Feuille 5 – Mesure superficielle, formules de Green

Définition. Un *domaine* $\mathcal{C}^\infty$ est un ouvert non-vide de la forme $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) < 0\}$, où $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si $\varphi(x) = 0$ alors $\nabla_x \varphi \neq 0$. Dans ce cas, le bord de Ω est l'*hypersurface* $\partial\Omega = \varphi^{-1}(0)$. On dit que φ est une *fonction définissante* de Ω.

Pour tout $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ on a défini l'intégrale de f sur $\partial\Omega$ pour la *mesure surperficielle* $\mathrm{d}\sigma$ par :

$$\int_{x\in\partial\Omega} f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n \mid -\varepsilon<\varphi(x)<0\}} f(x)\|\nabla_x\varphi\|\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Exercice 1 (Mesure superficielle d'un graphe)**.** Dans cet exercice, on note sous la forme $\underline{x} = (x, x_n)$ les points de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine $\mathcal{C}^\infty$ définit par une fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On suppose que $\partial\Omega \neq \emptyset$.

1. Soit $\underline{p} = (p, p_n) \in \partial\Omega$ montrer que, quitte à réordonner et renverser les vecteurs de la base canonique, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ et un intervalle $]a, b[\subset \mathbb{R}$ tels que $\underline{p} \in U\times]a, b[$ et $\forall \underline{x} \in U\times]a, b[$, $\partial_n\varphi(\underline{x}) > 0$.

   Comme $\underline{p} \in \partial\Omega = \varphi^{-1}(0)$ on a $\nabla_{\underline{p}}\varphi \neq 0$. Donc il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\partial_i\varphi(\underline{p}) \neq 0$. Quitte à échanger le i-ème vecteur de la base canonique avec (plus ou moins) le n-ième, on peut supposer que $\partial_n\varphi(\underline{p}) > 0$. Par continuité de $\partial_n\varphi$, on a $\partial_n\varphi(\underline{x}) > 0$ au voisinage de $\underline{p}$ dans $\mathbb{R}^n$. On peut choisir ce voisinage de la forme $U\times]a, b[$ avec U ouvert contenant p et $a < p_n < b$.

2. Soit $F : \underline{x} \mapsto (x, \varphi(\underline{x}))$ de $U\times]a, b[$ dans $\mathbb{R}^n$, montrer que F réalise un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $U\times]a, b[$ sur un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$.

   Soit $x \in U$, comme $\partial_n\varphi > 0$ sur $U\times]a, b[$, la fonction $t \mapsto \varphi(x, t)$ est $\mathcal{C}^\infty$ et strictement croissante de $]a, b[$ vers $]\varphi(x, a), \varphi(x, b)[$. En particulier cette fonction est bijective, et F envoie donc bijectivement $\{x\}\times]a, b[$ sur $\{x\}\times]\varphi(x, a), \varphi(x, b)[$. Donc F réalise une bijection $\mathcal{C}^\infty$ de $U\times]a, b[$ vers $V = \{\underline{x} \in U \times \mathbb{R} \mid \varphi(x, a) < x_n < \varphi(x, b)\}$.

   Soit $\underline{x} \in U\times]a, b[$, la différentielle de F en $\underline{x}$ (identifiée à sa matrice) est :

   $$D_{\underline{x}}F = \big(\partial_j F_i(\underline{x})\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ \partial_1\varphi(\underline{x}) & \dots & \partial_{n-1}\varphi(\underline{x}) & \partial_n\varphi(\underline{x}) \end{pmatrix},$$

   dont le déterminant est $\partial_n\varphi(\underline{x}) > 0$. Donc $D_{\underline{x}}F$ est inversible pour tout $\underline{x} \in U\times]a, b[$, et donc F est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $U\times]a, b[$ sur V par le théorème d'inversion globale.

3. Montrer qu'il existe $\psi : V \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $F^{-1} : \underline{y} \mapsto \big(y, \psi(\underline{y})\big)$, et exprimer les dérivées partielles de ψ en fonction de celles de φ.

   Notons $\psi : V \to \mathbb{R}$ la n-ième composante de $F^{-1} : V \to U\times]a, b[$, de sorte que ψ est $\mathcal{C}^\infty$. Soit $\underline{y} \in V$, notons $\underline{x} = (x, x_n) = F^{-1}(\underline{y})$. Alors $\underline{y} = F(\underline{x}) = (x, \varphi(\underline{x}))$ et donc $y = x$. Par définition $x_n = \psi(\underline{y})$, donc finalement $F^{-1}(\underline{y}) = \big(y, \psi(\underline{y})\big)$. Donc F^{-1} est bien de la forme souhaitée.

En différentiant la relation $F \circ F^{-1} = \mathrm{Id}$, on obtient pour tout $\underline{y} \in V$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Id} &= D_{F^{-1}(\underline{y})}F \circ D_{\underline{y}}F^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ \partial_1\varphi(F^{-1}(\underline{y})) & \dots & \partial_{n-1}\varphi(F^{-1}(\underline{y})) & \partial_n\varphi(F^{-1}(\underline{y})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ \partial_1\psi(\underline{y}) & \dots & \partial_{n-1}\psi(\underline{y}) & \partial_n\psi(\underline{y}) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On tire de la dernière ligne de cette égalité matricielle que φ et ψ vérifient les équations suivantes pour tout $\underline{y} \in V$:

$$\begin{cases} \partial_1\varphi(F^{-1}(\underline{y})) + \partial_n\varphi(F^{-1}(\underline{y}))\partial_1\psi(\underline{y}) = 0 \\ \dots \\ \partial_{n-1}\varphi(F^{-1}(\underline{y})) + \partial_{n-1}\varphi(F^{-1}(\underline{y}))\partial_n\psi(\underline{y}) = 0 \\ \partial_n\varphi(F^{-1}(\underline{y}))\partial_n\psi(\underline{y}) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \partial_1\psi(\underline{y}) = -\frac{\partial_1\varphi(F^{-1}(\underline{y}))}{\partial_n\varphi(F^{-1}(\underline{y}))} \\ \dots \\ \partial_{n-1}\psi(\underline{y}) = -\frac{\partial_{n-1}\varphi(F^{-1}(\underline{y}))}{\partial_n\varphi(F^{-1}(\underline{y}))} \\ \partial_n\psi(\underline{y}) = \frac{1}{\partial_n\varphi(F^{-1}(\underline{y}))} \end{cases}.$$

Donc finalement $\partial_n\psi = \frac{1}{\partial_n\varphi\circ F^{-1}}$ et pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\partial_i\psi = -\frac{\partial_i\varphi\circ F^{-1}}{\partial_n\varphi\circ F^{-1}}$.

