Exercices de Topologie

Thomas Letendre

Prépa Agreg – Automne 2024

Exercice 1 (Propriété de la borne inférieure)**.** Montrer que $\mathbb{R}$ satisfait la propriété de la borne inférieure : toute partie non-vide et minorée admet une *borne inférieure*, i.e. un plus grand minorant.
Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide et minorée. Alors $-A = \{-a \mid a \in A\}$ est une partie non-vide de $\mathbb{R}$ et majorée. Par construction de $\mathbb{R}$, la partie $-A$ admet une borne supérieure s.
Pour tout $a \in A$ on a $-a \leqslant s$ et donc $-s \leqslant a$. Donc $-s$ minore A. Soit m un minorant de A, alors $-m$ est un majorant de $-A$ et donc $s \leqslant -m$. Donc $m \leqslant -s$. Donc $-s$ est le plus grand minorant de A. Ainsi $\mathbb{R}$ a bien propriété de la borne inférieure.

Exercice 2 (Densité des rationnels)**.**

1. Montrer que $\mathbb{R}$ est *archimédien* : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x \leqslant n$.
   Par l'absurde, si c'était faux il existerait $x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n < x$. Donc $\mathbb{N}$ serait une partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc admettrait une borne supérieure $s \in \mathbb{R}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $n+1 \in \mathbb{N}$ on aurait $n+1 \leqslant s$ et donc $n \leqslant s-1$. Donc $s-1$ majorerait $\mathbb{N}$, contredisant la définition de s.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{q} < y - x$.
   Comme $y - x > 0$, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{2}{y-x} \leqslant q$, c'est-à-dire $\frac{1}{q} \leqslant \frac{y-x}{2} < y - x$.
3. Montrer que $I = \left\{ k \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{k}{q} < y \right\}$ admet un maximum.
   Comme I est un ensemble d'entiers, il suffit de montrer qu'il est non-vide et majoré.
   Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant -qy$. Alors $n+1 > -qy$, donc $-\frac{n+1}{q} < y$ et $-n-1 \in I$, d'où $I \neq \emptyset$.
   Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $qy \leqslant m$. Pour tout $k \geqslant m$ on a $y \leqslant \frac{m}{q} \leqslant \frac{k}{q}$ et donc $k \notin I$. Donc m majore I.
4. En déduire qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$.
   Soit $p = \max I$. Comme $p \in I$, on a $\frac{p}{q} < y$. Si $\frac{p}{q} \leqslant x$ alors $\frac{p+1}{q} \leqslant x + \frac{1}{q} < y$ et donc $p+1 \in I$, ce qui contredit la définition de p. Donc $x < \frac{p}{q}$ et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ convient.

Exercice 3 (Topologie métrique)**.** Soit (X, d) un espace métrique et soit $\mathcal{O}$ la famille des réunions quelconques de boules ouvertes. Montrer que $\mathcal{O}$ définit une topologie sur X.

- On a $X = \bigcup_{x \in X} B(x, 1)$ donc $X \in \mathcal{O}$.
- Le cas de $\emptyset$ est un problème de zérologie. Ou bien on considère que c'est $B(x, 0)$ pour tout $x \in X$, ou bien que $\emptyset$ est une union indexée par $\emptyset$ de boules ouvertes. Dans tous les cas $\emptyset \in \mathcal{O}$.
- Soient $(U_i)_{i \in I}$ des élements de $\mathcal{O}$. Pour tout $i \in I$, il existe J_i et des boules ouvertes $(B_{i,j})_{j \in J_i}$ telles que $U_i = \bigcup_{j \in J_i} B_{i,j}$. Alors $\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} B_{i,j} \in \mathcal{O}$.
- Soient U et $V \in \mathcal{O}$, il existe des ensembles I et J et des boules ouvertes $(B_{1,i})_{i \in I}$ et $(B_{2,j})_{j \in J}$ tels que $U = \bigcup_{i \in I} B_{1,i}$ et $V = \bigcup_{j \in J} B_{2,j}$. Alors

$$U \cap V = \left(\bigcup_{i \in I} B_{1,i} \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_{2,j} \right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} B_{1,i} \cap B_{2,j}.$$

Par le point précédent, il suffit donc de montrer que l'intersection de deux boules ouvertes de X est dans $\mathcal{O}$. Soient $x, y \in X$ et $\alpha, \beta \in]0, +\infty[$. Pour tout $z \in B(x,\alpha) \cap B(y,\beta)$ il existe $\gamma_z > 0$ tel que $\gamma_z < \min(\alpha - d(x,z), \beta - d(y,z))$. Par l'inégalité triangulaire, on a $B(z,\gamma_z) \subset B(x,\alpha)$, et de même $B(z,\gamma_z) \subset B(y,\beta)$. Donc $B(x,\alpha) \cap B(y,\beta) = \bigcup_{z \in B(x,\alpha)\cap B(y,\beta)} B(z,\gamma_z) \in \mathcal{O}$.

Exercice 4 (Topologie et distances équivalentes)**.** Soient deux distances d_1 et d_2 sur X, on suppose qu'elles sont *équivalentes*, c'est-à-dire qu'il existe α et β strictement positifs tels que :

$$\forall x, y \in X, \qquad \alpha d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant \beta d_1(x,y).$$

Pour tout $x \in X$ et $R > 0$, on note $B_i(x,R)$ la boule ouverte centrée en x de rayon R pour d_i. On note aussi $\mathcal{O}_i$ la topologie métrique sur X associée à d_i.

1. Montrer que les boules ouvertes pour d_2 (resp. d_1) sont ouvertes pour $\mathcal{O}_1$ (resp. $\mathcal{O}_2$).

   Soient $x \in X$ et $R > 0$, on veut montrer que $B_2(x,R)$ est ouverte pour $\mathcal{O}_1$. Soient $y \in B_2(x,R)$ et $\gamma > 0$ tel que $\gamma < \frac{1}{\beta}(R - d_2(x,y))$. Pour tout $z \in B_1(y,\gamma)$, on a

   $$d_2(x,z) \leqslant d_2(x,y) + d_2(y,z) \leqslant d_2(x,y) + \beta d_1(y,z) \leqslant d_2(x,y) + \beta\gamma < R.$$

   Donc $B_1(y,\gamma) \subset B_2(x,R)$, et donc $B_2(x,R)$ est un voisinage de y pour $\mathcal{O}_1$. Donc $B_2(x,R)$ est voisinage de chacun de ses points, donc ouverte, pour $\mathcal{O}_1$.

   L'autre cas est symétrique en échangeant les rôles de d_1 et d_2 et en remplaçant β par $\frac{1}{\alpha}$.

2. En déduire que d_1 et d_2 définissent la même topologie.

   Tout ouvert de $\mathcal{O}_2$ est réunion de boules ouvertes pour d_2, donc d'ouverts de $\mathcal{O}_1$, donc est ouvert pour $\mathcal{O}_1$. Donc $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$. Symétriquement $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, d'où l'égalité.

3. Sur $\mathbb{R}$, on note $d_1 : (x,y) \mapsto |y - x|$ et $d_2 : (x,y) \mapsto |\arctan(y) - \arctan(x)|$. Vérifier que les topologies métriques associées coïncident avec la topologie $\mathcal{O}$ des réunions d'intervalles ouverts.

   Soient $x \in \mathbb{R}$ et $R > 0$, on a $B_1(x,R) =]x - R, x + R[$. Réciproquement, si $a < b$ alors $]a,b[= B_1(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2})$. Les boules ouvertes pour d_1 sont donc exactement les intervalles ouverts bornés. Tout intervalle ouvert étant réunion d'intervalles ouverts bornés, la topologie métrique associée à d_1 est bien $\mathcal{O}$.

