Feuille 4 – Transformée de Fourier, régularité et décroissance

Exercice 1 (Régularité et décroissance de la transformée de Fourier)**.** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, que $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ et que pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $\left|f^{(j)}(x)\right| \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\left|\widehat{f}(\xi)\right| = o\big(|\xi|^{-k}\big)$.

   Soit $\xi \in \mathbb{R}^*$. Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, il en est de même de $x \mapsto f(x)e^{-2i\pi\xi x}$ et

   $$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x.$$

   Soit $A > 0$, on va calculer par des intégrations par parties successives, toutes les fonctions considérées étant bien $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[-A, A]$.

   $$\begin{aligned}\int_{-A}^{A} f(x)e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x =& \left[f(x)\frac{e^{-2i\pi x\xi}}{-2i\pi\xi}\right]_{-A}^{A} + \int_{-A}^{A} f'(x)\frac{e^{-2i\pi x\xi}}{2i\pi\xi}\,\mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{2i\pi\xi}\left(-f(A)e^{-2i\pi A\xi} + f(-A)e^{2i\pi A\xi} + \int_{-A}^{A} f'(x)e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x\right) \\ =& \dots \\ =& \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(2i\pi\xi)^{j+1}}\left(-f^{(j)}(A)e^{-2i\pi A\xi} + f^{(j)}(-A)e^{2i\pi A\xi}\right) \\ &+ \frac{1}{(2i\pi\xi)^k}\int_{-A}^{A} f^{(k)}(x)e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

   Comme précédemment $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, donc $x \mapsto f^{(k)}(x)e^{-2i\pi\xi x}$ aussi et la dernière intégrale converge vers $\widehat{f^{(k)}}(\xi)$ lorsque $A \to +\infty$. Par ailleurs, pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, on a $\left|f^{(j)}(A)e^{-2i\pi A\xi}\right| = |f^{(j)}(A)| \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$ et $\left|f^{(j)}(-A)e^{2i\pi A\xi}\right| = |f^{(j)}(-A)| \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$ par hypothèse. Finalement, on obtient $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2i\pi\xi)^k}\widehat{f^{(k)}}(\xi)$.

   Cette formule est valable pour tout $\xi \neq 0$. En particulier, $\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leqslant \frac{1}{|2\pi\xi|^k}\left|\widehat{f^{(k)}}(\xi)\right| = o\big(|\xi|^{-k}\big)$, par le lemme de Riemann–Lebesgue appliqué à $f^{(k)}$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$, on suppose que $g_p : x \mapsto x^p f(x)$ est intégrable. Montrer que $\widehat{f} \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R})$ et que pour tout $q \in [\![0, p]\!]$, $(\widehat{f})^{(q)}(\xi) \xrightarrow[|\xi|\to+\infty]{} 0$.

   Soit $q \in [\![0, p]\!]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|x|^q \leqslant 1 + |x|^p$ donc $|x^q f(x)| \leqslant |f(x)| + |x^p f(x)|$. Comme f et g_p sont intégrables, il en est de même de $g_q : x \mapsto x^q f(x)$.
   Soit $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ l'application $(x, \xi) \mapsto f(x)e^{-2i\pi\xi x}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $h(x, \cdot)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $q \in \mathbb{N}$:

   $$\frac{\partial^q h}{\partial \xi^q} : (x, \xi) \mapsto (-2i\pi x)^q f(x)e^{-2i\pi\xi x}.$$

En particulier, pour tout $q \in \mathbb{N}$, pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial^q h}{\partial \xi^q}(x,\xi)\right| \leqslant (2\pi)^q |x^q f(x)| = (2\pi)^q |g_q(x)|.$$

Le terme de droite étant indépendant de ξ et intégrable tant que $q \leqslant p$, on peut appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres de façon répétée. Par récurrence, on en déduit que, pour tout $q \in [\![0,p]\!]$, la fonction $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^q$ et

$$\widehat{f}^{(q)} : \xi \mapsto (-2i\pi)^q \int_{\mathbb{R}} x^q f(x) e^{-2i\pi x\xi} \,\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire $\widehat{f}^{(q)} = (-2i\pi)^q \widehat{g_q}$. En particulier, $\widehat{f}^{(q)}$ est une transformée de Fourier et tend donc vers 0 à l'infini par Riemann–Lebesgue.

Exercice 2 (Transformée de Fourier des fonctions à support compact)**.**

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que f est nulle presque partout en dehors de $[-M,M]$. Montrer que $\widehat{f}$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini.