4. Notons $W = \{x \in U \mid (x, 0) \in V\}$ et $h : W \to]a, b[$ la fonction définie par $h : x \mapsto \psi(x, 0)$. Montrer que W est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et que $\partial\Omega \cap (U \times]a, b[)$ est le graphe de h.
   Soit $x \in W$, comme V est ouvert de $\mathbb{R}^n$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(x, 0) \in B(x, \varepsilon)\times]-\varepsilon, \varepsilon[\subset V$, où on a noté $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et rayon r. Donc $B(x, \varepsilon) \subset W$. Donc W est voisinage de tous ses points, donc est ouvert.
   Si $x \in W$ alors $(x, 0) \in V$ et donc $h(x) = \psi(x, 0)$ est bien défini. Soit $\underline{x} \in U\times]a, b[$, on a :

$$\begin{aligned} \underline{x} \in \partial\Omega \iff \varphi(\underline{x}) = 0 \iff F(\underline{x}) = (x, 0) &\iff \begin{cases} (x, 0) \in V \\ \underline{x} = F^{-1}(x, 0) \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x \in W \\ x_n = \psi(x, 0) = h(x) \end{cases} &\iff \underline{x} \in \big\{(y, h(y)) \bigm| y \in W\big\} \end{aligned}$$

5. Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ telle que $\mathrm{supp}(f) \subset U\times]a, b[$. Montrer que :

$$\int_{\underline{x}\in\partial\Omega} f(\underline{x})\,\mathrm{d}\sigma(\underline{x}) = \int_{x\in W} f(x, h(x))\sqrt{1 + \|\nabla_x h\|^2}\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

   Soit $\varepsilon > 0$, comme f est nulle hors de $U\times]a, b[$,

$$I_\varepsilon = \int_{\{\underline{x}\in\mathbb{R}^n \mid -\varepsilon<\varphi(\underline{x})<0\}} f(\underline{x})\|\nabla_{\underline{x}}\varphi\|\,\mathrm{d}\underline{x} = \int_{\underline{x}\in U\times]a,b[} f(\underline{x})\|\nabla_{\underline{x}}\varphi\|\mathbf{1}_{]-\varepsilon,0[}(\varphi(\underline{x}))\,\mathrm{d}\underline{x}.$$

   On peut alors faire le changement de variable $\underline{x} = F^{-1}(\underline{y})$ qui nous donne :

$$I_\varepsilon = \int_{\underline{y}\in V} f(F^{-1}(\underline{y}))\|\nabla_{F^{-1}(\underline{y})}\varphi\|\left|\det\left(D_{\underline{y}}F^{-1}\right)\right|\mathbf{1}_{]-\varepsilon,0[}(y_n)\,\mathrm{d}\underline{y}.$$

   Notons $K = F(\mathrm{supp}(f))$. Comme F est continue et $\mathrm{supp}(f) \subset U\times]a, b[$ est compact, $K \subset V$ est bien défini et compact. On a donc $d(K, \mathbb{R}^n \setminus V) > 0$. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$g : \underline{y} \longmapsto \begin{cases} f(F^{-1}(\underline{y}))\|\nabla_{F^{-1}(\underline{y})}\varphi\|\left|\det\left(D_{\underline{y}}F^{-1}\right)\right|, & \text{si } \underline{y} \in V \\ 0 & \text{si } \underline{y} \notin K. \end{cases}$$

Cette fonction est bien définie car le deux définitions coïncident sur $V \setminus K$, où $f(F^{-1}(\underline{y})) = 0$, et $\mathrm{supp}(g) \subset K$. De plus, g est $\mathcal{C}^0$ sur les ouverts V et $\mathbb{R}^n \setminus K$, donc sur $V \cup (\mathbb{R}^n \setminus K) = \mathbb{R}^n$. Donc

$$I_\varepsilon = \int_{\underline{y} \in V} g(\underline{y}) \mathbf{1}_{]-\varepsilon,0[}(y_n)\,\mathrm{d}\underline{y} = \int_{\mathbb{R}^n} g(\underline{y}) \mathbf{1}_{]-\varepsilon,0[}(y_n)\,\mathrm{d}\underline{y} = \int_{C\times]-\varepsilon,0[} g(\underline{y})\,\mathrm{d}\underline{y},$$

où C est un compact tel que $K \subset C \times \mathbb{R}$, par exemple la projection de K sur le premier facteur dans $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. La fonction g est continue, donc bornée sur $C \times [-\varepsilon, 0]$, donc intégrable sur $C\times] - \varepsilon, 0[$. Donc, par Fubini :

$$I_\varepsilon = \int_{-\varepsilon}^{0} \int_C g(y,t)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

De plus, le théorème de continuité des intégrales à paramètre montre que $t \mapsto \int_C g(y,t)\,\mathrm{d}y$ est continue sur $] - 1, 1[$, en dominant par $\|g\|_{\infty, C\times[-1,1]}$. Donc

$$\int_{\underline{x} \in \partial\Omega} f(\underline{x})\,\mathrm{d}\sigma(\underline{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} I_\varepsilon = \int_C g(y,0)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(y,0)\,\mathrm{d}y.$$

