Université Paris-Saclay
2024 – 2025
Enseignant·e·s : Blanche Buet, Dominique Hulin et Thomas Letendre.

Master Mathématiques et Applications
Distributions et Analyse de Fourier

Feuille 1 – Convolution

Notations.

- Soient (X,μ) un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{C}$ mesurable. On note

$$\forall p \in [1,+\infty[, \qquad \|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \in [0,+\infty],$$
$$\text{et} \qquad \|f\|_\infty = \inf\left\{M \geqslant 0 \;\middle|\; |f(x)| \leqslant M \text{ pour presque tout } x \in X\right\} \in [0,+\infty].$$

- Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, le *support* d'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$, noté $\mathrm{supp}(f)$, est l'adhérence de $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$ dans Ω.
- Pour tout $k \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$, on note $\mathcal{C}^k_c(\Omega)$ l'espace des fonctions de Ω dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^k$ à support compact. On note aussi $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$.
- Soit $p \in [1,+\infty]$, on dit que $f \in L^p(\Omega)$ est *à support compact* s'il existe un compact $S \subset \Omega$ en dehors duquel f est nulle presque partout, i.e. si f admet un représentant à support compact.
- Pour tout $A \subset \Omega$, on note $\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0,1\}$ la fonction indicatrice de A.
- Soit $p \in [1,+\infty]$, on note $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$, modulo égalité presque partout, telles que $\mathbf{1}_K f \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.
- Pour tout $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, on note $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ sa *longueur* et $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_d^{\alpha_d}$.

Exercice 1 (Inclusions entre L^p)**.** Soient (X,μ) un espace mesuré et $p,q \in [1,+\infty]$ tels que $p \leqslant q$.

1. Si $\mu(X) < \infty$, montrer que $L^q(X,\mu) \subset L^p(X,\mu)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
2. Donner un contre-exemple à l'inclusion de la question 1 lorsque $\mu(X) = +\infty$.
3. Déduire de la question 1 que, pour tout $p \in [1,+\infty]$, $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Définition (Convolution)**.** Soient f et g deux fonctions mesurables de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Si $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est L^1, on note $f * g(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$. Un changement de variable montre qu'alors $g * f(x)$ est bien défini et égal à $f * g(x)$. La fonction $f * g$ est appelée la *convolée* de f et g.

Exercice 2 (Convolution par des indicatrices d'intervalles)**.**

1. Soient $a < b$ et $c < d$, montrer que $\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathbf{1}_{[c,d]}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et l'expliciter.
2. Soient $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, montrer que $\mathbf{1}_{[a,b]} * f$ est bien définie. Vérifier que $\mathbf{1}_{[a,b]} * f \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$ et calculer sa dérivée.

Exercice 3 (Support d'une convolée)**.** Soient A et $B \subset \mathbb{R}^d$, on note $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

1. Si $A \subset \mathbb{R}^d$ est compact et $B \subset \mathbb{R}^d$ est fermé, montrer que $A + B$ est fermé. Est-ce encore vrai si on suppose seulement A et B fermés ?
2. Soient f et g deux fonctions continues telles que $f * g$ soit bien définie sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que si $x \notin \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)$ alors $f * g(x) = 0$.
3. Si de plus f ou g est à support compact, montrer que $\mathrm{supp}(f * g) \subset \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)$.

Exercice 4 (Convolution et dérivation). 1. Soient $f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, montrer que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g$ pour tout $i \in [\![1, d]\!] = \{1, \dots, d\}$.

2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.
3. Soient $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $f * g$ est $\mathcal{C}^\infty$ et expliciter ses dérivées partielles.

Exercice 5 (Continuité des translations dans L^p pour $p < +\infty$). Soit $p \in [1, +\infty[$, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ on définit l'opérateur de translation $\tau_a : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ par $\tau_a(f) : x \mapsto f(x - a)$. Le but de l'exercice est de prouver que, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\tau_a(f) - f\|_p \xrightarrow[a \to 0]{} 0. \tag{1}$$

1. Montrer que (1) est vrai lorsque $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$.
2. Conclure grâce à la densité de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 6 (Inégalité de Young, cas particuliers). Soient f et g de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$. Dans cet exercice, on détermine des conditions assurant que $f * g$ est bien définie, et on étudie sa régularité.

1. Soient f et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, montrer que $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$.
2. Soient f, g et $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$, montrer que $f * (g * h) = (f * g) * h$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.
3. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ à support compact et $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $f * g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.
4. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, où p et $q \in [1, +\infty]$ sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $f * g(x)$ est bien défini et $|f * g(x)| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$. Montrer que $f * g$ est alors uniformément continue.
5. Si $p \in [1, +\infty]$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, montrer que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1$.
   Indication. Appliquer l'inégalité de Hölder pour la mesure à densité $\mu = |g| \, \mathrm{d}x$.

Exercice 7 (Régularisation par convolution). Soient $S \subset \mathbb{R}^d$ un compact et $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ nulle presque partout sur $\mathbb{R}^d \setminus S$ et telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on définit $\varphi_\varepsilon : x \mapsto \frac{1}{\varepsilon^d} \varphi\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)$.

1. Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$:
$$\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \big(\tau_{\varepsilon y} f(x) - f(x)\big) \, \mathrm{d}y. \tag{2}$$
2. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction uniformément continue, montrer que $\varphi_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ uniformément.
3. (*facultatif*) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\varphi_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 8 (Inégalité de Hölder généralisée — *facultatif*). Soit (X, μ) un espace mesuré.

1. Soient $p_1, \dots, p_n \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$ et $f_1, \dots, f_n$ mesurables de X dans $\mathbb{C}$, montrer que $\|f_1 \cdots f_n\|_1 \leqslant \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}$.
2. Soient p, q et $r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Montrer que $\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$ pour tout f et g mesurables de X dans $\mathbb{C}$.
3. Si $\mu(X) < \infty$ et $r \leqslant q$, montrer que l'inclusion $L^q(X, \mu) \subset L^r(X, \mu)$ est continue.

Exercice 9 (Inégalité de Young, cas général — *facultatif*). 1. Soient p, q et $r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. On note p' et q' les exposants conjugués de p et q respectivement. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, vérifier que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \qquad |f(x - y) g(y)| = |f(x - y)|^{\frac{p}{q'}} |g(y)|^{\frac{q}{p'}} \big(|f(x - y)|^p |g(y)|^q\big)^{\frac{1}{r}}.$$

En déduire l'inégalité : $\big(|f| * |g|\big)^r \leqslant \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \big(|f|^p * |g|^q\big)$.

2. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, montrer que $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.