   Soient $x \in \mathbb{R}$ et $R > 0$. Soit $y \in B_2(x,R)$, on a $|\arctan(y) - \arctan(x)| < R$ donc

   $$\max\Big(-\frac{\pi}{2}, \arctan(x) - R\Big) < \arctan(y) < \min\Big(\frac{\pi}{2}, \arctan(x) + R\Big).$$

   On applique tan prolongée par la convention $\tan\big(\pm\frac{\pi}{2}\big) = \pm\infty$, qui est croissante sur $\big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]$. On obtient que $a = \tan\big(\max\big(-\frac{\pi}{2}, \arctan(x) - R\big)\big) < y < \tan\big(\min\big(\frac{\pi}{2}, \arctan(x) + R\big)\big) = b$. Inversement, si y vérifié cet encadrement, on peut remonter le calcul et $y \in B_2(x,R)$. Donc $B_2(x,R)$ est l'intervalle ouvert $]a,b[$ (éventuellement non borné).

   Inversement, soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$. On pose $R = \frac{\arctan(b) - \arctan(a)}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $x = \tan\Big(\frac{\arctan(b)+\arctan(a)}{2}\Big)$. Notons que $\frac{\arctan(b)+\arctan(a)}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $x \in \mathbb{R}$. Alors, le calcul ci-dessus montre que $B_2(x,R) =]a,b[$. Donc les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont exactement les boules ouvertes pour d_2. Donc $\mathcal{O}$ est la topologie métrique associée à d_2.

4. Les distances d_1 et d_2 de la question précédente sont-elles équivalentes ?

   Non. Si c'était le cas, il existerait $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

   $$n = d_1(0,n) \leqslant \frac{1}{\alpha} d_2(0,n) \leqslant \frac{1}{\alpha}\arctan(n) \leqslant \frac{\pi}{2\alpha}.$$

Exercice 5 (Stabilité de l'ensemble des voisinages)**.** Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Soient $A, B \subset X$ et $x \in X$.

1. Si $A \in \mathcal{V}(x)$ et $A \subset B$, montrer que $B \in \mathcal{V}(x)$.
   Il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset A$. Donc $x \in U \subset B$ et $B \in \mathcal{V}(x)$.
2. Si $A, B \in \mathcal{V}(x)$, montrer que $A \cap B \in \mathcal{V}(x)$.
   Il existe U et V ouverts tels que $x \in U \subset A$ et $x \in V \subset B$. Alors $x \in U \cap V \subset A \cap B$ et $U \cap V$ est ouvert. Donc $A \cap B \in \mathcal{V}(x)$.'

Exercice 6 (Boules, adhérence et intérieur)**.**

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient $x \in E$ et $R > 0$, montrer que $\mathring{B_F}(x, R) = B(x, R)$ et $\overline{B(x, R)} = B_F(x, R)$.
   On a $B(x, R)$ ouvert inclus dans $B_F(0, R)$, donc $B(x, R) \subset \mathring{B_F}(x, R)$. Soit $y \in \mathring{B_F}(x, R)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(y, 2\varepsilon) \subset \mathring{B_F}(x, R) \subset B_F(x, R)$. Si $y \notin B(x, R)$, alors $\|y - x\| = R$. Posons $z = y + \frac{\varepsilon}{R}(y - x)$ (faire un dessin). On a $\|z - y\| = \frac{\varepsilon}{R}\|y - x\| = \varepsilon$ donc $z \in B(x, 2\varepsilon)$. Cependant $\|z - x\| = (1 + \frac{\varepsilon}{R})\|y - x\| = R + \varepsilon$ donc $z \notin B_F(x, R)$. Contradiction, donc $y \in B(x, R)$. D'où $\mathring{B_F}(x, R) \subset B(x, R)$ et l'égalité.
   On a $B_F(x, R)$ fermé contenant dans $B(0, R)$, donc $\overline{B(x, R)} \subset B_F(x, R)$. Soit $y \in B_F(x, R)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $y_n = x + (1 - \frac{1}{n})(y - x)$ (faire un dessin). On a $y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} y$ et $y_n \in B(x, R)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc $y \in \overline{B(x, R)}$. D'où $B_F(x, R) \subset \overline{B(x, R)}$ et l'égalité.
2. Les relations précédentes sont-elles valables en général dans un espace métrique ?
   Soit X un ensemble de cardinal au moins 2 et d la distance discrète sur X. Soit $x \in X$, on a $B(x, 1) = \{x\}$ et $B_F(x, 1) = X$. Comme toute partie de X est ouverte et fermée pour la topologie discrète, on a :
   $$\mathring{B_F}(x, 1) = B_F(x, 1) = X \neq \{x\} = B(x, 1) = \overline{B(x, 1)}.$$
   Donc, en général, $\mathring{B_F}(x, 1) \neq B(x, 1)$ et $\overline{B(x, 1)} \neq B_F(x, 1)$.

Exercice 7 (Ouvert rencontrant l'adhérence)**.** Soit A une partie d'un espace topologique X. Soit U un ouvert de X, montrer que $U \cap A \neq \emptyset \iff U \cap \overline{A} \neq \emptyset$.
On a $A \subset \overline{A}$ donc $U \cap A \subset U \cap \overline{A}$, ce qui prouve le sens direct. Pour le sens réciproque, si $A \cap U = \emptyset$ alors A est contenu dans le fermé $X \setminus U$, donc $\overline{A}$ aussi.

Exercice 8 (Ensemble des valeurs d'adhérences)**.** Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'un espace topologique X. Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n \mid n \geqslant N\}}$.
Soit x une valeur d'adhérence de la suite. Soit $V \in \mathcal{V}(x)$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in V\}$ est infini. Soit $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que $x_n \in V$, i.e. $V \cap \{x_n \mid n \geqslant N\} \neq \emptyset$. Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $V \in \mathcal{V}(x)$ on a $V \cap \{x_n \mid n \geqslant N\} \neq \emptyset$. Donc $x \in \overline{\{x_n \mid n \geqslant N\}}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Donc $x \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n \mid n \geqslant N\}}$.
Soit $x \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n \mid n \geqslant N\}}$. Soit $V \in \mathcal{V}(x)$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, comme $x \in \overline{\{x_n \mid n \geqslant N\}}$ il existe $n \geqslant N$ tel que $x_n \in V$. Donc V contient une infinité de termes de la suite. C'est vrai pour tout voisinage de x, donc x est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 9 (Intérieur et adhérence)**.** Soient X un espace topologique et $A \subset X$.

1. Montrer que A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$.
   Si $A = \mathring{A}$ alors il est ouvert par définition de $\mathring{A}$. Si A est ouvert alors $A \subset \mathring{A} \subset A$, d'où l'égalité.
2. Montrer que A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.
   Si $A = \overline{A}$ alors il est fermé par définition de $\overline{A}$. Si A est fermé alors $\overline{A} \subset A \subset \overline{A}$, d'où l'égalité.

3. Notons $B = X \setminus A$, montrer que $\mathring{B} = X \setminus \overline{A}$ et $\overline{B} = X \setminus \mathring{A}$.
Soit U un ouvert tel que $U \subset B = X \setminus A$. On a $U \cap A = \emptyset$ et donc $U \cap \overline{A} = \emptyset$ d'après l'exercice 7. Ainsi, tout ouvert contenu dans B est contenu $X \setminus \overline{A}$. Donc $\mathring{B} \subset X \setminus \overline{A}$. Inversement, $X \setminus \overline{A}$ est un ouvert contenu dans B. Donc $X \setminus \overline{A} \subset \mathring{B}$, d'où l'égalité.
En échangeant les rôles de A et B, on obtient que $\mathring{A} = X \setminus \overline{B}$ et donc $\overline{B} = X \setminus \mathring{A}$.

Exercice 10 (Caractérisation sequentielle des fermés)**.** Soit X un espace topologique et $A \subset X$.

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans A qui converge vers $x \in X$. Montrer que $x \in \overline{A}$.
Soit $V \in \mathcal{V}(x)$. Comme $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $a_n \in V$. En particulier $A \cap V \neq \emptyset$. Donc tout voisinage de x rencontre A, donc $x \in \overline{A}$.

