Enseignant·e·s : Blanche Buet, Dominique Hulin et Thomas Letendre.

Feuille 5 – Espaces de Sobolev $H^1(I)$, équations (différentielles) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Exercice 1 (Convergence dominée L^p)**.** Soient (X, μ) un espace mesuré et $p \in [1, +\infty[$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ telle que :

- il existe $f : X \to \mathbb{C}$ telle que $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ pour μ-presque tout $x \in X$;
- il existe $g \in L^p(X, \mu)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant g$ presque partout.

Montrer que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ dans $L^p(X, \mu)$.

Exercice 2 (Dérivation d'un produit et intégration par parties dans H^1)**.** Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soient $u, v \in H^1(I)$.

1. Montrer que $uv \in H^1(I)$ et que $(uv)' = u'v + uv'$.
2. En déduire que pour tout $[a, b] \subset \overline{I}$ la formule d'intégration par parties suivantes est valide :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Exercice 3 (Singularité ponctuelle)**.** Soient $I =]a, b[$ et $J =]b, c[$, avec $-\infty \leqslant a < b < c \leqslant +\infty$. Soient $u \in H^1(I)$ et $v \in H^1(J)$, on note $w = u\mathbf{1}_I + v\mathbf{1}_J$.

1. À quelle condition a-t-on $w \in H^1(]a, c[)$?

   Indication. Calculer la dérivée de w.
2. Expliquer comment prolonger $u \in H^1(\mathbb{R}_+^*)$ en $\widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R})$ tel que $\|\widetilde{u}\|_{H^1(\mathbb{R})} \leqslant \sqrt{2}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^*)}$.

Exercice 4 (La règle de la chaîne)**.** Soit $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $G(0) = 0$. Soit I un intervalle ouvert, le but de l'exercice est de montrer que pour tout $u \in H^1(I)$, on a $G \circ u \in H^1(I)$ et

$$(G \circ u)' = \big(G' \circ u\big)u'. \tag{2}$$

1. Soit $u \in H^1(I)$, montrer que $G' \circ u$ est bornée. En déduire que $(G' \circ u)u'$ et $G \circ u$ sont L^2.
2. Conclure en utilisant un argument de densité.
3. Que dire de l'hypothèse $G(0) = 0$ lorsque I est borné ?

Exercice 5 (Inégalité de Poincaré)**.** Soit $I =]a, b[$ où $-\infty < a < b < +\infty$. Montrer que pour tout $u \in H_0^1(I)$ on a $\|u\|_2 \leqslant (b - a)\|u'\|_2$.

Exercice 6 (Problème de Dirichlet)**.** Soit $I =]a, b[$ où $-\infty < a < b < +\infty$. Soient q et $f \in L^1(I)$, on suppose que q est une fonction positive. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une unique solution à l'équation différentielle $u'' = qu + f$ d'inconnue $u \in H_0^1(I)$, c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction u continue sur $[a, b]$ telle que $u(a) = 0 = u(b)$ et $(T_u)'' = T_{qu+f}$ dans $\mathcal{D}(I)$.

1. Montrer que $L_f : v \mapsto \int_a^b f(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ définit une forme linéaire continue sur $\big(H_0^1(I), \|\cdot\|_{H^1}\big)$.

2. On définit $\langle u\,, v\rangle_q = \displaystyle\int_a^b \Big(\overline{u'(t)}v'(t) + q(t)\overline{u(t)}v(t)\Big)\,\mathrm{d}t$ pour tout $u, v \in H_0^1(I)$. Montrer que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_q$ définit un produit scalaire hermitien sur $H_0^1(I)$.
3. On note $\|\cdot\|_q$ la norme associée à $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_q$. Montrer que $\|\cdot\|_q$ et $\|\cdot\|_{H^1}$ sont équivalentes.
4. Soit $u \in H_0^1(I)$, montrer que $u'' = qu + f$ si et seulement si $\forall\varphi \in H_0^1(I)$, $\langle\overline{u}\,,\varphi\rangle_q = -L_f(\varphi)$.
5. Conclure qu'il existe un unique $u \in H_0^1(I)$ tel que $u'' = qu + f$.

Exercice 7 (Inégalité de Gagliardo–Nirenberg — *facultatif*)**.** On considère un intervalle ouvert I non borné. Le but de l'exercice est de prouver que pour tout $u \in H^1(I)$

$$\|u\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\|u\|_2^{\frac{1}{2}}\|u'\|_2^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

1. Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pour tout x et $y \in I$, montrer que $u(y)^2 = u(x)^2 + 2\int_x^y u(t)u'(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire que la restriction de u à I vérifie (3).
2. Montrer que (3) est vérifiée pour tout $u \in H^1(I)$.
3. En considérant $I =]0, +\infty[$, montrer que la constante $\sqrt{2}$ apparaissant dans (3) est optimale.

Exercice 8 (Équation dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)**.** On rappelle que la famille $(\delta_0^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, donner une expression plus simple de $X\delta_0^{(k)}$. En déduire une expression plus simple de $X^j\delta_0^{(k)}$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $j \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation $X^jT = 0$ d'inconnue T, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$ puis dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
3. Résoudre l'équation $X^2T = 1$ d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   Indication. Commencer par déterminer une solution particulière.

Exercice 9 (Équation différentielle dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)**.** Le but de l'exercice est de résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$2XT' - T = \delta_0. \tag{4}$$

On va d'abord considérer l'équation différentielle homogène associée :

$$2XT' - T = 0. \tag{5}$$

1. Résoudre l'équation différentielle (5) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$ (resp. $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-^*)$).
2. Déterminer les solutions de (5) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans $\{0\}$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (5) sur $\mathbb{R}$ entier.
4. Déterminer l'ensemble des solutions de (4) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.