   Soit $M \geqslant 0$ tel que le support de f soit contenu dans le segment $[-M,M]$. Soit $\xi \in \mathbb{R}$, sur $[-M,M]$ la fonction $x \mapsto e^{-2i\pi\xi x}$ est la somme normale de la série de fonction $\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-2i\pi\xi)^k}{k!} x^k$. En effet, exp est la somme normale de sa série entière sur tout compact de $\mathbb{C}$. On a donc :

   $$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi\xi x} \,\mathrm{d}x = \int_{-M}^{M} f(x) \sum_{k\geqslant 0} \frac{(-2i\pi\xi x)^k}{k!} \,\mathrm{d}x = \sum_{k\geqslant 0} \frac{(-2i\pi\xi)^k}{k!} \int_{-M}^{M} f(x) x^k \,\mathrm{d}x.$$

   Notons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_{-M}^{M} |f(x)||x^k| \,\mathrm{d}x \leqslant M^k \|f\|_1 < +\infty$. Donc ces intégrales sont finies.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $a_k = \frac{(-2i\pi)^k}{k!} \int_{-M}^{M} f(x) x^k \,\mathrm{d}x$. On a alors $|a_k| \leqslant \frac{(2\pi M)^k}{k!} \|f\|_1$. Par le critère de d'Alembert, $\sum_{k\geqslant 0} a_k X^k$ est une série entière de rayon de convergence infinie. Le calcul précédent montre que $\widehat{f}$ est la somme de cette série entière.

2. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction à support compact, est-ce que $\widehat{f}$ est à support compact ?

   On vient de voir que $\widehat{f}$ est analytique. Si elle était à support compact elle serait nulle par le principe des zéros isolés. On aurait alors $f = 0$ par injectivité de la transformée de Fourier.

3. Si $\widehat{f}$ est analytique, est-ce que f est nécessairement à support compact ?

   Non, les gaussiennes sont des contre-exemples.

Exercice 3 (Espace des fonctions vérifiant la formule d'inversion)**.** Soit $W = L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}\big(L^1(\mathbb{R})\big)$. On rappelle que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 à l'infini.

1. Montrer que $f \in W \iff f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

   Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors, par inversion de Fourier, $f = \check{\widehat{f}} = \widehat{\widehat{\check{f}}}$. Donc $f \in W$. Inversement, si $f \in W$, alors il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\widehat{g} = f \in L^1(\mathbb{R})$ et donc $\widehat{f} = \check{g} \in L^1(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $f \in W \iff \widehat{f} \in W$.

   On vient de voir que si $f \in W$, alors $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Mais alors $\widehat{f} \in W$. Si $\widehat{f} \in W$, alors $\check{f} = \widehat{\widehat{f}} \in W$ et donc $f \in W$.

3. Si $f \in W$, montrer que f est continue et $f \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1,+\infty]$.

   Soit $f \in W$, il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f = \widehat{g}$. En particulier, f est continue et tend vers 0 à l'infini donc $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Par définition de W on a $f \in L^1(\mathbb{R})$.

   Enfin si $p \in]1,+\infty[$, on écrit $|f|^p = |f||f|^{p-1} \leqslant |f|\|f\|_\infty^{p-1}$. Donc $|f|^p \in L^1(\mathbb{R})$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$.

4. Soient $f, g \in W$, montrer que $f * g$ et $fg \in W$.

   On a $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ donc $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. De plus $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$. D'après les questions 2 et 3, on a $\widehat{f} \in W \subset L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{g} \in W \subset L^\infty(\mathbb{R})$. Donc $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$. Ainsi $f * g \in W$, par la question 1.

   On a $fg = \widehat{\mathcal{F}^{-1}(f)}\widehat{\mathcal{F}^{-1}(g)} = \mathcal{F}\big(\mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)\big)$. Comme W est stable par $\mathcal{F}$ d'après la question 2, il suffit de montrer que $\mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g) \in W$.

   Comme $f \in W$, on a $\check{f} \in W$. En effet $\check{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et si $f = \widehat{h}$ avec $h \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\check{f} = \widehat{\widehat{h}}$. D'après 2 on a donc $\mathcal{F}^{-1}(f) = \widehat{\check{f}} \in W$. De même $\mathcal{F}^{-1}(g) \in W$, donc $\mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g) \in W$ par la première partie de la question. Et donc $fg \in W$.

On définit $\|f\| = \|f\|_1 + \|\widehat{f}\|_1$ pour tout $f \in W$.

5. Montrer que W est un espace vectoriel et que $\|\cdot\|$ définit une norme sur W.

   Comme $\mathcal{F}$ est linéaire $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ est un espace vectoriel, de même que $L^1(\mathbb{R})$. Donc W est un sous-espace vectoriel de $L^1(\mathbb{R})$ comme intersection de deux tels sous-espaces.

   Soit $f \in W$. Si $\|f\| = 0$ alors $\|f\|_1 = 0$ et donc $f = 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{F}$ est linéaire et $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $L^1(\mathbb{R})$, il est clair que $\|\cdot\|$ est homogène et vérifie l'inégalité triangulaire.

6. Montrer que $(W, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

   Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy de $(W, \|\cdot\|)$. Alors les suites $(f_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\widehat{f}_n)_{n\geqslant 0}$ sont de Cauchy dans l'espace complet $\big(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\big)$. En particulier, elles convergent vers des fonctions f et $g \in L^1(\mathbb{R})$ respectivement.

   Par continuité de la transformée de Fourier, $(\widehat{f}_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément (en particulier simplement) sur $\mathbb{R}$ vers $\widehat{f}$. Par ailleurs, quitte à extraire une sous-suite, $(\widehat{f}_n)_{n\geqslant 0}$ converge presque partout vers g. Donc $g = \widehat{f}$ presque partout et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Donc $f \in W$.

