Université Paris-Saclay
2024 – 2025

Master Mathématiques et Applications
Distributions et Analyse de Fourier

Enseignant·e·s : Blanche Buet, Dominique Hulin et Thomas Letendre.

Feuille 2 – Fonctions-test, distributions, dérivées et ordre

Exercice 1 (Premiers exemples de distributions)**.** Montrer que les applications suivantes définissent des distributions et déterminer leur ordre.

1. $T : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{x^2} \varphi(x) \, \mathrm{d}x$.
2. $T : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x^2) \, \mathrm{d}x$.
3. $T : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi^{(n)}(n)$.

Exercice 2 (Intégrales tronquées)**.** Soit (X, μ) un espace mesuré et soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante ($A_{n+1} \subset A_n$ pour tout n) de parties mesurables de X telle que $\mu(A_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

1. Pour tout $f \in L^1(X, \mu)$, montrer que $\int_{X \setminus A_n} f(x) \, \mathrm{d}\mu(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_X f(x) \, \mathrm{d}\mu(x)$.
2. (*facultatif*) Montrer que le résultat reste vrai sans hypothèse de décroissance sur la suite $(A_n)_n$.

Exercice 3 (La valeur principale)**.** On rappelle la définition de la *valeur principale de* $\frac{1}{x}$:

$$\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) : \varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} \, \mathrm{d}x.$$

1. Rappeler l'argument montrant que $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ définit bien un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Déterminer l'ordre de la distribution $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, montrer que $\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} \, \mathrm{d}x$.
4. La fonction $I : x \mapsto \frac{1}{x}$ définit une distribution $T_I \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$. Expliquer en quoi $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ peut être vu comme un prolongement de T_I en un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Un tel prolongement est-il unique ?
5. Existe-t-il un prolongement de T_I en une distribution sur $\mathbb{R}$ de la forme T_f avec $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$?

Notations.

- Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ un *multi-indice*, on note $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ sa *longueur*, $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$ et $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ on note $x^\alpha = \prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i}$.
- Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $K \subset \Omega$ un compact, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^l(\Omega)$ on note $N_{K,l}(f) = \max_{|\alpha| \leqslant l} \|\partial^\alpha f\|_{\infty,K} = \sup\left\{ |\partial^\alpha f(x)| \;\middle|\; |\alpha| \leqslant l \text{ et } x \in K \right\}$.

Exercice 4 (Lemme de Hadamard)**.** Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$.

1. Montrer qu'il existe des fonctions $(\psi_\alpha)_{|\alpha|=k}$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad f(x) = \sum_{|\alpha|<k} \partial^\alpha f(0) \frac{x^\alpha}{\alpha!} + \sum_{|\alpha|=k} x^\alpha \psi_\alpha(x). \tag{1}$$

2. Soit $l \in \mathbb{N}$. Si $f \in \mathcal{C}^{k+l}(\mathbb{R}^d)$, montrer que les $(\psi_\alpha)_{|\alpha|=k}$ sont $\mathcal{C}^l$ sur $\mathbb{R}^d$ et expliciter leurs dérivées.

3. Soit $B \subset \mathbb{R}^d$ une boule fermée centrée en 0. Pour tout α de longueur $|\alpha| = k$, montrer que $N_{B,l}(\psi_\alpha) \leqslant N_{B,l}(\partial^\alpha f) \leqslant N_{B,k+l}(f)$.
4. Dans cette question on suppose que $d = 1$, de sorte que l'équation (1) se ré-écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(0)\frac{x^j}{j!} + x^k \psi_k(x).$$

On suppose que $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, à quelle condition a-t-on $\psi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$?

Exercice 5 (Partie finie)**.** On considère la forme linéaire suivante sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, où pf se lit *partie finie* :

$$\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) : \varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}.$$

1. Montrer que $\mathrm{pf}\big(\frac{1}{x^2}\big)$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$.
2. Conjecturer puis démontrer des expressions plus simples des produits suivants dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

   (a) $x\,\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$, (b) $x\,\mathrm{pf}\big(\frac{1}{x^2}\big)$, (c) $x^2\,\mathrm{pf}\big(\frac{1}{x^2}\big)$.

Exercice 6 (Calculs de dérivées)**.** 1. Soit $f : x \mapsto \ln(|x|)$, calculer la dérivée de T_f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Calculer la dérivée de $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
3. Soient $H = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}$ la fonction de Heaviside et $n \in \mathbb{N}$, calculer les dérivées successives dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la fonction $x \mapsto \frac{x^n}{n!}H(x)$.

Exercice 7 (Convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$)**.** 1. Soient $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui converge vers φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer que $\psi\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \psi\varphi$.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, pour tout $t \neq 0$ on pose $\psi_t : x \mapsto \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}$. Montrer que ψ_t converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ lorsque $t \to 0$, vers une certaine fonction à déterminer.
3. Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\psi : x \mapsto x\varphi'(x)$. Pour tout $t \neq 1$ on définit $\varphi_t : x \mapsto \varphi(tx)$ et $\psi_t = \frac{\varphi_t - \varphi}{t-1}$. Montrer que $\psi_t \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour tout $t \notin \{0,1\}$ et que $\psi_t \xrightarrow[t\to1]{\mathcal{D}} \psi$.

Exercice 8 (Une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui n'est pas une distribution — *facultatif*)**.** Soit f la fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ sinon. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction plateau valant 1 sur $[-1,1]$ et supportée dans $[-2,2]$, on note $\varphi = \psi f$. Soit $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ une fonction croissante, nulle sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$ et constante à 1 sur $[1,+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi_n : x \mapsto \chi(nx)\varphi(x)$.

1. Comprendre ces fonctions sur un dessin, puis montrer que $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

   Indication. On pourra utiliser sans démonstration que : pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_k de degré $2k$ tel que $f^{(k)} : t \mapsto t^{-2k}P_k(t)f(t)$.
2. Le sous-espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ est-il fermé dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$?

Soit E un supplémentaire de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit T la forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^*) \oplus E$ définie par :

$$T : g \longmapsto \begin{cases} \sum_{k\geqslant 1} e^k g\big(\frac{1}{k}\big) & \text{si } g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*) \\ 0 & \text{si } g \in E. \end{cases}$$

3. Montrer que $\langle T\,,\varphi_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
4. En déduire que T ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$.