Université Paris-Saclay — Master Mathématiques et Applications
2024 – 2025 — Distributions et Analyse de Fourier

Enseignant·e·s : Blanche Buet, Dominique Hulin et Thomas Letendre.

Feuille 4 – Convergence au sens des distributions, support

Exercice 1 (Lemme de Riemann–Lebesgue)**.** Le but de cet exercice est de prouver le lemme de Riemann–Lebesgue : pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0. \tag{1}$$

1. Prouver (1) pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. En déduire que $e_x \xrightarrow[|x|\to+\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} 0$, où on a noté $e_x : t \mapsto e^{ixt}$.
2. En déduire que (1) est valable pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 2 (Convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $e_n : x \mapsto e^{inx}$. Montrer que les suites de distributions suivantes convergent dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand $n \to +\infty$ et déterminer leur limite.

1. $A_n = n^{100} e_n$.
2. $B_n : x \mapsto \cos^2(nx)$.
3. $C_n : x \mapsto n\sin(nx)H(x)$, où H est la fonction de Heaviside.
4. $D_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\frac{k}{n}}$.
5. $E_n = n\Big(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}\Big)$.
6. (*facultatif*) $F_n = e_n \operatorname{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$.

   Indication. On pourra utiliser sans démonstration que $\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[R\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

Définition (Translations et dilatations)**.** Soient $a \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

- Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, on définit $\tau_a\varphi : x \mapsto \varphi(x-a)$ et $\varphi_\lambda : x \mapsto \varphi(\lambda x)$.
- Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on définit $\tau_a T$ et $\operatorname{dil}_\lambda T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ par les relations suivantes :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d), \qquad \langle \tau_a T\,,\varphi\rangle = \langle T\,,\tau_{-a}\varphi\rangle \qquad \text{et} \qquad \langle \operatorname{dil}_\lambda T\,,\varphi\rangle = \frac{1}{|\lambda|^d}\Big\langle T\,,\varphi_{\frac{1}{\lambda}}\Big\rangle.$$

Exercice 3 (Translations et dilatations)**.** Soit $a \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

1. Vérifier que $\tau_a T$ et $\operatorname{dil}_\lambda T$ définissent bien des distributions sur $\mathbb{R}^d$.
2. Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, identifier les distributions $\tau_a T_f$ et $\operatorname{dil}_\lambda T_f$.
3. Dans cette question on suppose $d = 1$. Montrer dans ce cas que $\frac{1}{a}(T - \tau_a T) \xrightarrow[a\to 0]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T'$.
4. Soit $h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\frac{1}{a}(T - \tau_{ah}T)$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ quand $a \to 0$ et identifier la limite.
5. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\lambda \in]0,+\infty[\setminus\{1\}$. Montrer que $\frac{1}{\lambda-1}\Big(T - \frac{1}{\lambda}\operatorname{dil}_{\frac{1}{\lambda}} T\Big)$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand $\lambda \to 1$ et identifier la limite.

Exercice 4 (Banach–Steinhaus)**.**

1. Rappeler l'énoncé du théorème de Banach–Steinhaus dans le cadre des espaces vectoriels normés.
2. On considère l'espace $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$L_n : f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mapsto n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right) .$$

Vérifier que $L_n : (\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue et que la suite $(L_n)_n$ converge simplement vers une forme linéaire L à identifier. La limite L est-elle continue ?

Exercice 5 (Banach–Steinhaus dans $\mathcal{D}'$)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert.

1. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}'(\Omega)$, on suppose que $(\langle T_n\,, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Rappeler l'énoncé du théorème de Banach–Steinhaus dans ce cadre.
2. Soit $I : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$. Pour $\varepsilon > 0$, on considère la distribution T_ε associée à la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]}I$. Rappeler pourquoi $(T_\varepsilon)_\varepsilon$ converge simplement quand $\varepsilon \to 0_+$, que dire de la limite ?