On suppose désormais que X est métrique.

2. Soit $x \in \overline{A}$, montrer qu'il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A \cap B(x, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$. On choisit donc $a_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n})$. Soit $a_0 \in A$ quelconque. Par définition, on a $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

Exercice 11 (Caractérisation séquentielle des valeurs d'adhérences)**.** Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace topologique X et A l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Soit $x \in X$.

1. S'il existe une extraction φ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, montrer que $x \in A$.
Soit $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $x_{\varphi(n)} \in V$. Donc
$$\{\varphi(n) \mid n \geqslant N\} \subset \{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in V\}$$
ce qui force l'ensemble de droite à être infini. Tout voisinage de x contient donc une infinité de termes de la suite et donc x est valeur d'adhérence.

On suppose désormais que X est métrique.

2. Si $x \in A$ est valeur d'adhérence, montrer qu'il existe une extraction φ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.
On construit par récurrence une extraction φ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. On pose $\varphi(0) = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\varphi(n)$ construit. Comme $B(x, \frac{1}{n+1})$ est un voisinage de x, cette boule contient une infinité de termes de la suite. En particulier il existe $k > n$ tel que $x_k \in B(x, \frac{1}{n+1})$. On pose alors $\varphi(n+1) = k > n$. On définit bien $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante de la sorte, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_{\varphi(n)} \in B(x, \frac{1}{n})$. Donc $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

Exercice 12 (Liminf et limsup)**.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minorée à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $i_n = \inf_{k\geqslant n} x_k$ est un réel bien défini.
L'ensemble $\{x_k \mid k \geqslant n\}$ est non-vide et minoré. Il admet donc une borne inférieure dans $\mathbb{R}$, qui est i_n.
2. Montrer que $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. La limite de $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée la *limite inférieure* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et est notée $\liminf_{n\to+\infty} x_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i_{n+1} = \inf\{x_k \mid k \geqslant n+1\} \geqslant \inf\{x_k \mid k \geqslant n\} = i_n$. Donc $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de réels, et donc elle admet une limite dans $\mathbb{R}$ ou diverge vers $+\infty$.
3. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si et seulement si $\liminf_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
Supposons que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Soit $M \geqslant 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $x_n \geqslant M$. Alors pour tout $n \geqslant N$ on a $i_n \geqslant M$. Donc $i_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Inversement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $i_n \leqslant x_n$, donc si $i_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

4. Si $\liminf_{n\to+\infty} x_n \in \mathbb{R}$, montrer que c'est la plus petite valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Supposons que $\ell = \liminf_{n\to+\infty} x_n \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell-\varepsilon \leqslant i_n \leqslant \ell$. Soit $n \geqslant N$, il existe $m \geqslant n$ tel que $\ell-\varepsilon < i_n = \inf_{k\geqslant n} x_k \leqslant x_m < i_n+\varepsilon < \ell+\varepsilon$. Donc pour tout $n \geqslant N$, il existe $m \geqslant n$ tel que $x_m \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$.

   Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ contient une infinité de valeurs de la suite, donc est une valeur d'adhérence.

   Si $a < \ell$, soit $\varepsilon = \frac{\ell-a}{2} > 0$. Pour tout n assez grand on a $a+\varepsilon < i_n \leqslant x_n$. Donc $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ contient au plus un nombre fini de valeurs de la suite, et a n'est pas valeur d'adhérence. Donc ℓ est bien la plus petite valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Remarque. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$, alors cette suite ne diverge pas vers $+\infty$ et $\liminf_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R}$.

Symétriquement, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors $s_n = \sup_{k\geqslant n} x_k$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ vers une quantité appelée la *limite supérieure* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et notée $\limsup_{n\to+\infty} x_n$. On a $\limsup_{n\to+\infty} = -\infty$ si et seulement si $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, et dans l'alternative $\limsup_{n\to+\infty} x_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n$ si et seulement si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, vérifier que $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_n$.

   Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors elle est bornée. Donc $\liminf_{n\to+\infty} x_n$ et $\limsup_{n\to+\infty} x_n$ sont bien définies et réelles. Dans ce cas, ℓ est la seule valeur d'adhérence de la suite, d'où $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_n$.

   Inversement, si $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n = \ell$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\ell - 1 \leqslant \inf_{k\geqslant n} x_k \leqslant \sup_{k\geqslant n} x_k \leqslant \ell + 1,$$

   donc la suite est bornée. De plus ℓ est l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$; c'est à la fois la plus petite et la plus grande. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact $[\ell-1, \ell+1]$ et admet une unique valeur d'adhérence. Elle converge donc vers cette valeur d'adhérence.

Exercice 13 (Continuité entre métriques)**.** Soit $f : X \to Y$ une applications entre deux métriques. Montrer que f est continue si et seulement si l'image réciproque de toute boule ouverte est ouverte.
Par définition, f est continue si et seulement si pour tout ouvert U de Y on a $f^{-1}(U)$ ouvert dans X. Si f est continue, on peut en particulier appliquer cela aux boules ouvertes de Y, qui sont ouvertes. Supposons que pour toute boule ouverte $B \subset Y$ on a $f^{-1}(B)$ ouvert dans X. Soit U un ouvert quelconque de Y. Par définition de la topologie métrique, il existe un ensemble I et des boules ouvertes $(B_i)_{i\in I}$ tels que $U = \bigcup_{i\in I} B_i$. Donc $f^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ est réunion d'ouverts de X, donc est ouvert. Donc f est continue.

Exercice 14. Donner un exemple d'application continue bijective qui n'est pas un homéomorphisme.
On considère $f : [0,1[\to \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ définie par $f : t \mapsto e^{2i\pi t}$. Elle est continue, car on a défini exp par une série entière de rayon de convergence infini. Elle est aussi bijective, car on a défini π pour que ce soit le cas !
On a $x_n := f(1-\frac{1}{n}) = e^{-\frac{2i\pi}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ dans $\mathbb{C}$ (par continuité en 0 de exp) donc dans $\mathbb{S}^1$ pour la topologie induite. Si $f^{-1} : \mathbb{S}^1 \to [0,1[$ était continue, on aurait $1-\frac{1}{n} = f^{-1}(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f^{-1}(1) = 0$ dans $[0,1[$, ce qui est absurde.

Exercice 15 (Continuité et topologie induite)**.** Soit $f : X \to Y$ continue entre espaces topologiques. On suppose f à valeurs dans $Z \subset Y$. Montrer que $f : X \to Z$ est continue pour la topologie induite.
Soit O un ouvert de Z. Il existe U ouvert de Y tel que $O = Z \cap U$. Comme $f(X) \subset Z$, on a $f^{-1}(O) = f^{-1}(U)$. Cet ensemble est ouvert de X par continuité de f (vue à valeurs dans Y). Donc f est continue (vue à valeurs dans Z). Tout va bien !

Exercice 16 (Produit dénombrable d'espaces métriques)**.** Soient $((X_i, d_i))_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'espaces métriques et $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$. On note $x = (x^{(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ un élément générique de X, et on définit l'application $d : (x, y) \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \min\big(1, d_i(x^{(i)}, y^{(i)})\big)$.