   Finalement, $\|f_n - f\| = \|f_n - f\|_1 + \|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_1 = \|f_n - f\|_1 + \|\widehat{f_n} - g\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers f dans $(W, \|\cdot\|)$ ce qui montre que cet espace est complet.

On pose $h : x \mapsto e^{-\pi x^2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n : x \mapsto nh(nx)$. On rappelle que ces fonctions forment une approximation de l'identité.

7. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f * h_n \in W$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a bien $f * h_n \in L^1(\mathbb{R})$. Par ailleurs, $\widehat{f * h_n} = \widehat{f}\widehat{h_n} \in L^1(\mathbb{R})$. En effet, on sait que $\widehat{h_n} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$. Donc $f * h_n \in W$.

8. En déduire que W est dense dans $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty))$.

   Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact. On a en particulier $f \in L^1(\mathbb{R})$ et donc $f * h_n \in W$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Dans la suite, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on note $f_t : x \mapsto f(x - t)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}|f * h_n(x) - f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-y)h_n(y)\,\mathrm{d}y - f(x)\int_{\mathbb{R}} h_n(y)\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)| h_n(y)\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \left|f\left(x - \frac{z}{n}\right) - f(x)\right| h(z)\,\mathrm{d}z \leqslant \int_{\mathbb{R}} h(z) \left\|f_{\frac{z}{n}} - f\right\|_\infty \mathrm{d}z.\end{aligned} \tag{i}$$

   Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $\|f * h_n - f\|_\infty \leqslant \int_{\mathbb{R}} h(z)\left\|f_{\frac{z}{n}} - f\right\|_\infty \mathrm{d}z$. Comme f est continue à support compact, elle est uniformément continue, ce qui est équivalent à $\|f_t - f\|_\infty \xrightarrow[t\to 0]{} 0$.

Donc, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $h(z)\left\|f_{\frac{z}{n}} - f\right\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 1$ et $z \in \mathbb{R}$, $h(z)\left\|f_{\frac{z}{n}} - f\right\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty h(z)$. Comme $h \in L^1(\mathbb{R})$, par convergence dominée on a :

$$\int_{\mathbb{R}} h(z)\left\|f_{\frac{z}{n}} - f\right\|_\infty \mathrm{d}z \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

et donc $\|f * h_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit maintenant $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ tel que $\|f - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$. D'après ce qu'on vient de montrer, il existe $h \in W$ tel que $\|g - h\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Donc $\|f - h\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$. Donc W est bien dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

Remarque. Attention, W n'est pas dense dans $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ car il n'est pas inclus dedans.

9. En déduire également que, pour tout $p \in [1, +\infty[$, W est dense dans $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p))$.
   On commence de nouveau par le cas d'une fonction $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$. De nouveau, pour tout $n \geqslant 1$ on a $f * h_n \in W$ et on veut montrer que $\|f * h_n - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En repartant de la majoration (i), il vient pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$,

$$|f * h_n(x) - f(x)|^p \leqslant \left(\leqslant \int_{\mathbb{R}} \left|f\left(x - \frac{z}{n}\right) - f(x)\right| h(z)\,\mathrm{d}z\right)^p \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left|f\left(x - \frac{z}{n}\right) - f(x)\right|^p h(z)\,\mathrm{d}z$$

   en appliquant l'inégalité de Jensen pour la fonction $t \mapsto t^p$, qui est bien convexe sur $[0, +\infty[$, et la mesure de probabilité gaussienne $h(z)\,\mathrm{d}z$. On intègre cette relation par rapport à x et on applique le théorème de Fubini–Tonelli :

$$\|f * h_n - f\|_p^p \leqslant \int_{\mathbb{R}} h(z) \int_{\mathbb{R}} \left|f\left(x - \frac{z}{n}\right) - f(x)\right|^p \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}} h(z)\left\|f_{\frac{z}{n}} - f\right\|_p^p \mathrm{d}z.$$

   Par continuité des translations dans $L^p(\mathbb{R})$, on a pour tout $z \in \mathbb{R}$, $\left\|f_{\frac{z}{n}} - f\right\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc l'intégrande dans le terme de droite ci-dessus converge simplement vers 0. Il est dominé par la fonction intégrable $2^p\|f\|_p^p h$. Donc, par convergence dominée,

$$\int_{\mathbb{R}} h(z)\left\|f_{\frac{z}{n}} - f\right\|_p^p \mathrm{d}z \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

   et donc $\|f * h_n - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $f * h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ dans $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p))$.

   Soit maintenant $f \in L^p(\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ tel que $\|f - g\|_p \leqslant \varepsilon$. D'après ce qu'on vient de montrer, il existe $h \in W$ tel que $\|g - h\|_p \leqslant \varepsilon$. Donc $\|f - h\|_p \leqslant 2\varepsilon$. Donc W est bien dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_p$.