Si $y \notin W$, alors $(y, 0) \notin V$, donc $(y, 0) \notin K$ et $g(y, 0) = 0$. Donc finalement on peut restreindre l'intégrale à W. Soient $y \in W$ et $\underline{y} = (y, 0)$, les calculs de la question 3 montrent que :

$$\begin{aligned}\left\|\nabla_{F^{-1}(\underline{y})}\varphi\right\|^2 \left|\det\left(D_{\underline{y}}F^{-1}\right)\right|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \partial_i\varphi(F^{-1}(\underline{y}))^2 \partial_n\psi(\underline{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial_i\varphi(F^{-1}(\underline{y}))^2}{\partial_n\varphi(F^{-1}(\underline{y}))^2} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i\psi((\underline{y}))^2.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}g(y,0) = f(F^{-1}(y,0))\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i\psi((y,0))^2} &= f(y,\psi(y,0))\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i\psi((y,0))^2} \\ = f(y,h(y))\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i h(y)^2} &= f(y,h(y))\sqrt{1 + \|\nabla_y h\|^2}.\end{aligned}$$

Finalement

$$\int_{\underline{x} \in \partial\Omega} f(\underline{x})\,\mathrm{d}\sigma(\underline{x}) = \int_{x \in W} f(x, h(x))\sqrt{1 + \|\nabla_x h\|^2}\,\mathrm{d}x.$$

6. Soit $\mathbb{S}^{n-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}^n)$ tel que $\mathrm{supp}(f) \subset \mathbb{R}^{n-1}\times]0, +\infty[$, montrer que

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\underline{x})\,\mathrm{d}\sigma(\underline{x}) = \int_{\|x\|<1} \frac{f\left(x, \sqrt{1 - \|x\|^2}\right)}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Comme $\mathrm{supp}(f)$ est compact dans $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, il existe $b > 1$ tel que $\mathrm{supp}(f) \subset \mathbb{R}^{n-1}\times]0, b[$. La sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ est le bord de la boule unité, qui est un domaine $\mathcal{C}^\infty$ définit par la fonction $\varphi : x \mapsto \|x\|^2 - 1 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1$. Pour tout $\underline{x} \in \mathbb{R}^{n-1}\times]0, b[$ on a $\partial_n\varphi(\underline{x}) = 2x_n > 0$. On est donc dans un cas particulier des questions précédentes, et il s'agit d'expliciter W et h.

On a vu dans la question 4 que $\mathbb{S}^{n-1} \cap \left(\mathbb{R}^{n-1} \times]0, b[\right)$ doit être le graphe de $h : W \to \mathbb{R}$. En particulier, cela impose que W est la projection de $\mathbb{S}^{n-1} \cap \left(\mathbb{R}^{n-1} \times]0, b[\right)$ sur $\mathbb{R}^{n-1}$, c'est-à-dire $W = \left\{x \in \mathbb{R}^{n-1} \;\middle|\; \|x\| < 1\right\}$ est la boule unité de $\mathbb{R}^{n-1}$. De plus, pour tout $x \in W$, $h(x)$ est l'unique réel positif tel que $(x, h(x)) \in \mathbb{S}^{n-1}$, c'est-à-dire satisfaisant $\|x\|^2 + h(x)^2 = 1$. Donc $h : x \mapsto \sqrt{1 - \|x\|^2}$. Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\partial_i h : x \mapsto \frac{-x_i}{\sqrt{1-\|x\|^2}}$, donc $\nabla h : x \mapsto \frac{-x}{\sqrt{1-\|x\|^2}}$. D'où

$$1 + \|\nabla_x h\|^2 = 1 + \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|^2} = \frac{1}{1 - \|x\|^2}.$$

Finalement, en appliquant la formule (2) dans ce cas, on obtient bien le résultat souhaité.

Exercice 2 (Longueur d'arc)**.** On note $\mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|x\| < 1\right\}$ le disque unité de $\mathbb{R}^2$. On considère $\Omega = F(\mathbb{D})$, où $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme. En particulier, $\partial\Omega = F(\mathbb{S}^1)$ est une courbe fermée simple et $\overline{\Omega} = F(\overline{\mathbb{D}})$ est compact.

1. Montrer que Ω est un domaine $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$.

   Le disque unité est un domaine $\mathcal{C}^\infty$ définit par la fonction $\varphi_0 : x \mapsto \|x\|^2 - 1$, par exemple. Soit $x \in \mathbb{R}^2$, on a $x \in \Omega \iff x \in F(\mathbb{D}) \iff F^{-1}(x) \in \mathbb{D} \iff \varphi_0(F^{-1}(x)) < 0$. Donc $\Omega = \varphi^{-1}(]-\infty, 0[)$, où $\varphi = \varphi_0 \circ F^{-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$.

   Soit $x \in \partial\Omega = \varphi^{-1}(0)$, on a $F^{-1}(x) \in \mathbb{S}^1$, donc $\nabla_{F^{-1}(x)}\varphi_0 \neq 0$, c'est-à-dire $D_{F^{-1}(x)}\varphi_0 \neq 0$. On a $D_x\varphi = D_{F^{-1}(x)}\varphi_0 \circ D_x F^{-1}$. Comme $D_x F^{-1}$ est inversible, si $D_x\varphi = 0$ alors $D_{F^{-1}(x)}\varphi_0 = 0$, ce qui est absurde. Donc $D_x\varphi \neq 0$, i.e. $\nabla_x\varphi \neq 0$. Donc φ est une fonction définissante et Ω est bien un domaine $\mathcal{C}^\infty$.

2. Montrer que $\partial\Omega$ admet un *paramétrage régulier*. C'est-à-dire qu'il existe $L > 0$ et $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ L-périodique et $\mathcal{C}^\infty$ tels que : $\gamma_{|[0,L[}$ est injective ; $\gamma(\mathbb{R}) = \partial\Omega$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\gamma'(t) \neq 0$.