1. Montrer que d définit une distance sur X.
   Soient x et $y \in X$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a $0 \leqslant \frac{1}{2^i} \min\big(1, d_i(x^{(i)}, y^{(i)})\big) \leqslant \frac{1}{2^i}$. Donc la série définissant $d(x, y)$ est convergente. Donc $d : X \times X \to [0, +\infty[$ est bien définie.
   Comme la série est à termes positifs, $d(x, y) = 0 \iff \forall i \in \mathbb{N}, d_i(x^{(i)}, y^{(i)}) = 0 \iff x = y$. La symétrie est immédiate. Enfin, soient $x, y, z \in X$, pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a
   $$d_i(x^{(i)}, y^{(i)}) \leqslant d_i(x^{(i)}, z^{(i)}) + d_i(z^{(i)}, y^{(i)}),$$
   donc, en testant les quatre cas possibles pour le terme de droite on obtient :
   $$\min\Big(1, d_i(x^{(i)}, y^{(i)})\Big) \leqslant \min\Big(1, d_i(x^{(i)}, z^{(i)})\Big) + \min\Big(1, d_i(z^{(i)}, y^{(i)})\Big).$$
   Donc $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.
2. Soient $\ell \in X$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans X. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ dans (X, d) si et seulement si : pour tout $i \in \mathbb{N}$, $x_n^{(i)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^{(i)}$ dans (X_i, d_i).
   Supposons que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ dans (X, d). Soit $i \in \mathbb{N}$, on a
   $$\min\Big(1, d_i(x_n^{(i)}, \ell^{(i)})\Big) \leqslant 2^i d(x_n, \ell) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
   Donc ce minimum est plus petit que 1 pour n assez grand, et $d_i(x_n^{(i)}, \ell^{(i)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $x_n^{(i)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^{(i)}$ dans (X_i, d_i) pour tout $i \in \mathbb{N}$.
   Inversement, supposons que $x_n^{(i)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^{(i)}$ dans (X_i, d_i) pour tout $i \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{i>j} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$. Pour tout $i \in [\![0, j]\!]$, on a $x_n^{(i)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^{(i)}$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \in [\![0, j]\!]$ et tout $n \geqslant N$, $d_i(x_n^{(i)}, \ell^{(i)}) \leqslant \varepsilon$. Ici on a besoin de se ramener à considérer un nombre fini de composantes.
   Alors, pour tout $n \geqslant N$,
   $$d(x_n, \ell) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \min\Big(1, d_i(x_n^{(i)}, \ell^{(i)})\Big) \leqslant \sum_{i=0}^{j} \frac{1}{2^i} d_i(x_n^{(i)}, \ell^{(i)}) + \sum_{i>j} \frac{1}{2^i} \leqslant \varepsilon \left(\sum_{i=0}^{j} \frac{1}{2^i}\right) + \varepsilon \leqslant 3\varepsilon.$$
   Donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ dans (X, d).

Exercice 17 (Un exemple de compact)**.** Soit X un espace séparé (par exemple métrique). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X qui converge vers $x \in X$. Montrer que $K = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.

Comme K est une partie d'un espace séparé, il suffit de vérifier qu'il satisfait la propriété **(BL)**. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X qui recouvre K. Il existe $j \in I$ tel que $x \in U_j$. Alors U_j et un voisinage de x, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n > N$, $x_n \in U_j$.
Pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, il existe $i_n \in I$ tel que $x_n \in U_{i_n}$. Donc $K \subset U_j \cup \bigcup_{n=0}^{N} U_{i_n}$. Donc tout recouvrement ouvert de K admet un sous-recouvrement fini. Donc K est bien compact.

Exercice 18 (Compacts discrets)**.** Soit X un espace compact et discret, montrer que X est fini.
Comme X est discret, pour tout $x \in X$ on a $\{x\}$ ouvert. Donc $X = \bigcup_{x\in X}\{x\}$ est un recouvrement ouvert de X. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini. Hors, si on supprime l'un des ouverts, on ne recouvre plus X. Le recouvrement de départ est donc fini. Donc X est fini.

Exercice 19 (Compacts et convergence)**.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un compact X. Montrer que cette suite converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, alors x est valeur d'adhérence de la suite, voir exercice 11. Soit $y \neq x$, comme X est compact donc séparé, il existe $U \in \mathcal{V}(x)$ et $V \in \mathcal{V}(y)$ tels que $U \cap V = \emptyset$. Pour tout n assez grand, on a $x_n \in U$. Donc $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in V\}$ est fini. Donc y n'est pas valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc x est la seule valeur d'adhérence de la suite.
Inversement, supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette une unique valeur d'adhérence x. Si la suite ne converge pas vers x, alors il existe $U \in \mathcal{V}(x)$ ouvert tel que $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in X \setminus U\}$ est infini. En particulier, il existe une extraction φ telle que $x_{\varphi(n)} \in X \setminus U$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme U est ouvert, $X \setminus U$ est fermé dans X et donc compact. Donc $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence dans $X \setminus U$. En particulier, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence différente de x. Contradiction. Donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

Exercice 20 (Distance à un ensemble)**.** Soient (X, d) un espace métrique et Y une partie non-vide de X. Pour tout $x \in X$, on note $d(x, Y) = \inf_{y\in Y} d(x, y)$.

1. Soit $x \in X$, montrer que $d(x, Y)$ est bien définie.
   Comme $Y \neq \emptyset$, l'ensemble $\{d(x, y) \mid y \in Y\} \subset \mathbb{R}$ est non-vide et minoré par 0. Il admet donc une borne inférieure.
2. Montrer que $x \in \overline{Y}$ si et seulement si $d(x, Y) = 0$.
   Comme (X, d) est métrique, par l'exercice 10, on a $x \in \overline{Y}$ si et seulement si il existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans Y telle que $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, i.e. telle que $d(x, y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. L'existence d'une telle suite équivaut à $d(x, Y) = 0$.
3. Montrer que $d(\cdot, Y) : X \to \mathbb{R}$ est une application continue.
   Soient x_1 et $x_2 \in X$, pour tout $y \in Y$ on a $d(x_1, Y) \leqslant d(x_1, y) \leqslant d(x_2, y) + d(x_1, x_2)$. En passant à l'inf sur y dans le terme de droite, $d(x_1, Y) \leqslant d(x_2, Y) + d(x_1, x_2)$. Symétriquement, $d(x_2, Y) \leqslant d(x_1, Y) + d(x_1, x_2)$, d'où $|d(x_1, Y) - d(x_2, Y)| \leqslant d(x_1, x_2)$. Donc $d(\cdot, Y)$ est continue car 1-lipschitzienne.
4. Soient F fermé et K compact tels que $K \cap F = \emptyset$, montrer que $d(K, F) = \inf_{K\times F} d(x, y) > 0$.
   L'application $d(\cdot, F)$ est continue, donc elle atteint un minimum sur le compact K. Il existe donc $x \in K$ tel que $d(K, F) = d(x, F)$. Comme $K \cap F = \emptyset$ on a $x \notin F = \overline{F}$. Donc $d(x, F) > 0$.
5. Soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints de X, est-ce que $d(F_1, F_2) > 0$ en général ?
   Non. Dans $\mathbb{R}^2$ prendre F_1 l'axe horizontal et F_2 le graphe de exp.

Exercice 21 (Un exemple de topologie quotient)**.** Soit $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la projection canonique. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on définit $d_0(\pi(x), \pi(y)) = d(x + \mathbb{Z}, y + \mathbb{Z}) = \min_{n\in\mathbb{Z}}|y - x + n|$.

1. Montrer que d_0 définit une distance sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

   Soient x et $y \in \mathbb{R}$, alors

   $$d(x+\mathbb{Z}, y+\mathbb{Z}) = \inf_{p,q\in\mathbb{Z}} |(y+q)-(x+p)| = \inf_{n\in\mathbb{Z}} |y-x+n| = \min_{n\in\mathbb{Z}} |y-x+n|.$$

   Cette quantité ne dépend que des classes de y et x modulo 1. Donc d_0 définit bien une application de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ dans $[0, +\infty[$.

   Soient $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ et $\widetilde{z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $\pi(x) = \widetilde{x}$, $\pi(y) = \widetilde{y}$ et $\pi(z) = \widetilde{z}$. Si $d_0(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 0$ alors $\min_{n\in\mathbb{Z}} |y-x+n| = 0$, donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y+n$ et donc $\widetilde{x} = \widetilde{y}$. Inversement, si $\widetilde{x} = \widetilde{y}$ alors x et y diffèrent d'un entier et $d_0(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 0$. La symétrie de d est claire. Enfin pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$,

   $$d_0(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \leqslant |(y+q)-(x+p)| \leqslant |y-z+q| + |z-x-p|.$$

   En passant à l'infimum sur p et q dans le terme de droite, on obtient $d_0(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \leqslant d_0(\widetilde{x}, \widetilde{z}) + d_0(\widetilde{z}, \widetilde{y})$. Finalement, d_0 est bien une distance.

