Enseignant·e·s : Blanche Buet, Dominique Hulin et Thomas Letendre.

Feuille 7 – Transformation de Fourier au sens des distributions

Exercice 1 (Convergence dans $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{D}'$)**.** Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} 0$. Est-ce que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ en général ?

Exercice 2 (Propriétés fonctionnelles de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$)**.** Soient $a \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda > 0$, on rappelle que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a défini $\tau_a\varphi : x \mapsto \varphi(x-a)$ et $\varphi_\lambda : x \mapsto \varphi(\lambda x)$, et pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on a défini $\tau_a T : \varphi \mapsto \langle T \,, \tau_{-a}\varphi\rangle$ et $\operatorname{dil}_\lambda T : \varphi \mapsto \frac{1}{\lambda^d}\langle T \,, \varphi_{\frac{1}{\lambda}}\rangle$. On note aussi $e_a : \xi \mapsto e^{ia\cdot\xi}$.

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, exprimer les distributions tempérées suivantes en fonction de $\widehat{T}$.

1. $\mathcal{F}(\partial^\alpha T)$, où $\alpha \in \mathbb{N}^d$.
2. $\mathcal{F}(X^\alpha T)$, où $\alpha \in \mathbb{N}^d$.
3. $\mathcal{F}(\tau_a T)$.
4. $\mathcal{F}(e_a T)$.
5. $\mathcal{F}(\operatorname{dil}_\lambda T)$.

Exercice 3 (Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$, calculs élémentaires)**.** Justifier que les distributions suivantes sont tempérées et calculer leurs transformées de Fourier.

1. $\partial^\alpha \delta_a$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et $a \in \mathbb{R}^d$.
2. $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
3. $f = \mathbf{1}_{[-1,1]}$, la fonction indicatrice de $[-1,1]$.
4. (*facultatif*) $g_{ab} = \mathbf{1}_{[a,b]}$, la fonction indicatrice de $[a,b]$, où $-\infty < a < b < +\infty$.

Exercice 4 (Parité et transformée de Fourier)**.** Rappellons que $\check{\varphi} : x \mapsto \varphi(-x)$ pour tout $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ et $\check{T} : \varphi \mapsto \langle T \,, \check{\varphi}\rangle$ pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. On dit que T est *paire* si $\check{T} = T$ et *impaire* si $\check{T} = -T$.

1. Montrer que $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est paire et que $\operatorname{vp}\left(\dfrac{1}{x}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est impaire.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\check{\widehat{\varphi}} = \widehat{\check{\varphi}}$.
3. Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\check{\widehat{S}} = \widehat{\check{S}}$.

Exercice 5 (Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$, calculs moins élémentaires)**.** On note $H = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}$ la fonction de Heaviside et S la fonction signe, définie par $S(x) = -1$ si $x < 0$ et $S(x) = 1$ si $x \geqslant 0$.

1. Justifier que S définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$ et montrer que $x\widehat{S} = -2i$.
2. En déduire que $\widehat{S} = -2i\operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.

   Indication. Montrer que $\widehat{S} + 2i\operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est un multiple de δ_0 et utiliser un argument de parité.
3. Calculer $\widehat{H}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
4. Justifier que $\operatorname{vp}\left(\dfrac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et calculer sa transformée de Fourier.

Exercice 6 (Transformée de Fourier des distributions de $\mathcal{E}'$, analyticité)**.** Soient $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $R > 0$ tel que $\operatorname{supp}(T) \subset]-R, R[$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\chi \equiv 1$ sur $[-R, R]$ et $\operatorname{supp}(\chi) \subset [-2R, 2R]$. On rappelle que $\widehat{T}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que $\widehat{T}(\xi) = \langle T\,, e_{-\xi}\rangle = \langle T\,, \chi e_{-\xi}\rangle$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\xi \in \mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $f_k : x \mapsto (-i\xi)^k \chi(x) \frac{x^k}{k!}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, montrer que $\sum_{k \geqslant 0} f_k^{(p)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} f_k \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} \chi e_{-\xi}$.
3. Montrer que $\widehat{T}$ est la somme sur $\mathbb{R}$ d'une série entière de rayon de convergence infini.

Définition. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, on dit que la fonction f est *à croissance lente* si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ il existe $C \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $|\partial^\alpha f(x)| \leqslant C\langle x\rangle^k$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, où on a noté $\langle x\rangle = \left(1 + \|x\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. On note $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$ le sous-espace de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ formé par les fonctions à croissance lente.

Exercice 7 (Produit de $\mathcal{S}'$ par $\mathcal{O}_M$)**.** Dans cet exercice, on prouve les énoncés du cours affirmant que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ sont stables par multiplication par un élément de $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$.

1. Soient $\rho \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$ et $p \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $C \geqslant 0$ et $q \geqslant p$ tels que $N_p(\rho\varphi) \leqslant C N_q(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
2. Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\rho \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$, montrer que la forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ définie par $\varphi \mapsto \langle T\,, \rho\varphi\rangle$ est une distribution tempérée. On la notera $\rho T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 8 (Transformation de Fourier et convolution dans $\mathcal{S}'$)**.** Dans cet exercice on s'intéresse aux interactions entre transformation de Fourier et convolution.

1. Soient $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $p \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $N_p(\varphi * \rho) \leqslant C N_p(\varphi)$.
2. Soient φ et $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\varphi * \rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et que $\widehat{\varphi * \rho} = \widehat{\varphi}\,\widehat{\rho}$.
3. Soient $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $S * \rho \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a $\langle S * \rho\,, \varphi\rangle = \langle S\,, \check{\rho} * \varphi\rangle$.
4. Montrer que $\widehat{S * \rho} = \widehat{S}\widehat{\rho}$ et en déduire qu'en fait $S * \rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
5. Soient $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $p \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $C \geqslant 0$ et $q \geqslant p$ tels que $N_p(S * \varphi) \leqslant C N_q(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

   Indication. Utiliser les questions précédentes et la continuité de $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
6. Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, montrer que $T * S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et que $\langle T * S\,, \varphi\rangle = \langle T\,, \check{S} * \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
7. Montrer que $\widehat{T * S} = \widehat{S}\widehat{T}$.

Exercice 9 (Distributions tempérées harmoniques)**.** Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ harmonique et bornée, montrer que T est constante.

Exercice 10 (Fonctions propres du laplacien)**.** Dans cet exercice, on s'intéresse aux solutions de l'équation $\Delta T + \lambda T = 0$, où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est l'inconnue.

1. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\Delta T + \lambda T = 0$, montrer que $T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.
2. Pour quels $\lambda \in \mathbb{C}$ existe-t-il $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ non nulle telle que $\Delta T + \lambda T = 0$.