   On part d'un paramétrage du cercle. Posons $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ défini par $\gamma : t \mapsto F(\cos(t), \sin(t))$. Cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique. On a $\gamma(\mathbb{R}) = F(\mathbb{S}^1) = \partial\Omega$. Soient $s, t \in [0, 2\pi[$, si $\gamma(s) = \gamma(t)$ alors $(\cos(s), \sin(s)) = (\cos(t), \sin(t))$ car F est injective et donc $s = t$. Donc $\gamma_{|[0,2\pi[}$ est injective. Enfin, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma'(t) = D_{(\cos(t),\sin(t))}F \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$. Comme $D_{(\cos(t),\sin(t))}F$ est injective, on a bien $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Dans la suite on se fixe une fonction définissante φ de Ω et un paramétrage régulier $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ de $\partial\Omega$. Le but est alors d'exprimer localement la mesure superficielle $\mathrm{d}\sigma$ de $\partial\Omega$ en fonction de γ.

3. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, supposons par exemple que $\gamma_1'(t_0) \neq 0$. Montrer que $\partial_2\varphi(\gamma(t_0)) \neq 0$.

   Comme $\gamma(\mathbb{R}) = \partial\Omega = \varphi^{-1}(0)$ on a $\varphi \circ \gamma = 0$. En dérivant en t_0, on obtient que

   $$\partial_1\varphi(\gamma(t_0))\gamma_1'(t_0) + \partial_2\varphi(\gamma(t_0))\gamma_2'(t_0) = 0.$$

   Par l'absurde, si on avait $\partial_2\varphi(\gamma(t_0)) = 0$ alors on aurait $\partial_1\varphi(\gamma(t_0))\gamma_1'(t_0) = 0$ et donc $\partial_1\varphi(\gamma(t_0)) = 0$. Mais alors on aurait $\nabla_{\gamma(t_0)}\varphi = 0$, ce qui est absurde puisque $\gamma(t_0) \in \partial\Omega$. Donc $\partial_2\varphi(\gamma(t_0)) \neq 0$.

4. Montrer qu'il existe I et J deux intervalles ouverts, $h : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\gamma(]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[) = \partial\Omega \cap (I \times J) = \{(s, h(s)) \mid s \in I\}$.

   On vient de montrer que $\partial_2\varphi(\gamma(t_0)) \neq 0$. Quitte à renverser le deuxième axe de coordonnée, on peut supposer $\partial_2\varphi(\gamma(t_0)) > 0$. Par continuité de $\partial_2\varphi$, il existe U et J deux intervalles ouverts tels que $\gamma(t_0) \in U \times J$ et, pour tout $x \in U \times J$, $\partial_2\varphi(x) > 0$.

   On a vu dans l'exercice 1, voir notamment la question 4, qu'il existe alors $W \subset U$ ouvert et $h : W \to J$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que $\partial\Omega \cap (U \times J)$ soit le graphe de h. Comme $\gamma(t_0) \in \partial\Omega \cap (U \times J)$ on a $\gamma(t_0) \in W \times J$, et par continuité il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma(]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[) \subset W \times J$.

Notons $I = \gamma_1(]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[) \subset W$. Soit $t \in]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$, alors $\gamma(t) \in \partial\Omega \cap (W \times J)$ et $\gamma_1(t) \in I$, donc en fait $\gamma(t) \in \partial\Omega \cap (I \times J)$. Donc $\gamma(]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[) \subset \partial\Omega \cap (I \times J)$.

Soit $x \in \partial\Omega \cap (I \times J) \subset \partial\Omega \cap (U \times J)$. Par définition de W et h, il existe un unique $s \in W$ tel que $x = (s, h(s))$. Nécessairement $s \in I$. Donc $\partial\Omega \cap (I \times J) \subset \{(s, h(s)) \mid s \in I\}$.

Soit $s \in I$, il existe $t \in]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$ tel que $s = \gamma_1(t)$. Alors $\gamma(t) \in \partial\Omega \cap (W \times J)$, et cet ensemble est le graphe de h. Donc $\gamma_2(t) = h(\gamma_1(t)) = h(s)$ et donc $(s, h(s)) = \gamma(t)$. Donc finalement, $\{(s, h(s)) \mid s \in I\} \subset \gamma(]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[)$. On a donc

$$\gamma(]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[) \subset \partial\Omega \cap (I \times J) \subset \{(s, h(s)) \mid s \in I\} \subset \gamma(]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[),$$

d'où l'égalité entre ces trois ensembles.

5. Montrer que $\gamma_2 = h \circ \gamma_1$ sur $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$. En déduire que γ_1 réalise un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$ sur I.

   Soit $t \in]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$, par le point précédent il existe $s \in I$ tel que $(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (s, h(s))$. On a donc $s = \gamma_1(s)$ et donc $\gamma_2(t) = h(s) = h(\gamma_1(t))$. Donc $\gamma_2 = h \circ \gamma_1$ sur $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$.

   En dérivant cette relation, pour tout $t \in]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$, $\gamma_2'(t) = h'(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)$. Si $\gamma_1'(t) = 0$ alors $\gamma_2'(t) = 0$ et $\gamma'(t) = 0$, ce qui est absurde. Donc γ_1' ne s'annule pas sur $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$. Donc γ_1 réalise un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$ vers son image, qui est I.

6. Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^2)$ telle que $\mathrm{supp}(f) \subset I \times J$, montrer que

$$\int_{x\in\partial\Omega} f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

   On est dans le cadre d'application de la formule (2), prouvée dans la question 5 de l'exercice 1. Avec les notations de la question précédente, on a

$$\int_{x\in\partial\Omega} f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = \int_{s\in W} f(s,h(s))\sqrt{1+|h'(s)|^2}\,\mathrm{d}s = \int_{s\in I} f(s,h(s))\sqrt{1+|h'(s)|^2}\,\mathrm{d}s,$$

   car $f(s, h(s)) = 0$ si $s \notin I$. On fait maintenant le changement de variable $s = \gamma_1(t)$ qui donne

$$\begin{aligned}\int_{x\in\partial\Omega} f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) &= \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(\gamma_1(t), h(\gamma_1(t)))\sqrt{1+|h'(\gamma_1(t))|^2}|\gamma_1'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)))\sqrt{\gamma_1'(t)^2+\gamma_2'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

   en utilisant les relations prouvées à la question 5.

On peut en fait montrer, avec un peu plus d'efforts, que si γ est un paramétrage régulier L-périodique de $\partial\Omega$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$ on a :

$$\int_{x\in\partial\Omega} f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = \int_t^{t+L} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Notamment le terme de droite dans (3) ne dépend ni du paramétrage γ ni de t, et la *longueur d'arc* de $\partial\Omega$ est $\int_{x\in\partial\Omega}\mathrm{d}\sigma(x) = \int_t^{t+L}\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$. On admet ce résultat dans la suite.

7. Dans cette question on suppose pour simplifier que le paramétrage régulier γ parcourt $\partial\Omega$ dans le sens trigonométrique. Soient u et v deux fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_0^L u(\gamma(t))\gamma_2'(t) - v(\gamma(t))\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\Omega \partial_1 u(x) + \partial_2 v(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

On va se ramener à utiliser la formule de la divergence. Au point de paramètre $t \in [0, L[$, la tangente à $\partial\Omega$ est dirigée par $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$. Alors $(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$ est un vecteur normal à $\partial\Omega$, et il est sortant de Ω car on a supposé que γ parcourt $\partial\Omega$ dans le sens trigonométrique. Le vecteur normal unitaire sortant de Ω en $\gamma(t)$ est donc $\nu(\gamma(t)) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$.

Notons $X = \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$, de sorte que $\mathrm{Div}(X) = \partial_1 u + \partial_2 v$. Avec ces notations, la formule (3) donne :

$$\begin{aligned}\int_0^L u(\gamma(t))\gamma_2'(t) - v(\gamma(t))\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^L X(\gamma(t)) \cdot \nu(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{x \in \partial\Omega} X(x) \cdot \nu(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = \int_\Omega \mathrm{Div}(X)(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \partial_1 u(x) + \partial_2 v(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Exercice 3 (Inégalité isopérimétrique)**.** On se place dans le même cadre que dans l'exercice 2. On considère un domaine $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphe à un disque, noté Ω. Notons A l'aire de Ω, i.e. sa mesure de Lebesgue, et ℓ la longueur d'arc de $\partial\Omega$, au sens de la formule (3). Le but de cet exercice est de prouver l'*inégalité isopérimétrique* : $4\pi A \leqslant \ell^2$ et d'étudier le cas d'égalité, via les séries de Fourier.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ telle que $\widehat{f}(0) = 0$, montrer que $2\pi\|f\|_2 \leqslant \|f'\|_2$. Étudier le cas d'égalité.

   Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\widehat{f'}(k) = 2i\pi k\widehat{f}(k)$. Donc, par Parseval,

   $$\|f'\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f'}(k)\right|^2 = 4\pi^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} k^2 \left|\widehat{f}(k)\right|^2 \geqslant 4\pi^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \left|\widehat{f}(k)\right|^2. \qquad \text{(i)}$$

   Comme $\widehat{f}(0) = 0$, le terme de droite est égal à $4\pi^2\|f\|_2^2$ par l'égalité de Parseval. Cela établit le résultat souhaité.

   On a obtenu l'inégalité (i) en utilisant le fait que $\left|\widehat{f}(k)\right|^2 \leqslant k^2\left|\widehat{f}(k)\right|^2$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$. On aura égalité dans (i) si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$,

   $$\left|\widehat{f}(k)\right|^2 = k^2\left|\widehat{f}(k)\right|^2 \iff (k^2-1)\left|\widehat{f}(k)\right|^2 = 0 \iff k \in \{-1; 1\} \text{ ou } \widehat{f}(k) = 0.$$

   On a donc égalité dans (i) si et seulement si il existe A_{-1} et $A_1 \in \mathbb{C}$ tels que $f = A_{-1}e_{-1} + A_1 e_1$.

2. En déduire que si f et $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ sont à valeurs réelles, alors l'inégalité (5) est satisfaite. Étudier le cas d'égalité.

   $$4\pi \int_\mathbb{T} f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_\mathbb{T} f'(t)^2 + g'(t)^2\,\mathrm{d}t. \qquad (5)$$

   Soit $h = f - \widehat{f}(0)$. On a d'une part $h' = f'$, et d'autre part

   $$\int_\mathbb{T} f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t - \int_\mathbb{T} h(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \widehat{f}(0)\int_0^1 g'(t)\,\mathrm{d}t = \widehat{f}(0)(g(1) - g(0)) = 0.$$

   Pour tout $t \in \mathbb{T}$ on a :

   $$h'(t)^2 + g'(t)^2 - 4\pi h(t)g'(t) = \big(g'(t) - 2\pi h(t)\big)^2 + h'(t)^2 - 4\pi^2 h(t)^2.$$

   Donc

   $$\begin{aligned}\int_\mathbb{T} f'(t)^2 + g'(t)^2\,\mathrm{d}t - 4\pi\int_\mathbb{T} f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_\mathbb{T} h'(t)^2 + g'(t)^2\,\mathrm{d}t - 4\pi\int_\mathbb{T} h(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_\mathbb{T}\big(g'(t) - 2\pi h(t)\big)^2\,\mathrm{d}t + \big(\|h'\|_2^2 - 4\pi^2\|h\|_2^2\big) \\ &\geqslant \big(\|h'\|_2^2 - 4\pi^2\|h\|_2^2\big).\end{aligned}$$