2. Montrer que π est continue et ouverte, c'est-à-dire que l'image de tout ouvert est ouverte.

   D'après l'exercice 13, pour montrer que π est continue, il suffit de montrer que l'image réciproque de toute boule ouverte dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est ouverte dans $\mathbb{R}$.

   Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $R > 0$. On a $d_0(\pi(x), \pi(y)) < R$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|y-x+n| < R$, c'est-à-dire si et seulement si $y \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]x+n-R, x+n+R[$. Donc

   $$B(\pi(x), R) = \pi\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]x+n-R, x+n+R[\right) = \pi(]x-R, x+R[).$$

   Attention, si $R > \frac{1}{2}$ alors $B(\pi(x), R) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

   On a donc $\pi^{-1}(B(\pi(x), R)) = \pi^{-1}(\pi(]x-R, x+R[)) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]x+n-R, x+n+R[$, et cet ensemble est bien ouvert pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. Donc π est continue.

   Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $x \in U$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$. On a alors $B(\pi(x), \varepsilon) = \pi(]x-\varepsilon, x+\varepsilon[) \subset \pi(U)$. Donc $\pi(U)$ est voisinage de $\pi(x)$. Donc $\pi(U)$ est voisinage de chacun de ses points donc est ouvert. Donc π est une application ouverte.

On note $f : t \to e^{2i\pi t}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Comme f est surjective et $f(x) = f(y)$ si et seulement si $\pi(x) = \pi(y)$, cette fonction induit une bijection $\widetilde{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$ telle que $f = \widetilde{f} \circ \pi$.

3. Déduire de la question précédente que $\widetilde{f}$ est continue.

   La fonction f est continue, car on connait bien exp., définie par une série entière de rayon de convergence inifini. Soit U un ouvert de $\mathbb{S}^1$, on a $f^{-1}(U)$ ouvert de $\mathbb{R}$ par continuité de f. Or, $f^{-1}(U) = \pi^{-1}\left(\widetilde{f}^{-1}(U)\right)$. Donc $\widetilde{f}^{-1}(U) = \pi\big(f^{-1}(U)\big)$. Comme on a vu que π est ouverte, $\widetilde{f}^{-1}(U)$ est ouvert dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Donc $\widetilde{f}$ est continue.

4. Montrer que $\widetilde{f}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{S}^1$.

   On sait déjà que $\widetilde{f}$ est une bijection continue. Comme π est continue, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est métrique et $[0, 1]$ compact, on a que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \pi([0, 1])$ est compact. Enfin, comme $\mathbb{S}^1$ est séparé (car métrique), $\widetilde{f}$ est un homéomorphisme.

Exercice 22 (Théorème de Dini)**.** Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $f(x)$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit $U_n = \{x \in X \mid f_n(x) > f(x) - \varepsilon\} = (f - f_n)^{-1}(] - \infty, \varepsilon[)$. Comme f et f_n sont continues, U_n est ouvert.
Si $x \in U_n$ alors $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x) > f(x) - \varepsilon$ et donc $x \in U_{n+1}$. Donc $U_n \subset U_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $x \in X$, comme $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $x \in U_m$. Donc $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$.
Par compacité de X, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $X = \bigcup_{n=0}^{N} U_n = U_N$. Soit $n \geqslant N$, pour tout $x \in X$, on a $f(x) \geqslant f_n(x) \geqslant f_N(x) > f(x) - \varepsilon$. Donc $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$. Ainsi $\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Exercice 23 (Fonctions localement constantes sur un connexe)**.** Soit X un espace connexe.

1. Soit $f : X \to Y$ une application localement constante, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$ il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que f est constante sur V. Montrer que f est constante.
   Soient $y \in Y$ et $x \in f^{-1}(y)$. Il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \subset f^{-1}(y)$. Donc $f^{-1}(y)$ est voisinage de chacun de ses points, donc est ouvert. Alors $X = \bigsqcup_{y \in Y} f^{-1}(y)$ est une partition ouverte de X. Par connexité, il existe $y_0 \in Y$ tel que $X = f^{-1}(y_0)$. Donc f est constante.
2. Soient Z un espace discret et $f : X \to Z$ continue, montrer que f est constante.
   Soit $z \in Z$, comme Z est discret $\{z\}$ est ouvert. Comme f est continue, $f^{-1}(z)$ est donc ouvert. En particulier f est localement constante. Donc f est constante par la question précédente.

Exercice 24 (Union de connexes)**.** Soient $(C_i)_{i \in I}$ des parties connexes d'un espace topologique X.

1. On suppose que $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$. Montrer que $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.
   Soit $g : \bigcup_{i \in I} C_i \to \{0, 1\}$ continue. Soit $x \in \bigcap_{i \in I} C_i$, sans perte de généralité on peut supposer que $g(x) = 0$. Pour tout $i \in I$, la restriction $g_{|C_i}$ est continue, donc constante, donc $C_i \in g^{-1}(0)$. Donc $\bigcup_{i \in I} C_i \subset f^{-1}(0)$ et f est constante.
2. Donner un contre-exemple si $\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$. La condition $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$ est-elle nécessaire ?
   Deux singletons distincts dans $\mathbb{R}$ donnent un exemple de deux connexes dont la réunion n'est pas connexe. Cependant, la condition $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$ n'est pas nécessaire. On peut par exemple considérer les trois côtés d'un triangle non dégénéré dans le plan. Chaque côté est un segment, en particulier connexe. L'intersection des trois côtés est vide, mais leur réunion est connexe (par arcs).

Exercice 25 (Produit de connexes)**.** Soient $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des connexes. Montrer que $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ est connexe pour la topologie produit.
Soit $g : X \to \{0, 1\}$ continue. Soient $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, il suffit de montrer que $g(x) = g(y)$. On en déduira que g est constante, et donc la connexité de X.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $z_k = (y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$, en particulier $z_0 = x$ et $z_n = y$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$, considérons $g_k : X_k \to \{0, 1\}$ définie par $g_k : z \mapsto g(y_1, \ldots, y_{k-1}, z, x_{k+1}, \ldots, x_n)$. La fonction g_k est continue sur X_k comme composée de deux applications continues. Elle est donc constante par connexité de X_k. On a donc $g(z_k) = g_k(y_k) = g_k(x_k) = g(z_{k-1})$. C'est valable pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, donc $g(x) = g(z_0) = \cdots = g(z_n) = g(y)$.

Exercice 26 (Théorème de passage des douanes)**.** Soient A une partie connexe d'un espace topologique X. Soit $B \subset X$ tel que $A \cap B \neq \emptyset$ et $A \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$, montrer que $A \cap \partial B \neq \emptyset$.
Les deux ensembles $A \cap \mathring{B}$ et $A \cap (X \setminus \overline{B})$ sont des ouverts disjoints de A. Comme $X = \mathring{B} \sqcup \partial B \sqcup (X \setminus \overline{B})$, si $A \cap \partial B = \emptyset$ alors la connexité de A impose que $A \cap \mathring{B} = \emptyset$ ou $A \cap (X \setminus \overline{B}) = \emptyset$. Dans le premier cas, on aurait $A \cap B \subset (A \cap \mathring{B}) \cup (A \cap \partial B) = \emptyset$. Dans le second on aurait $A \subset \overline{B}$. Dans les deux cas on obtient une contradiction. Donc $A \cap \partial B \neq \emptyset$.

Exercice 27 (Connexe mais pas par arcs)**.** Soit $X = \left\{ \left(t, \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) \mid t > 0 \right\} \sqcup (\{0\} \times [-1, 1]) \subset \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $Y = \left\{ \left(t, \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) \mid t > 0 \right\}$ est connexe. En déduire que X est connexe.