Exercice 4 (Extension holomorphe de la transformée de Fourier)**.** On note $e_y : t \mapsto e^{2\pi t y}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $fe_y \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On définit une extension de $\widehat{f}$ à $\mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \widehat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi t z}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

1. Pour tout x et $y \in \mathbb{R}$ montrer que $\widehat{f}(x + iy)$ est bien défini et que $\widehat{f}(x + iy) = \mathcal{F}(fe_y)(x)$.
   Soient x et $y \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $f(t)e^{-2i\pi t(x+iy)} = f(t)e^{2\pi t y}e^{-2i\pi t x} = f(t)e_y(t)e^{-2i\pi t x}$. En particulier, $\left|f(t)e^{-2i\pi t(x+iy)}\right| = |f(t)e_y(t)|$ et cette quantité est intégrable car on a supposé $fe_y \in L^1(\mathbb{R})$. Donc $\widehat{f}(x + iy)$ est bien définie. Par ailleurs,

$$\widehat{f}(x + iy) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi t(x+iy)}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(t)e_y(t)e^{-2i\pi t x}\,\mathrm{d}t = \mathcal{F}(fe_y)(x).$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$, on note $A_t : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ la fonction $A_t : z \mapsto \frac{e^{-2i\pi tz}-1}{z}$. Montrer que A_t se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{C}$ et que $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $|A_t(z)| \leqslant 2\pi|t|e^{2\pi|t||z|}$.

Si $t = 0$ alors A_t est la fonction nulle. Elle se prolonge bien à $\mathbb{C}$ entier avec la majoration souhaitée. Dans la suite on suppose que $t \neq 0$. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on a $e^{-2i\pi tz} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{(-2i\pi tz)^k}{k!}$ donc

$$A_t(z) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-2i\pi t)^k}{k!} z^{k-1} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{(-2i\pi t)^{k+1}}{(k+1)!} z^k.$$

La série entière $\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-2i\pi t)^{k+1}}{(k+1)!} X^k$ est de rayon de convergence infini par la règle de d'Alembert. En effet $\frac{k!}{(-2i\pi t)^k} \frac{(-2i\pi t)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{(-2i\pi t)}{k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. La somme de cette série entière définit donc une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ entier qui coïncide avec A_t sur $\mathbb{C}^*$. Donc A_t s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, en particulier continue.

Par ailleurs, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$|A_t(z)| = \left|\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-2i\pi t)^{k+1}}{(k+1)!} z^k\right| \leqslant \sum_{k\geqslant 0} \frac{|2\pi t|^{k+1}}{(k+1)!}|z|^k \leqslant 2\pi|t| \sum_{k\geqslant 0} \frac{(2\pi|t|)^k}{k!}|z|^k = 2\pi|t|e^{2\pi|t||z|}.$$

3. Soit $w \in \mathbb{C}$, montrer que $\widehat{f}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en w. En déduire que $\widehat{f}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, par la définition (1) de $\widehat{f}$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{f}(w+z) - \widehat{f}(w)}{z} &= \frac{1}{z}\left(\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi t(w+z)}\,\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi tw}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi tw}\frac{e^{-2i\pi tz}-1}{z}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi tw}A_t(z)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Pour montrer que cette quantité converge lorsque $z \to 0$, on va appliquer le théorème de convergence dominée dans la dernière intégrale. D'après la question 2, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction A_t se prolonge continuement en 0. Donc $f(t)e^{-2i\pi tw}A_t(z) \xrightarrow[z\to 0]{} f(t)e^{-2i\pi tw}A_t(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

D'après la question 2, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $z \in D(0,1) \setminus \{0\}$, on a

$$\left|f(t)e^{2i\pi tw}A_t(z)\right| \leqslant |f(t)|e^{2\pi|t||w|}2\pi|t|e^{2\pi|t||z|} \leqslant 2\pi|t|e^{2\pi|t|(|w|+|z|)}|f(t)| \leqslant e^{2\pi|t|(|w|+2)}|f(t)|,$$

où dans la dernière inégalité on a utilisé $s \leqslant e^s$ avec $s = 2\pi|t|$ et $|z| < 1$. Le terme de droite est indépendant de z et intégrable. En effet,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(t)|e^{2\pi|t|(|w|+2)}\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{0} |f(t)|e^{-2\pi t(|w|+2)}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} |f(t)|e^{2\pi t(|w|+2)}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(t)|e^{-2\pi t(|w|+2)}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} |f(t)|e^{2\pi t(|w|+2)}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \|fe_{-(|w|+2)}\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|fe_{|w|+2}\|_{L^1(\mathbb{R})} < +\infty.\end{aligned}$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\frac{\widehat{f}(w+z) - \widehat{f}(w)}{z} \xrightarrow[z\to 0]{} \int_{\mathbb{R}} f(t)A_t(0)e^{-2i\pi tw}\,\mathrm{d}t.$$

Donc $\widehat{f}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en w. Comme $w \in \mathbb{C}$ est quelconque, $\widehat{f}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point, c'est-à-dire holomorphe sur $\mathbb{C}$.