D'après la question 1 appliquée à h le dernier terme est positif, ce qui établit l'inégalité (5).
On a égalité dans l'équation (5) si et seulement si, d'une part h est dans le cas d'égalité de la question 1, et d'autre part

$$\int_{\mathbb{T}} \big(g'(t) - 2\pi h(t)\big)^2 \,\mathrm{d}t = 0.$$

D'après la question 1, la première condition est équivalente à l'existence de A_{-1}, A_0 et $A_1 \in \mathbb{C}$ tels que $f = A_{-1}e_{-1} + A_0 + A_1 e_1$. Comme de plus $f = \overline{f}$, on a $A_{-1} = \overline{A_1}$ et $A_0 \in \mathbb{R}$. Ainsi, il existe $A_0 \in \mathbb{R}$ et $A_1 \in \mathbb{C}$ tels que $f = A_0 + A_1 e_1 + \overline{A_1} e_{-1}$.
La seconde condition est équivalente à $g' = 2\pi h$. Cela est équivalent au fait que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \qquad 2\pi \widehat{f}(k) = 2\pi \widehat{h}(k) = \widehat{g'}(k) = 2i\pi k \widehat{g}(k).$$

Le sens direct découle de la définition des coefficients de Fourier. Le sens réciproque repose sur le fait que si g' et $2\pi h$ ont les mêmes coefficients de Fourier alors elles sont égales (injectivité de l'application qui à une fonctions de $L^1(\mathbb{T})$ associe la suite ses coefficients de Fourier).
Sous les conditions précédentes, on obtient $\widehat{g}(1) = -i\widehat{f}(1) = -iA_1$, $\widehat{g}(-1) = i\widehat{f}(1) = i\overline{A_1}$ et $\widehat{g}(k) = 0$ si $|k| \geqslant 2$. Comme g est à valeurs réelles on a de plus $\widehat{g}(0) \in \mathbb{R}$.
Finalement, on a égalité dans l'équation (5) si et seulement si il existe $A_0 \in \mathbb{R}$, $B_0 \in \mathbb{R}$ et $A_1 \in \mathbb{C}$ tels que :

$$f = \overline{A_1} e_{-1} + A_0 + A_1 e_1 \qquad \text{et} \qquad g = i\overline{A_1} e_{-1} + B_0 - iA_1 e_1. \tag{ii}$$

On cherche désormais à prouver que $4\pi A \leqslant \ell^2$. Soient $L > 0$ et $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ un paramétrage régulier L-périodique de $\partial\Omega$ tel que $\gamma_{|[0,L[}$ est injectif.

3. Argumenter qu'on peut se ramener à la situation suivante :
   - le paramétrage γ parcourt $\partial\Omega$ dans le sens trigonométrique ;
   - la plus petite périodicité du paramétrage est $L = 1$.
   - la longueur d'arc de $\partial\Omega$ est $\ell = 1$;
   - γ est un *paramétrage par longueur d'arc* de $\partial\Omega$, c'est-à-dire $\forall t \in \mathbb{T}$, $\|\gamma'(t)\| = 1$.

   Si γ parcourt $\partial\Omega$ dans le sens horaire, il suffit de changer γ en $t \mapsto \gamma(-t)$ pour obtenir un paramétrage régulier qui parcourt $\partial\Omega$ dans le sens trigonométrique.
   Si γ est un paramétrage régulier dont la plus petite période est L, alors $t \mapsto \gamma(tL)$ est un paramétrage régulier dont la plus petite période est 1. Dans la suite on suppose donc $L = 1$.
   Soit $\lambda > 0$. Si on applique une homothétie de rapport λ à $\mathbb{R}^2$, alors $\lambda\Omega$ est un domaine $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphe à un disque, et d'aire $\widetilde{A} = \lambda^2 A$. Son bord est la courbe $\lambda\partial\Omega$, difféomorphe à un cercle, qui est de longueur $\widetilde{l} = \lambda\ell$. En effet, l'application $\lambda\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est un paramétrage régulier 1-périodique de $\lambda\partial\Omega$ et donc

$$\widetilde{\ell} = \int_0^1 \|\lambda\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^1 \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t = \lambda\ell.$$

   On a donc $4\pi A \leqslant \ell^2$ si et seulement si $4\pi\widetilde{A} \leqslant \widetilde{\ell}^2$. En utilisant ceci avec $\lambda = \frac{1}{\ell}$, on voit qu'on peut se ramener au cas où $\ell = 1$. On suppose désormais que $\ell = 1$.
   Comme γ est un paramétrage régulier, l'application $\psi : t \mapsto \int_0^t \|\gamma'(s)\| \,\mathrm{d}s$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et de dérivée strictement positive. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\psi(t+1) = \int_0^t \|\gamma'(s)\| \,\mathrm{d}s + \int_t^{t+1} \|\gamma'(s)\| \,\mathrm{d}s = \psi(t) + \int_0^1 \|\gamma'(s)\| \,\mathrm{d}s = \psi(t) + \ell = \psi(t) + 1.$$

En particulier, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\psi(k) = k$ et $\psi(t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} \pm\infty$. Donc ψ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Notons $\varphi = \psi^{-1}$. Soit $s \in \mathbb{R}$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $s = \psi(t)$. D'après l'équation précédente, on a donc

$$\varphi(s+1) = \varphi(\psi(t)+1) = \varphi \circ \psi(t+1) = t+1 = \varphi(s)+1.$$

Soit $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ qui est $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a

$$\widetilde{\gamma}(s+1) = \gamma(\varphi(s+1)) = \gamma(\varphi(s)+1) = \gamma \circ \varphi(s) = \widetilde{\gamma}(s).$$

Donc $\widetilde{\gamma}$ est 1-périodique. On a $\widetilde{\gamma}(\mathbb{R}) = \gamma(\mathbb{R}) = \partial\Omega$. Comme $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$ on a $\varphi([0,1[) = [0,1[$, et $\widetilde{\gamma}_{[0,1[} = \gamma_{[0,1[} \circ \varphi_{[0,1[}$ est injective comme composée de fonction injective. Enfin, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\|\widetilde{\gamma}'(t)\| = \|\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)\| = \frac{\|\gamma'(\varphi(t))\|}{|\psi'(\varphi(t))|} = 1.$$

Quitte à remplacer γ par $\widetilde{\gamma}$, on peut supposer que γ est un paramétrage par longueur d'arc.