Définition (Dual topologique)**.** Pour tout $p \in [1,+\infty]$, on note $L^p(\mathbb{R})'$ l'espace des formes linéaires continues sur $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$. Cet espace est muni de la norme d'opérateur associée à $\|\cdot\|_p$.

Définition (Convergence faible dans L^p)**.** On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $L^p(\mathbb{R})$ *converge faiblement* vers $f \in L^p(\mathbb{R})$ si : $\forall \Phi \in L^p(\mathbb{R})'$, $\Phi(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(f)$. On note alors $f_n \rightharpoonup f$.

Théorème 1 (Théorème de représentation)**.** *Soient $p, q \in [1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$, on note $I_f \in L^q(\mathbb{R})'$ la forme linéaire $I_f : g \mapsto \int_\mathbb{R} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.*

- *L'application $I : f \mapsto I_f$ de $L^p(\mathbb{R})$ dans $L^q(\mathbb{R})'$ est isométrique, en particulier injective.*
- *Si $q < +\infty$ alors I est surjective.*

Exercice 6 (Convergence faible et convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)**.** Soit $p \in [1,+\infty]$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $L^p(\mathbb{R})$. Le but de l'exercice est de comparer les notions de convergence forte (i.e. pour la norme $\|\cdot\|_p$), de convergence faible et de convergence au sens des distributions pour la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_p} f$, montrer que $f_n \rightharpoonup f$. L'implication réciproque est-elle vraie ?
2. Si $f_n \rightharpoonup f \in L^p(\mathbb{R})$, montrer que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} f$ et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$.
3. On suppose que $p \in \,]1,+\infty[$. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(\mathbb{R})$ et s'il existe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} T$, montrer qu'il existe $f \in L^p(\mathbb{R})$ telle que $T = T_f$ et que $f_n \rightharpoonup f$.
4. Toujours dans le cas $p \in \,]1,+\infty[$, donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} 0$ et qui ne converge pas faiblement dans $L^p(\mathbb{R})$.
5. Dans le cas $p = 1$, donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge au sens des distributions mais pas faiblement dans $L^1(\mathbb{R})$ et telle que $\|f_n\|_1 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 (Support d'une distribution)**.**

1. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, montrer que $\mathrm{supp}(T_f) = \mathrm{supp}(f)$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, montrer que $\mathrm{supp}(fT) \subset \mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(T)$.
3. Déterminer le support de $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$.
4. Déterminer le support singulier de $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$.

Exercice 8 (Support et produit — *facultatif*)**.** Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, on note $Z = f^{-1}(0)$.

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ tel que $fT = 0$, montrer que $\operatorname{supp}(T) \subset Z$.
2. Soient $K \subset U \subset \mathbb{R}^d$ avec K compact et U ouvert, montrer qu'il existe $\chi \in \mathcal{D}(U)$ à valeurs dans $[0,1]$ et constante à 1 sur un voisinage de K.

Dans la suite, on fixe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution d'ordre 0 telle que $\operatorname{supp}(T) \subset Z$. L'objectif est de montrer que dans ce cas $fT = 0$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on note $K = \operatorname{supp}(\varphi) \cap \operatorname{supp}(T)$.

3. Pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, montrer qu'il existe U_ε ouvert contenant K tel que $\sup_{x \in U_\varepsilon} |f(x)| \leqslant \varepsilon$.
4. Construire une famille de fonctions $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon \in \,]0,1]}$ telle que :
   - $\forall \varepsilon \in \,]0,1]$, $\chi_\varepsilon \in \mathcal{D}(U_\varepsilon)$ et $\langle T \,, (1-\chi_\varepsilon) f\varphi \rangle = 0$;
   - $\langle T \,, \chi_\varepsilon f \varphi \rangle \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.
5. Conclure que $fT = 0$.
6. Le résultat est-il encore vrai si on ne suppose pas que T est d'ordre 0 ?