4. Soit $g : t \mapsto e^{-\pi t^2}$, rappeler sans démonstration l'expression de $\widehat{g}(\xi)$ pour $\xi \in \mathbb{R}$. En déduire l'expression de $\widehat{g}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

   Avec notre normalisation $\mathcal{F}(g) = g$ donc, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{g}(\xi) = g(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$.

   Vérifions que g satisfait les hypothèses de cette section. Soit $y \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$0 \leqslant t^2 g(t)e_y(t) = t^2 g(t)e^{2\pi ty} \leqslant |t|^2 g(t)e^{2\pi|t||y|} = \exp\bigl(-\pi t^2 + 2\pi|y||t| + 2\ln(|t|)\bigr) \xrightarrow[|t|\to+\infty]{} 0.$$

   Donc ge_y est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que $g(t)e_y(t) = O(|t|^{-2})$ lorsque $|t| \to +\infty$. Donc $ge_y \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. D'après les questions 1 et 3, la fonction $\widehat{g}$ est donc bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$.

   Par ailleurs la fonction g s'étend naturellement en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ définie par $g : z \mapsto e^{-\pi z^2}$. Les fonctions g et $\widehat{g}$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et coïncident sur $\mathbb{R}$. Donc $\widehat{g} - g$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et s'annule sur $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{C}$ est connexe, le principe des zéros isolés montre que $\widehat{g} - g = 0$ sur $\mathbb{C}$. Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\widehat{g}(z) = g(z) = e^{-\pi z^2}$.

Exercice 5 (Une caractérisation des fonctions à support compact)**.** Dans cet exercice, on note de nouveau $e_y : t \mapsto e^{2\pi ty}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $fe_y \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On note encore $\widehat{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'extension holomorphe de $\widehat{f}$ définie par (1) et étudiée dans l'exercice 4.

1. Supposons qu'il existe $R \geqslant 0$ et $C \geqslant 0$ tels que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \left|\widehat{f}(x+iy)\right| \leqslant C\frac{1+(2\pi y)^2}{1+(2\pi x)^2}e^{2\pi R|y|}. \tag{2}$$

   Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout t et $y \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x+iy)e^{2i\pi t(x+iy)}\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

   Déjà, pour $y = 0$ l'estimation (2) montre que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Donc par la formule d'inversion de Fourier on a $\check{f} = \widehat{\widehat{f}}$ et cette fonction est continue. Donc f est continue.

   Soit maintenant $y \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x+iy)e^{2i\pi t(x+iy)}\,\mathrm{d}x = e^{-2\pi ty}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x+iy)e^{2i\pi tx}\,\mathrm{d}x = e^{-2\pi ty}\mathcal{F}\Bigl(\widehat{f}(\cdot+iy)\Bigr)(-t).$$

   D'après la question 1 de l'exercice 4, on a $\widehat{f}(\cdot+iy) = \mathcal{F}(fe_y)$. Par ailleurs, l'estimation (2) montre que cette fonction est bien dans $L^1(\mathbb{R})$ (à y fixé, par rapport à x). On peut donc appliquer la formule d'inversion de Fourier, qui donne $\mathcal{F}\Bigl(\widehat{f}(\cdot+iy)\Bigr) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(fe_y)) = (\check{fe_y})$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x+iy)e^{2i\pi t(x+iy)}\,\mathrm{d}x = e^{-2\pi ty}f(t)e_y(t) = f(t).$$

2. Dans ce cas, en déduire que f est nulle hors de l'intervalle $[-R, R]$.

   Indication. Utiliser l'estimation (2) pour borner $f(t)$ par une quantité dépendant de y, puis faire un choix judicieux de y en fonction de $t \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après (3), pour tout $y \in \mathbb{R}^*$,

$$|f(t)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{f}(x+iy)\right| e^{-2\pi t y}\, \mathrm{d}x \leqslant C(1+(2\pi y)^2) e^{2\pi(R|y|-ty)} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{1+(2\pi x)^2}$$
$$\leqslant C(1+(2\pi y)^2) e^{2\pi(R|y|-ty)} \frac{1}{2\pi} [\arctan(2\pi x)]_{-\infty}^{+\infty} \leqslant C(1+(2\pi y)^2) e^{2\pi(R|y|-ty)}.$$

Si $t > R$, considérons $y > 0$. On a $|f(t)| \leqslant C(1+(2\pi y)^2) e^{-2\pi(t-R)y} \xrightarrow[y \to +\infty]{} 0$. Donc $f(t) = 0$. Symétriquement, si $t < -R$ soit $y < 0$. On a $ty = |t||y|$ et $|f(t)| \leqslant C(1+(2\pi y)^2) e^{-2\pi(|t|-R)|y|}$. Comme $|t| > R$, cette quantité tend vers 0 lorsque $y \to -\infty$. Donc $f(t) = 0$ de nouveau. Ainsi, la fonction f est nulle hors de $[-R, R]$.

3. Inversement, soit $R \geqslant 0$, supposons que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ est à support dans $[-R, R]$. Montrer qu'il existe $C \geqslant 0$ tel que l'estimation (2) soit satisfaite.

