 – Formules de Green

Exercice 1 (Le cas d'un hyperplan)**.** Soit $H \subset \mathbb{R}^d$ un hyperplan (affine) muni de sa mesure superficielle σ. On choisit un repère orthonormé (affine) afin d'avoir $H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_d = 0\}$. On considère l'ouvert $V = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_d > 0\}$, calculer "à la main" $\partial_j \mathbf{1}_V$ pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$.

Exercice 2 (IPP : la formule de Gauss–Green)**.** Soient $V \subset \mathbb{R}^d$ ouvert à bord lisse et $\nu : \partial V \to \mathbb{S}^{d-1}$ la normale unitaire sortante de V. On note σ la mesure superficielle de ∂V. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, montrer que pour tout $j \in [\![1, d]\!]$,

$$\int_V \psi \partial_j \varphi \,\mathrm{d}x = \int_{\partial V} \psi \varphi \nu_j \,\mathrm{d}\,\sigma - \int_V \varphi \partial_j \psi \,\mathrm{d}x.$$

Notation. Soit $V \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, on note $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{V})$ si u est la restriction d'une fonction $\widetilde{u} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, ou de façon équivalente $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de $\overline{V}$. Si V est borné, on peut en fait supposer $\widetilde{u} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 3 (Formules de Green pour Δ)**.**

1. Soient $V \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné non vide à bord lisse et σ la mesure superficielle de ∂V. On note $\nu : \partial V \to \mathbb{S}^{d-1}$ la normale unitaire sortante de V. Prouver les formules suivantes, appelées respectivement première et seconde formule de Green : pour tout u, $v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{V})$,

$$\int_V u \ \Delta v \,\mathrm{d}x = \int_{\partial V} u \ \nabla v \cdot \nu \,\mathrm{d}\sigma - \int_V \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

$$\int_V (u \ \Delta v - v \ \Delta u) \,\mathrm{d}x = \int_{\partial V} (u \ \nabla v - v \ \nabla u) \cdot \nu \,\mathrm{d}\sigma. \tag{2}$$

2. Soit $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\Delta v = 0$ si et seulement si pour tout $V \subset \mathbb{R}^d$ ouvert borné non vide à bord lisse :

$$\int_{\partial V} \nabla v \cdot \nu \,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

3. Soient $V \subset \mathbb{R}^d$ ouvert connexe borné non vide à bord lisse et $v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{V})$ une fonction harmonique dans V telle que $v_{|\partial V} = 0$. Montrer que $v = 0$.
4. (*facultatif*) Même question, mais sans supposer que V est connexe.

Notation. Pour tout $r > 0$, on note $B_r = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| < r\right\}$ et $S_r = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = r\right\}$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. On note σ_r la mesure superficielle de la sphère S_r. Enfin, on notera $N : x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ dans S_1 le champ de vecteurs unitaires radial issu de 0.

À toute fin utile, on rappelle les formules suivantes qui ont été établies dans les feuilles précédentes :

- pour tout $r > 0$, $\sigma_r(S_r) = r^{d-1}\sigma_1(S_1)$,
- $\sigma_1(S_1) = d \cdot \mathrm{Vol}(B_1)$.

Exercice 4 (Formules de la moyenne)**.** Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, on définit $g :]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ par :

$$g : r \longmapsto \frac{1}{r^{d-1}} \int_{S_r} u(x)\,\mathrm{d}\sigma_r(x).$$

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $g' : r \mapsto \frac{1}{r^{d-1}} \int_{S_r} \nabla u(x) \cdot N(x)\,\mathrm{d}\sigma_r(x)$.

On suppose désormais que la fonction u est harmonique.

2. Montrer que g constante dans ce cas, et établir la première formule de la moyenne :

$$\forall r > 0, \qquad u(0) = \frac{1}{\sigma_r(S_r)} \int_{S_r} u(x)\,\mathrm{d}\sigma_r(x). \tag{3}$$

3. En déduire la seconde formule de la moyenne :

$$\forall R > 0, \qquad u(0) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_R)} \int_{B_R} u(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Exercice 5 (Solution fondamentale de Δ)**.** On sait qu'en dimension $d \geqslant 3$, est une solution fondamentale de Δ est $E_d : x \mapsto -\frac{C_d}{\|x\|^{d-2}}$, où $C_d = \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{2(d-2)\pi^{\frac{d}{2}}}$. La preuve du cours utilise les distributions homogènes, on propose de redémontrer ce résultat par un calcul "direct".

1. Vérifier que E_d définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, calculer $\nabla E_d(x)$ et $\Delta E_d(x)$, au sens de la dérivation usuelle.
3. Vérifier que $\displaystyle\int_{S_\varepsilon} E_d \,\mathrm{d}\,\sigma_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$. En déduire que si $g : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ est continue et bornée alors $gE_d\,\sigma_\varepsilon$ définit une distribution qui converge vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
4. En appliquant la formule des sauts, montrer que $\Delta E_d = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \nabla E_d \cdot N\,\sigma_\varepsilon$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
5. Redémontrer que $\Delta E_d = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \nabla E_d \cdot N\,\sigma_\varepsilon$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, en utilisant cette fois une formule de Green pour le laplacien.
6. Calculer ΔE_d dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
7. (*facultatif*) Pour $d = 2$, on pose $E_2 : x \mapsto \frac{1}{2\pi} \ln\|x\|$. Calculer ΔE_2 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ par la même méthode que ci-dessus.

Exercice 6 (Formule de Cauchy–Pompeiu)**.** On identifie canoniquement $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ via l'application $x = (x_1, x_2) \mapsto z = x_1 + ix_2$. On rappelle que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$.

1. Soit $f : z \mapsto \frac{1}{z}$ de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$. Vérifier que f définit une distribution sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, et montrer que $f\mathbf{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
2. Montrer que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \pi\delta_0$.
3. Soit $R > 0$, calculer $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f\mathbf{1}_{B_R})$. En déduire que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\varphi(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{S_R} \frac{\varphi(z)}{z}\,\mathrm{d}z - \int_{B_R} \frac{1}{\pi z} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(z)\,\mathrm{d}\lambda(z). \tag{5}$$

4. Soit $V \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $\varphi : V \to \mathbb{C}$ holomorphe. Pour tout $R > 0$ tel que $a + \overline{B_R} \subset V$, montrer que

$$\varphi(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a+S_R} \frac{\varphi(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z \tag{6}$$