   L'ensemble Y est le graphe de $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ sur $]0, +\infty[$. C'est l'image du connexe $]0, +\infty[$ par $t \mapsto \left(t, \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ continue, donc Y est connexe. Donc $\overline{Y}$ est connexe. On va vérifier que $\overline{Y} = X$ dans $\mathbb{R}^2$.

   Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de Y. Il existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $y_n = \left(t_n, \sin\left(\frac{1}{t_n}\right)\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi, vers une certaine limite t. Si $t > 0$, alors $\sin\left(\frac{1}{t_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ par continuité en t. Et donc $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left(t, \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) \in Y$. Si $t = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} y_n \in \{0\} \times [-1, 1]$. Dans les deux cas, la limite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans X, donc $\overline{Y} \subset X$.

   Inversement, soit $\ell \in X$. Si $\ell \in Y$ alors $\ell \in \overline{Y}$. Sinon, il existe $\alpha \in [-1, 1]$ tel que $\ell = (0, \alpha)$. Alors $\left(\left(\frac{1}{\arcsin(\alpha)+2n\pi}, \alpha\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite à valeurs dans Y qui converge vers ℓ. Donc $\ell \in \overline{Y}$. Donc $X \subset \overline{Y}$ d'où l'égalité.

2. Vérifier que X n'est pas connexe par arcs.

   Par l'absurde, supposons que X est connexe par arcs. Il existe alors $\gamma : [0, 1] \to X$ continu joignant $(0, 0)$ à $(1, \sin(1))$, c'est-à-dire $\gamma(0) = (0, 0)$ et $\gamma(1) = (1, \sin(1))$.

   L'ensemble $K = \gamma^{-1}(\{0\} \times [-1, 1])$ est non-vide, car $0 \in K$, et majoré par 1. Il admet donc une borne supérieure $s_0 \in [0, 1]$. Par ailleurs, K est fermé car $\{0\} \times [-1, 1]$ est fermé et γ est continu. Donc $s_0 \in K$. En particulier $s_0 < 1$.

   Le chemin γ étant continu sur $[0, 1]$, il est uniformément continu par le théorème de Heine. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $a, b \in [0, 1]$ si $|b - a| < \varepsilon$ alors $\|\gamma(b) - \gamma(a)\| < 1$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$. Quitte à réduire, on peut supposer que $s_0 + \varepsilon \leqslant 1$. Alors, pour tout $a, b \in]s_0, s_0 + \varepsilon[\subset [0, 1]$ on a $\|\gamma(b) - \gamma(a)\| < 1$.

   Notons p_1 la projection sur l'axe des abscisse dans $\mathbb{R}^2$. Comme les fonctions p_1 et γ sont continues, $p_1(\gamma([s_0, s_0 + \varepsilon]))$ est un intervalle contenant $p_1(\gamma(s_0)) = 0$ et $p_1(\gamma(s_0 + \varepsilon)) > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand, $\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \in]0, p_1(\gamma(s_0 + \varepsilon))[$, il existe donc $b \in]s_0, s_0 + \varepsilon[$ tel que $p_1(\gamma(b)) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$. Mais $\gamma(b) \in Y$, donc $\gamma(b) = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}, 1\right)$. De même, il existe $a \in]s_0, s_0 + \varepsilon[$ tel que $p_1(\gamma(a)) = \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2n\pi}$, et alors $\gamma(a) = \left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2n\pi}, -1\right)$. On a donc a et $b \in]s_0, s_0 + \varepsilon[$ tels que $\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \geqslant 2$. Contradiction. Donc X n'est pas connexe par arcs.

Exercice 28 (Ouverts connexes)**.** Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et U un ouvert connexe de E. Montrer que U est connexe par arcs.

Soit $x \in U$, on note $A = \{y \in U \mid \exists\gamma : [0, 1] \to U \text{ continu tel que } \gamma(0) = x \text{ et } \gamma(1) = y\}$ la composante connexe par arcs de x dans U. On va montrer que A est ouverte et fermée dans U. Comme $A \neq \emptyset$, par connexité de U on en déduira $A = U$ et donc que U est connexe par arcs.

Soit $y \in A$, il existe γ chemin continu de x à y dans U. Comme $y \in U$ et U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(y, \varepsilon) \subset U$. Pour tout $z \in B(y, \varepsilon)$, le segment $[y, z]$ est un chemin continu de y à z dans U. En le concaténant avec γ on obtient un chemin continu de x à z dans U. Donc $B(y, \varepsilon) \subset A$. Donc A est voisinage de chacun de ses points, donc ouvert dans E, et donc dans U.

Soit $z \in U$ tel que $z \in \overline{A}$. Comme U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(z, \varepsilon) \subset U$. Comme $z \in \overline{A}$, il existe $y \in B(z, \varepsilon)$ tel que $y \in A$. Comme précédemment, il existe un chemin continu γ de x à y dans U, et le segment $[y, z]$ est un chemin continu de y à z dans $B(z, \varepsilon) \subset U$. En les concaténant on montre que $z \in A$. Donc A est fermé dans U.

Notons que A n'est pas fermé dans E, vu qu'à posteriori $A = U$.

Exercice 29 (Composantes connexes ouvertes)**.** Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et U un ouvert de E. Montrer que les composantes connexes de U sont ouvertes (dans U ou E, c'est pareil).

Soit C une composante connexe de U. Soit $x \in C$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U$. Alors $C \cup B(x, \varepsilon)$ est connexe, donc inclus dans la composante connexe de x, qui est C. Donc $B(x, \varepsilon) \subset C$ et C est voisinage de x. Donc C est ouverte.

Exercice 30 (Description des ouverts de $\mathbb{R}$)**.** Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.
Soit $U \subset \mathbb{R}$ ouvert, notons $(C_i)_{i\in I}$ ses composantes connexes. Pour tout $i \in I$, on sait que $C_i \subset \mathbb{R}$ est connexe par définition, donc C_i est un intervalle. Par l'exercice 29, cet intervalle est ouvert.
En particulier, chacun des intervalles $(C_i)_{i\in I}$ contient un rationnel, ce qui donne une surjection de $\mathbb{Q} \cap U$ vers I et montre que I est au plus dénombrable. La conclusion suit alors de $U = \bigsqcup_{i\in I} C_i$.

Exercice 31 (Composante non ouverte)**.** Donner un exemple de composante connexe non ouverte.
On considère l'ensemble $A = \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$. Déterminons ses composantes connexes.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $B(\frac{1}{n}, \frac{1}{10n^2}) \cap A = \{\frac{1}{n}\}$, donc $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ est ouvert et fermé dans A. Soit $C \subset A$ connexe tel que $\frac{1}{n} \in C$. Alors $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ est ouvert et fermé dans C, donc $C = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ par connexité. Donc $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ est la composante connexe de $\frac{1}{n}$ dans A. Comme les composantes connexes forment une partition de A, la composante connexe de 0 ne contient aucun des $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et est donc $\{0\}$.
Ainsi, les composantes connexes de A sont toutes des singletons. Elles sont en particulier fermées (dans A et dans $\mathbb{R}$). On a vu que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ est aussi ouvert de A.
Par contre $\{0\}$ n'est pas ouvert dans A. Si $\{0\}$ était ouvert dans A, il existerait U ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $\{0\} = A \cap U$. En particulier, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $]-\varepsilon, \varepsilon[\cap A = \{0\}$. Ce n'est pas le cas puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 32 (Connexité dans les espaces de matrices)**.** On munit l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ de son unique topologie normée, et ses sous-ensembles de la topologie induite.

1. Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe. On rappelle que les transvections engendrent $SL_n(\mathbb{R})$.
   Une transvection est une application linéaire dont la matrice dans une bonne base $A(1)$, où
   $$\forall t \in [0,1], \qquad A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Soit $M \in SL_n(\mathbb{R})$, il existe $m \in \mathbb{N}$ des transvections $T_1, \dots, T_m$ tels que $M = T_1 \dots T_m$, voir par exemple Perrin chap. IV. Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, il existe $P_i \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $T_i = P_i A(1) P_i^{-1}$. Alors $\gamma : t \mapsto P_1 A(t) P_1^{-1} P_2 A(t) P_2^{-1} \dots P_m A(t) P_m^{-1}$ est un chemin continu de Id à M dans $SL_n(\mathbb{R})$. Donc $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, en particulier connexe.
2. Déterminer les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$.
   Si $GL_n(\mathbb{R})$ était connexe, son image par l'application continue det serait un connexe de $\mathbb{R}$. Or $\det(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$ n'est pas connexe. Donc $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe non plus. Soient $C_+ = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) > 0\}$ et $C_- = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) < 0\}$. On va montrer que C_+ et C_- sont les deux composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$.
   Soit $M \in C_+$, alors $t \mapsto \begin{pmatrix} (1-t)+\frac{t}{\det(M)} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} M$ est un chemin continu dans C_+ de M vers une matrice de $SL_n(\mathbb{R})$. Comme on a vu à la question précédente que $SL_n(\mathbb{R}) \subset C_+$ est

connexe par arcs, il existe un chemin continu dans C_+ de M vers Id. Donc C_+ est connexe par arcs, donc connexe. Par ailleurs, $C_+ = \det^{-1}(]0, +\infty[)$ est ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ et donc de $GL_n(\mathbb{R})$, et $C_+ = \det^{-1}([0, +\infty[) \cap GL_n(\mathbb{R})$ est fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ (mais pas de $M_n(\mathbb{R})$).

Soit Γ la composante connexe de Id dans $GL_n(\mathbb{R})$. Par ce qui précède, $C_+ \subset \Gamma$. Donc C_+ est non-vide, ouvert et fermé dans Γ connexe. Donc $C_+ = \Gamma$. Donc C_+ est bien une composante connexe de $GL_n(\mathbb{R})$.

L'involution continue $M \mapsto \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} M$ échange C_+ et C_-. En particulier C_+ et C_- sont homéomorphes, et donc C_- est connexe (par arcs), ouvert et fermé dans $GL_n(\mathbb{R})$. On vérifie comme ci-dessus que C_- est la composante connexe dans $GL_n(\mathbb{R})$ de $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$. Donc C_- est bien une composante connexe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Comme $GL_n(\mathbb{R}) = C_+ \sqcup C_-$ on a bien trouvé toutes les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 33 (Suites de Cauchy)**.** Soient (X, d) un métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X.

1. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge montrer qu'elle est de Cauchy.
   Notons ℓ la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $d(x_n, \ell) < \varepsilon$. Alors pour tout $p, q \geqslant N$ on a $d(x_p, x_q) \leqslant d(x_p, \ell) + d(\ell, x_q) < 2\varepsilon$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
2. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, montrer qu'elle est bornée.
   Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour, tout $p, q \geqslant N$, $d(x_p, x_q) \leqslant 1$. Soit
   $$R = \max(\{d(x_N, x_i) \mid 0 \leqslant i < N\} \cup \{1\}).$$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d(x_n, x_N) \leqslant R$ et donc $x_n \in B_F(x_N, R)$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
3. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et admet une valeur d'adhérence, montrer qu'elle converge.
   Notons ℓ une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ dès que $p, q \geqslant N$. On sait que $B(\ell, \varepsilon)$ contient une infinité de termes de la suite. En particulier, il existe $p \geqslant N$ tel que $x_p \in B(\ell, \varepsilon)$. Mais alors pour tout $q \geqslant N$ on a $x_q \in B(\ell, 2\varepsilon)$. Donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Exercice 34 (Calcul approché de racine)**.** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) < 0 < f(b)$. On suppose qu'il existe des constantes m et M telle que $0 < m \leqslant f'(t) \leqslant M$ pour tout $t \in [a, b]$.

1. Montrer qu'il existe un unique $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = 0$.
   Comme f est continue et $f(a) < 0 < f(b)$, un tel x existe par théorème des valeurs intermédiaires. L'hypothèse sur la dérivée dit que f est strictement croissante, d'où l'unicité.
2. Soit $\varphi : t \mapsto t - \frac{f(t)}{M}$, montrer que $\varphi([a, b]) \subset [a, b]$ et que φ est $\left(1 - \frac{m}{M}\right)$-contractante.
   On a $\varphi(a) = a - \frac{f(a)}{M} > a$ et $\varphi(b) = b - \frac{f(b)}{M} < b$. Par ailleurs φ est dérivable et sa dérivée vérifie pour tout $t \in [a, b]$, $\varphi'(t) = 1 - \frac{f'(t)}{M} \in [0, 1 - \frac{m}{M}]$. Comme φ' est positive, φ est croissante et donc $\varphi([a, b]) \subset [\varphi(a), \varphi(b)] \subset [a, b]$.
   Comme φ' est bornée par $(1 - \frac{m}{M}) \in [0, 1[$, la fonction φ est $(1 - \frac{m}{M})$-contractante par l'inégalité des accroissements finis.
3. Soit $x_0 \in [a, b]$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et évaluer la vitesse de convergence.

Comme φ est contractante, elle admet un unique point fixe sur $[a,b]$, par le théorème du point fixe de Picard. Ce point fixe vérifie $\varphi(t)=t$, donc $f(t)=0$ et donc $t=x$.
Quel que soit $x_0 \in [a,b]$, on a $|x_{n+1}-x| = |\varphi(x_n)-\varphi(x)| \leqslant (1-\frac{m}{M})|x_n - x|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par récurrence, on en déduit que $|x_n - x| \leqslant (1-\frac{m}{M})^n |x_0 - x| \leqslant (1-\frac{m}{M})^n (b-a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, et la convergence est au moins géométrique de raison $(1-\frac{m}{M}) \in [0,1[$.

Remarque. Si $[a,b]=[0,1]$ et $\frac{m}{M}=\frac{9}{10}$ (ce qui veut dire qu'on a une bonne estimation sur f') alors on gagne une décimale à chaque itération.

Exercice 35 (Continuité des applications linéaires)**.** Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés et $L : E \to F$ une application linéaire, montrer que les énoncés suivants sont équivalents.

1. Il existe $C \geqslant 0$ tel que $\forall x \in E$, $\|L(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$.
2. L est lipschitzienne.
3. L est uniformément continue sur E.
4. L est continue sur E.
5. L est continue en 0.

Si (1) est vrai alors, par linéarité, pour tout $x, y \in E$ on a $\|L(y)-L(x)\|_F = \|L(y-x)\|_F \leqslant C\|y-x\|_E$. Donc (2) est vrai. Les implications (2) $\implies$ (3) $\implies$ (4) $\implies$ (5) sont claires. Il reste donc à prouver (5) $\implies$ (1).
Supposons donc que L est continue en 0. Il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in B(0,\delta)$, $L(x) \in B(0,1)$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$, on a $\frac{\delta}{2\|x\|_E} x \in B(0,\delta)$ et donc

$$1 > \left\| L\left(\frac{\delta}{2\|x\|_E} x\right)\right\|_F = \frac{\delta}{2\|x\|_E}\|L(x)\|_F.$$

Donc $\|L(x)\|_F < \frac{2}{\delta}\|x\|_E$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$. C'est encore valable pour $x=0$, ce qui établit (1).

Exercice 36 (Norme d'opérateur)**.** Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ trois espaces normés.