   Indication. Exprimer la transformée de Fourier de $fe_y - (fe_y)''$ en fonction de $\widehat{f}$.

   Soit $y \in \mathbb{R}$, la fonction fe_y est $\mathcal{C}^2$ et à support compact. En particulier, $(fe_y)'$ et $(fe_y)''$ sont continues à supports compacts et donc dans $L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}\big(fe_y - (fe_y)''\big)(x) = \mathcal{F}(fe_y)(x) - \mathcal{F}\big((fe_y)''\big)(x) = \big(1-(2i\pi x)^2\big)\mathcal{F}(fe_y)(x)$$
$$= \big(1+(2\pi x)^2\big)\widehat{f}(x+iy),$$

   où on a utilisé la question 1 de l'exerice 4. Donc $\left|\widehat{f}(x+iy)\right| = \frac{1}{1+(2\pi x)^2} |\mathcal{F}(fe_y - (fe_y)'')(x)|$ et il suffit de trouver $C \geqslant 0$ tel que $\|\mathcal{F}(fe_y - (fe_y)'')\|_\infty \leqslant C(1+(2\pi y)^2) e^{2\pi R|y|}$ pour tout y. On calcule :

$$(fe_y) - (fe_y)'' = fe_y - f''e_y - 2f'e_y' - fe_y'' = \big(f - f'' - 4\pi y f' - f(2\pi y)^2\big)e_y$$
$$= \big(f(1-4\pi^2 y^2) - 4\pi y f' - f''\big)e_y.$$

   Donc,

$$\big|\mathcal{F}\big(fe_y - (fe_y)''\big)\big| = \big|(1-4\pi^2y^2)\mathcal{F}(fe_y) - 4\pi y \mathcal{F}(f'e_y) - \mathcal{F}(f''e_y)\big|$$
$$\leqslant (1+4\pi^2y^2)|\mathcal{F}(fe_y)| + 4\pi|y||\mathcal{F}(f'e_y)| + |\mathcal{F}(f''e_y)|$$
$$\leqslant (1+(2\pi y)^2)\big(|\mathcal{F}(fe_y)| + |\mathcal{F}(f'e_y)| + |\mathcal{F}(f''e_y)|\big).$$

   Comme f est à support compact dans $[-R, R]$, on a :

$$\|\mathcal{F}(fe_y)\|_\infty \leqslant \|fe_y\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-R}^{R} |f(t)| e^{2\pi t y}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_{-R}^{R} |f(t)| e^{2\pi R|y|}\, \mathrm{d}t = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} e^{2\pi R|y|}.$$

   De même $\|\mathcal{F}(f'e_y)\|_\infty \leqslant \|f'\|_{L^1(\mathbb{R})} e^{2\pi R|y|}$ et $\|\mathcal{F}(f''e_y)\|_\infty \leqslant \|f''\|_{L^1(\mathbb{R})} e^{2\pi R|y|}$. En définissant $C = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|f'\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|f''\|_{L^1(\mathbb{R})}$ on a donc $\|\mathcal{F}(fe_y - (fe_y)'')\|_\infty \leqslant C(1+(2\pi y)^2) e^{2\pi R|y|}$, comme voulu. Ainsi l'estimation (2) est vérifiée.

Remarque. En fait, le théorème de Paley–Wiener affirme qu'une fonction f telle que $fe_y \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ est nulle preque partout hors de $[-R, R]$ si et seulement si il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C \geqslant 0$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad |\widehat{f}(z)| \leqslant C\big(1+|z|^N\big) e^{R\Im(z)}.$$

La démonstration de ce résultat fait appel à la théorie des distributions tempérées.

Exercice 6 (Équation de la chaleur dans $\mathbb{R}$)**.** Soit $F : (t,x) \mapsto F(t,x)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On dit que F est solution de l'*équation de la chaleur* si $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$.
Soit $t > 0$, on notera $F_t : x \mapsto F(t,x)$. On notera aussi $\widehat{F}(t,\xi) = \widehat{F_t}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