Dans la suite, on suppose que les quatre conditions de la question 3 sont vérifiées.

4. Montrer que $A = \displaystyle\int_0^1 \gamma_1(t)\gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide de la formule (4).

   On applique la formule (4) de l'exercice 2 avec $u : (x_1, x_2) \mapsto x_1$ et $v : (x_1, x_2) \mapsto 0$. Comme on a supposé que γ parcourt $\partial\Omega$ dans le sens trigonométrique, il vient :

$$A = \int_\Omega \mathrm{d}x = \int_\Omega \partial_1 u(x) + \partial_2 v(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u(\gamma(t))\gamma_2'(t) - v(\gamma(t))\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \gamma_1(t)\gamma_2'(t).$$

5. Conclure que $4\pi A \leqslant \ell^2$. Étudier le cas d'égalité.

   Rappelons qu'on est dans le cas $L = 1$. En particulier γ est 1-périodique et on peut traiter γ_1 et γ_2 par les séries de Fourier. D'après les questions 2 et 4, on a :

$$4\pi A = 4\pi \int_0^1 \gamma_1(t)\gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2\,\mathrm{d}t.$$

   Comme on a supposé que γ est un paramétrage par longueur d'arc et que $\ell = 1$ on a :

$$\int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2\,\mathrm{d}t = 1 = \ell^2,$$

   ce qui établit l'inégalité isopérimétrique.

   Étudions le cas d'égalité. Il y a égalité dans l'inégalité isopérimétrique si et seulement si on a égalité dans (5) pour γ_1 et γ_2. D'après la question 2, c'est le cas si et seulement si γ_1 et γ_2 sont de la forme (ii). En identifiant $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$ de façon canonique, on a dans ce cas :

$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 = A_0 + iB_0 + 2A_1 e_1.$$

   Remarquons que $A_1 \neq 0$ sinon γ serait constante. On note $z = A_0 + iB_0 \in \mathbb{C}$ et on écrit $2A_1$ sous forme polaire : $2A_1 = Re^{2i\pi\theta}$ avec $R > 0$ et $\theta \in [0,1[$. Alors $\gamma : t \mapsto z + Re^{2i\pi(\theta+t)}$ et $\partial\Omega$ est le cercle de centre z et de rayon R. Nos conditions de normalisation imposent que $R = \frac{1}{2\pi}$. Finalement, on a montré qu'il y a égalité dans l'inégalité isopérimétrique si et seulement si Ω est un disque euclidien.

Exercice 4 (Divergence et volumes)**.** Soient $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteur $\mathcal{C}^\infty$ et Φ son flot, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(\cdot, x)$ est la solution de l'équation différentielle $y' = X(y)$ telle que $y(0) = x$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine $\mathcal{C}^\infty$ inclus dans la boule $B(0, R)$ de centre 0 et de rayon $R > 0$.

1. Justifier qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que Φ soit bien défini et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\varepsilon, \varepsilon[\times B(0, 2R)$.

   Comme le champ X est $\mathcal{C}^\infty$ il est en particulier localement lipschitzien et on est bien dans les conditions d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy $y' = X(y)$ avec condition initiale $y(0) = x$, et cette solution est définie sur un intervalle ouvert.

   En fait, on sait que Φ est bien défini sur un ouvert de $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ contenant $\{0\} \times \mathbb{R}^n$. De plus comme X est $\mathcal{C}^\infty$ alors Φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur U. L'ensemble $K = \{0\} \times \overline{B(0, 2R)}$ est compact et inclus dans U. Soit $\varepsilon > 0$ la distance de K au fermé disjoint $\mathbb{R}^n \setminus U$. Si $(t, x) \in]-\varepsilon, \varepsilon[\times B(0, 2R)$ alors $d((t, x), K) \leqslant |t| < \varepsilon$ et donc $(t, x) \in U$. Donc Φ est bien défini et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\varepsilon, \varepsilon[\times B(0, 2R) \subset U$.

2. Soit $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ on note $\Phi_t = \Phi(t, \cdot)$ et $\Omega_t = \Phi_t(\Omega)$. Vérifier que $V(t) = \mathrm{Vol}(\Omega_t)$ est bien défini et l'exprimer sous forme d'une intégrale sur Ω.

   Les propriétés du flot montrent que sur l'ensemble $\Phi_t(B(0, 2R))$ l'application Φ_{-t} est bien définie et que $\Phi_{-t} \circ (\Phi_t)_{|B(0,2R)} = \mathrm{Id}_{|B(0,2R)}$. Donc $\Phi_t : B(0, 2R) \to \Phi_t(B(0, 2R))$ est une bijection $\mathcal{C}^\infty$ de réciproque Φ_{-t} également $\mathcal{C}^\infty$, i.e. c'est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

   Comme $\Omega \subset \overline{B(0, R)} \subset B(0, 2R)$, on a $\Omega_t = \Phi_t(\Omega) \subset \Phi_t(\overline{B(0, R)})$ et le dernier ensemble est compact donc de volume fini. Donc $V(t)$ est bien défini. Ensuite, par le changment de variable $x = \Phi_t(y)$ on obtient :

   $$V(t) = \int_{\Omega_t} \mathrm{d}x = \int_{\Phi_t(\Omega)} \mathrm{d}x = \int_{\Omega} |\det(D_y\Phi_t)| \,\mathrm{d}y.$$

   On peut remarquer que $(s, y) \mapsto \det(D_y\Phi_s)$ est $\mathcal{C}^\infty$ par régularité du flot. Cette fonction ne s'annule pas donc est de signe constant. Comme Φ_0 est l'identité de $\mathbb{R}^n$ ce déterminant est toujours positif. Finalement,

   $$V(t) = \int_{\Omega} \det(D_y\Phi_t) \,\mathrm{d}y.$$

Dans la suite, pour une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ on notera ∂_0 la dérivée partielle par rapport à la variable dans le facteur $\mathbb{R}$ et $\partial_1, \ldots, \partial_n$ les dérivées partielles par rapport aux variables dans le facteur $\mathbb{R}^n$.