1. Montrer que la norme d'opérateur définit bien une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.
   Soit $L \in \mathcal{L}(E,F)$, si $\|L\|=0$, alors pour tout $x \neq 0$, $\|L(x)\|_F \leqslant \|L\|\|x\|_E = 0$. Donc $L=0$.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \neq 0$ on a $\frac{\|\lambda L(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E}$. En passant au sup sur $x \in E \setminus \{0\}$ on obtient $\|\lambda L\| = |\lambda|\|L\|$.
   Soient L et $K \in \mathcal{L}(E,F)$, on a $\|(L+K)(x)\|_F \leqslant \|L(x)\|_F + \|K(x)\|_F \leqslant (\|L\|+\|K\|)\|x\|_E$ pour tout $x \in E$. Donc $\|L+K\| \leqslant \|L\|+\|K\|$. Ainsi $\|\cdot\|$ définit bien une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.
2. Montrer que pour tout $L \in \mathcal{L}(E,F)$ et $K \in \mathcal{L}(F,G)$ on a $K \circ L \in \mathcal{L}(E,G)$ et $\|K \circ L\| \leqslant \|L\|\|K\|$.
   Les applications L et K sont linéaires et continues, donc leur composée aussi. Pour tout $x \in E$ on a $\|K(L(x))\|_G \leqslant \|K\|\|L(x)\|_F \leqslant \|K\|\|L\|\|x\|_E$. Donc $\|K \circ L\| \leqslant \|K\|\|L\|$.

Exercice 37 (Espace des applications linéaires continues)**.** Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et $(F, \|\cdot\|_F)$ un Banach, montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ muni de la norme d'opérateur est un Banach.
Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy à valeurs dans $\mathcal{L}(E,F)$. Soit $x \in E$, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ on a

$$\|L_p(x) - L_q(x)\|_F = \|(L_p - L_q)(x)\|_F \leqslant \|L_p - L_q\|\|x\|_E. \tag{i}$$

Donc $(L_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(F, \|\cdot\|_F)$. Elle converge donc vers une limite que l'on note $L(x) \in F$.

Pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$L(x+\lambda y) = \lim_{n\to+\infty} L_n(x+\lambda y) = \lim_{n\to+\infty} L_n(x) + \lambda L_n(y) = L(x) + \lambda L(y).$$

Donc $L : E \to F$ est linéaire. Il faut vérifier qu'elle est continue. Comme $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, elle bornée, disons par $M > 0$ (voir exercice 33). Alors pour tout $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $\|L_n(x)\|_F \leqslant \|L\|\|x\|_E \leqslant M\|x\|_E$. En passant à la limite $n \to +\infty$, on obtient $\|L(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E$. Donc L est continue, de norme au plus M.
Il reste à vérifier que $L_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geqslant N$ on ait $\|L_p - L_q\| < \varepsilon$. Soient $x \in E$ et $p, q \geqslant N$, en reprenant (i) on a $\|L_p(x) - L_q(x)\| \leqslant \varepsilon\|x\|_E$. En passant à la limite $q \to +\infty$, on a donc $\|(L_p - L)(x)\|_F \leqslant \varepsilon\|x\|_E$ pour tout $x \in E$, donc $\|L_p - L\| \leqslant \varepsilon$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant N$ on ait $\|L - L_p\| \leqslant \varepsilon$. Donc $L_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$. Finalement, $\mathcal{L}(E,F)$ est complet.

Exercice 38 (Espace des applications continues)**.** Soient (K,d) un compact et $(F, \|\cdot\|)$ un Banach, montrer que $\mathcal{C}^0(K,F)$ muni de la norme sup $\|\cdot\|_\infty$ est un Banach.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy à valeurs dans $\left(\mathcal{C}^0(K,F), \|\cdot\|_\infty\right)$. D'après l'exercice 33 elle est bornée, disons par $M > 0$.
Soit $x \in K$, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ on a $\|f_p(x) - f_q(x)\|_F \leqslant \|f_p - f_q\|_\infty$ donc $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans le Banach $(F, \|\cdot\|_F)$. Elle converge donc vers une limite $f(x)$. Cela définit une fonction $f : K \to F$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geqslant N$ on ait $\|f_p - f_q\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Alors pour tout $p, q \geqslant N$ pour tout $x \in K$ on a $\|f_p(x) - f_q(x)\| \leqslant \varepsilon$. En passant à la limite $q \to +\infty$, $\|f_p(x) - f(x)\|_F \leqslant \varepsilon$. Comme cette estimation est uniforme en $x \in K$, la quantité $\|f_p - f\|_\infty = \sup_{x\in K}\|f_p(x) - f(x)\|_F$ est bien définie, et inférieure à ε. Notons qu'on ne sait pas encore que $f_p - f$ est continue. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$. C'est-à-dire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.
Il reste à vérifier que f est continue. Soient $x, y \in K$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|f(y) - f(x)\| \leqslant \|f(y) - f_n(y)\| + \|f_n(y) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant 2\|f_n - f\|_\infty + \|f_n(y) - f_n(x)\|.$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$. Par continuité de f_n, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que pour tout $y \in V$ on ait $\|f_n(y) - f_n(x)\|_F < \varepsilon$. Alors, pour tout $y \in V$ on a $\|f(y) - f(x)\|_F < 3\varepsilon$. Donc f est continue en x, donc sur K. Donc $f \in \mathcal{C}^0(K,F)$. Finalement, $\mathcal{C}^0(K,F)$ est bien complet.

Exercice 39 (Quelques contre-exemples)**.**

1. Donner un exemple concret d'espace normé qui n'est pas de Banach.
   Dans l'espace $L^1([0,1])$, muni de la norme définie par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$ pour tout f, on a $\mathcal{C}^0([0,1]) \subset L^1([0,1])$ dense. En particulier, $\mathcal{C}^0([0,1])$ n'est pas fermé dans $L^1(\mathbb{R})$ donc n'est pas complet pour $\|\cdot\|_1$. Ainsi $\left(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_1\right)$ est un espace normé qui n'est pas de Banach.
2. Donner un exemple concret d'application linéaire non continue entre espaces vectoriels normés.
   Toujours sur $\left(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_1\right)$, on peut considérer l'application linéaire $\mathrm{ev} : f \mapsto f(0)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto e^{-nx}$. On a $f_n \in \mathcal{C}^0([0,1])$ et

   $$\|f_n\|_1 = \int_0^1 e^{-nx}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\left[e^{-nx}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-n}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   Donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour $\|\cdot\|_1$. Si ev était continue, on aurait $1 = f_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0) = 0$. C'est absurde, donc ev n'est pas continue.

Exercice 40 (Continuité de l'application inverse)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un Banach.

1. Montrer que $GL(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$.
   Soient $L \in GL(E)$ et $H \in \mathcal{L}(E)$, on écrit $L+H = L(\mathrm{Id} - K)$ où $K = -L^{-1}H$. Si $\|H\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|}$ alors $\|K\| < 1$, donc $\mathrm{Id} - K \in GL(E)$ d'après le lemme de Neumann. Donc le groupe $GL(E)$ contient $L + H$.
   Donc $GL(E)$ contient la boule ouverte de centre L et de rayon $\frac{1}{\|L^{-1}\|}$. Ainsi $GL(E)$ est voisinage de chacun de ses points, donc est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que l'application $\mathrm{Inv} : L \mapsto L^{-1}$ est continue de $GL(E)$ dans lui-même.
   Avec les mêmes notations qu'à la question précédente, si $H \in B(L, \frac{1}{\|L^{-1}\|})$ on a :

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{Inv}(L+H) - \mathrm{Inv}(L)\| &= \left\|(L+H)^{-1} - L^{-1}\right\| = \left\|\left((\mathrm{Id} - K)^{-1} - \mathrm{Id}\right)L^{-1}\right\| \\
&\leqslant \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} K^n - \mathrm{Id}\right\| \|L^{-1}\| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \|K\|^n \|L^{-1}\| = \frac{\|K\|\|L^{-1}\|}{1 - \|K\|} \\
&\leqslant \frac{\|H\|\|L^{-1}\|^2}{1 - \|H\|\|L^{-1}\|} \xrightarrow[H\to 0]{} 0.
\end{aligned}$$

   Donc Inv est continue en L, pour tout $L \in GL(E)$.