1. On définit $E :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $E : (t,x) \mapsto (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Montrer que E est solution de l'équation de la chaleur.
   La fonction E est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Calculons ses dérivées partielles. Pour tout $(t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, on a :
   $$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial x}(t,x) &= \frac{-x}{2t}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} = -\frac{x}{2t}E(t,x),\\ \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(t,x) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{x}{2t}E(t,x)\Big) = -\frac{1}{2t}E(t,x) + \frac{x^2}{4t^2}E(t,x) = \left(\frac{x^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right)E(t,x).\end{aligned}$$
   Par ailleurs,
   $$\frac{\partial E}{\partial t}(t,x) = \frac{-2\pi}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4t}} + \frac{x^2}{4t^2}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4t^2}\right)E(t,x) = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(t,x).$$
   Donc E est bien une solution de l'équation de la chaleur.
2. Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $t > 0$, montrer que $E_t * f \in L^1(\mathbb{R})$ et exprimer $\widehat{E_t * f}$ en fonction de $\widehat{f}$.
   On a $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $E_t \in L^1(\mathbb{R})$ (c'est la densité d'une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $2t$). D'après l'exercice 5 du TD3, on a $E_t * f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{E_t * f} = \widehat{E_t}\widehat{f}$. Il reste donc à expliciter $\widehat{E_t}$.
   On a $E_{\frac{1}{4\pi}} : x \mapsto e^{-\pi x^2}$, et on sait par le cours que cette fonction est sa propre transformée de Fourier. Pour $t > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{aligned}\widehat{E_t}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} E_t(x)e^{-2i\pi\xi x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4t}}e^{-2i\pi\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2}e^{-2i\pi\xi\sqrt{4\pi t}y}\,\mathrm{d}y\\ &= \widehat{E_{\frac{1}{4\pi}}}\left(\sqrt{4t\pi}\xi\right) = E_{\frac{1}{4\pi}}\left(\sqrt{4t\pi}\xi\right) = e^{-4\pi^2 t\xi^2}\end{aligned}$$
   Donc $\widehat{E_t} : \xi \mapsto e^{-4\pi^2 t\xi^2}$. Finalement, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$ et tout $t > 0$ on a :
   $$\widehat{E_t * f} : \xi \longmapsto \widehat{f}(\xi)e^{-4\pi^2 t\xi^2}.$$
3. Montrer que $E_t * f \xrightarrow[t\to 0]{} f$ dans $L^1(\mathbb{R})$.
   Pour tout $t > 0$, E_t est une fonction positive d'intégrale 1. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\displaystyle\int_{|x|>\varepsilon} E_t(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[t\to 0]{} 0$. Donc $(E_t)_{t>0}$ est une approximation de l'identité. En particulier, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\|E_t * f - f\|_1 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$. On peut aussi montrer cette convergence comme dans la question 9 de l'exercice 3.
4. Montrer que $(t,x) \mapsto (E_t * f)(x)$ est solution de l'équation de la chaleur.
   Soit $h : (t,x,y) \mapsto f(y)E(t,x-y)$ et soit
   $$F : (t,x) \mapsto (E_t * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} h(t,x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Supposons dans un premier temps que l'on ait prouvé que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et que ses dérivées s'obtiennent par dérivation sous l'intégrale. On a alors, pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial h}{\partial t}(t,x,y) - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(t,x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\frac{\partial E}{\partial t}(t,x-y) - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(t,x-y)\right)\mathrm{d}y = 0.\end{aligned}$$

En effet, on a prouvé que E était solution de l'équation de la chaleur dans la question 1.
La difficulté technique est donc de prouver que F est $\mathcal{C}^2$ et que ses dérivées s'obtiennent par dérivation sous l'intégrale. On va prouver que F admet une dérivée partielle continue par rapport à t qui s'obtient par dérivation sous l'intégrale.
Pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h(t,x,\cdot)$ est dominée par $(4\pi t)^{-\frac{1}{2}}|f|$ et est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, la fonction $h(\cdot,x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et, en utilisant les calculs de la question 1,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial h}{\partial t}(t,x,y)\right| = |f(y)|\left|\frac{\partial E}{\partial t}(t,x-y)\right| &\leqslant |f(y)|\left(\frac{|x-y|^2}{4t^2} + \frac{1}{2t}\right)E(t,x-y) \\ &\leqslant |f(y)|\left(\frac{|x-y|^2}{4t^2} + \frac{1}{2t}\right)\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\end{aligned}$$

Soit $T_2 > T_1 > 0$, si on suppose que $t \in [T_1, T_2]$, alors

$$\left(\frac{|x-y|^2}{4t^2} + \frac{1}{2t}\right)\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \leqslant \left(\frac{|x-y|^2}{4T_1^2} + \frac{1}{2T_1}\right)\frac{1}{\sqrt{4\pi T_1}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4T_2}} = P(|x-y|)e^{-\frac{|x-y|^2}{4T_2}},$$

où $P : z \mapsto \left(\frac{z^2}{4T_1^2} + \frac{1}{2T_1}\right)\frac{1}{\sqrt{4\pi T_1}}$. Comme $z \mapsto e^{-\frac{z^2}{4T_2}}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $z \mapsto P(z)e^{-\frac{z^2}{4T_2}}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $M > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [T_1, T_2]$ on ait :

$$\left|\frac{\partial h}{\partial t}(t,x,y)\right| \leqslant M|f(y)|.$$

Comme le terme de droite est intégrable sur $\mathbb{R}$, on déduit du théorème de dérivation sous l'intégrale que F admet une dérivée partielle par rapport à t continue sur $]T_1, T_2[\,\times\mathbb{R}$ et que cette dérivée s'obtient par dérivation sous l'intégrale. Comme c'est valable pour tout T_1 et T_2 tels que $0 < T_1 < T_2$, on en déduit que ce résultat est en fait valide sur $]0,+\infty[\,\times\mathbb{R}$.
Le même genre de calcul va montrer que F admet une dérivée partielle sur $]0,+\infty[\,\times\mathbb{R}$ par rapport à x, qui est continue et s'obtient par dérivation sous l'intégrale. En particulier, F admet des dérivées partielles continues en (t,x) sur $]0,+\infty[\,\times\mathbb{R}$. Elle est donc $\mathcal{C}^1$ sur ce domaine.
En raisonnant de même pour les dérivées secondes, on montre que F est de classe $\mathcal{C}^2$. En fait, F est $\mathcal{C}^\infty$ avec les dérivées partielles que l'on pense. Mais c'est pénible à prouver proprement.