3. Montrer que V est dérivable sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$.

   Soit $x \in \Omega$ et $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, la matrice de $D\Phi_t$ en x est $M(t, x) = (\partial_j\Phi_i(t, x))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et cette matrice dépend de façon $\mathcal{C}^\infty$ de (t, x) puisque Φ est $\mathcal{C}^\infty$. Le déterminant étant polynomial, la fonction $F(t, x) \mapsto \det(M(t, x))$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U. Et on a $V : t \mapsto \int_\Omega F(t, x) \,\mathrm{d}x$ d'après la question 2.

   Soit $\alpha \in]0, \varepsilon[$. La fonction $\partial_0 F$ est continue sur U. Elle est donc bornée par une constante $C \geqslant 0$ sur le compact $\overline{B(0, R)} \times [-\alpha, \alpha]$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres sur $]-\alpha, \alpha[$ est dominant $\partial_0 F$ par C. Comme c'est valable pour tout $\alpha \in]0, \varepsilon[$, on en déduit que V est dérivable sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et de plus :

   $$V' : t \mapsto \int_\Omega \partial_0 F(t, x) \,\mathrm{d}x.$$

4. Exprimer $V'(0)$ en fonction du champ de vecteur X.

   Vue la formule précédente, il s'agit de calculer $\partial_0 F(0,x)$ pour tout $x \in \Omega$. Soit $x \in \Omega$, par la règle de la chaine,

$$\partial_0 F(0,x) = D_{(0,x)}(\det \circ M) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = D_{M(0,x)} \det \circ D_{(0,x)} M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = D_{M(0,x)} \det \cdot \partial_0 M(0,x).$$

   D'une part $M(0,x)$ est la matrice de la différentielle en x de $\Phi_0 = \mathrm{Id}$. Donc $M(0,x) = \mathrm{Id}$ et $D_{M(0,x)} \det = \mathrm{Tr}$. Donc $\partial_0 F(0,x) = \mathrm{Tr}(\partial_0 M(0,x))$. La j-ème colonne de M est $\partial_j \Phi$. Donc la j-ème colone de $\partial_0 M$ est $\partial_0 \partial_j \Phi = \partial_j \partial_0 \Phi = \partial_j (X \circ \Phi)$.

   Comme $\Phi(0,\cdot)$ est l'identité, $\partial_j (X \circ \Phi)(0,x)$ est la j-ème dérivée partielle évaluée en x de $X \circ \Phi(0,\cdot) = X$. La j-ème colonne de $\partial_0 M(0,x)$ est donc $\partial_j X(x)$. En notant $X = (X_1, \ldots, X_n)$, on a donc $\partial_0 M(0,x) = (\partial_j X_i(x))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et donc $\partial_0 F(0,x) = \mathrm{Tr}(\partial_0 M(0,x)) = \mathrm{Div}(X)(x)$.

   Finalement, on obtient $V'(0) = \int_\Omega \mathrm{Div}(X)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} X(x) \cdot \nu(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)$, où ν la normale unitaire sortante de Ω et $\mathrm{d}\sigma$ sa mesure superficielle.

   Remarque. Comme c'est valable pour tout domaine Ω sympathique, on voit donc que la divergence de X traduit la façon dont le flot de X modifie les volumes, ce qui s'interprète aussi naturellement sur la seconde formule.

5. On suppose dans cette question que $X = \nabla f$ où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est sous-harmonique. Montrer que $V'(0) \geqslant 0$.

   Avec l'expression précédente, on a $V'(0) = \int_\Omega \mathrm{Div}(\nabla_x f)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \Delta f(x)\,\mathrm{d}x$. Comme f est sous-harmonique l'intégrande est positive. Donc $V'(0) \geqslant 0$.

6. Donner un exemple simple de fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sous-harmonique, calculer son flot gradient, et vérifier qu'il augmente bien les volumes au fil du temps.

   Considérons $f : x \mapsto \frac{1}{2}\|x\|^2$ qui est telle que $\Delta f : x \mapsto n$ et est donc bien sous-harmonique. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $X(x) = \nabla_x f = x$. Donc ∇f est un champ radial (nul en 0).

   L'origine est l'unique point fixe du champ, donc $\Phi(t,0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   Soit $x \neq 0$, comme le champ de vecteurs est radial on se convainc qu'il existe une fonction α_x telle que $\Phi(t,x) = \alpha_x(t)x$ sur le domaine de définition de $\Phi(\cdot,x)$. On doit avoir $\alpha_x(0) = 1$ et $\alpha_x'(t)x = \partial_0 \Phi(t,x) = X(\Phi(t,x)) = \alpha_x(t)x$ pour tout t, i.e. $\alpha_x' = \alpha_x$. On a donc $\alpha_x : t \mapsto e^t$ pour tout $x \neq 0$. Finalement, le flot de ∇f est défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ par $\Phi : (t,x) \mapsto e^t x$, c'est-à-dire Φ_t est l'homothétie de rapport e^t.

   On voit que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application Φ_t multiplie les volumes par $(e^t)^n = e^{nt}$. On vérifie bien sur cet exemple que pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borné, $\mathrm{Vol}(\Phi_t(\Omega)) = e^{nt}\,\mathrm{Vol}(\Omega)$ est une fonction croissante de t.