On va voir que $(t,x) \mapsto (E_t * f)(x)$ est l'unique solution de l'équation de la chaleur qui tend vers f dans $L^1(\mathbb{R})$ lorsque $t \to 0$ et qui vérifie certaines hypothèses techniques.

5. Soit F une solution de l'équation de la chaleur. Soit $T > 0$, on suppose qu'il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ positive, tendant vers 0 à l'infini, et telle que pour tout $t \geqslant T$:

$$|F(t,\cdot)| \leqslant g, \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial t}(t,\cdot)\right| \leqslant g, \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial x}(t,\cdot)\right| \leqslant g \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,\cdot)\right| \leqslant g.$$

Soit $\xi \in \mathbb{R}$, montrer que $t \mapsto \widehat{F}(t,\xi)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]T,+\infty[$ et que $\frac{\partial \widehat{F}}{\partial t}(t,\xi) = -4\pi^2\xi^2\widehat{F}(t,\xi)$.

On note $h : (t,x,\xi) \mapsto F(t,x)e^{-2i\pi x\xi}$, de sorte que $\widehat{F} : (t,\xi) \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} h(t,x,\xi)\,\mathrm{d}x$. On veut une fois de plus dériver sous l'intégrale.

La fonction h est dominée par g indépendamment de t et ξ, donc elle est intégrable par rapport à x et la fonction $\widehat{F}$ est donc bien définie.

Soit x et $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $h(\cdot,x,\xi)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $t \geqslant T$,

$$\left|\frac{\partial h}{\partial t}(t,x,\xi)\right| = \left|\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\right| \leqslant g(x).$$

Donc $\widehat{F}$ admet une dérivée partielle par rapport à t sur $]T,+\infty[\times\mathbb{R}$. De plus cette dérivée partielle est continue et s'obtient par dérivation sous l'intégrale.

Soit $\xi \in \mathbb{R}$, on a bien que $\widehat{F}(\cdot,\xi)$ est $\mathcal{C}^1$. Ensuite, soit $t > T$, on a :

$$\frac{\partial \widehat{F}}{\partial t}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial h}{\partial t}(t,x,\xi)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x)e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x,$$

car F est solution de l'équation de la chaleur. La condition de domination sur $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ assure que ces fonctions sont intégrables par rapport à x et tendent vers 0 à l'infini. On peut alors intégrer deux fois par parties, ce qui redonne les relations usuelles entre la transformée de Fourier de F_t et celle de sa dérivée seconde :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x)e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = (-2i\pi\xi)^2 \int_{\mathbb{R}} F(t,x)e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = -4\pi^2\xi^2\widehat{F}(t,x).$$

On obtient donc bien que $\frac{\partial \widehat{F}}{\partial t} = -4\pi^2\xi^2\widehat{F}$ sur $]T,+\infty[\times\mathbb{R}$.

6. Soit F telle que la condition précédente soit vérifiée pour tout $T > 0$ et soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On suppose $\|F_t - f\|_1 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$. Montrer que $\widehat{F}(t,\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t}$ pour tout $(t,\xi) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

   D'après la question 5, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ la fonction $\widehat{F}(\cdot,\xi)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et on a $\frac{\partial \widehat{F}}{\partial t} = -4\pi^2\xi^2\widehat{F}$. Donc $\widehat{F}(\cdot,\xi)$ est de la forme $t \mapsto C_\xi e^{-4\pi^2\xi^2 t}$ avec $C_\xi \in \mathbb{C}$.

   Supposons que $\|F_t - f\|_1 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$. Par continuité de la transformée de Fourier, on a alors

$$\widehat{F_t}(\xi) \xrightarrow[t\to 0]{} \widehat{f}(\xi).$$

   Par ailleurs, on a :

$$\widehat{F_t}(\xi) = \widehat{F(t,\cdot)}(\xi) = \widehat{F}(t,\xi) = C_\xi e^{-4\pi^2\xi^2 t} \xrightarrow[t\to 0]{} C_\xi.$$

   Donc $C_\xi = \widehat{f}(\xi)$ et $\widehat{F}(t,\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t}$ pour tout $t > 0$ et tout $\xi \in \mathbb{R}$.

7. En déduire que F est la fonction $(t,x) \mapsto (E_t * f)(x)$.

   Soit $t > 0$, d'après les questions 2 et 6, on a

$$\widehat{F_t} = \widehat{F(t,\cdot)} = \widehat{F}(t,\cdot) = \widehat{E_t * f}.$$

   L'injectivité de la transformée de Fourier montre alors que $F_t = E_t * f$. C'est valable pour tout $t > 0$, donc F est la fonction $(t,x) \mapsto (E_t * f)(x)$.