Exercices de Calcul Différentiel

Thomas Letendre

Prépa Agreg – Automne 2024

Exercice 1 (Petits o)**.** Soient X un espace topologique, $Y \subset X$ et $a \in \overline{Y}$. Soient $f : Y \to F$ et $g : Y \to G$, où F et G sont des espaces normés. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents.

1. On a $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.
2. Il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ et $\eta : Y \cap V \to [0, +\infty[$ tel que $\|f\|_F = \eta\|g\|_G$ sur $Y \cap V$ et $\eta(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
3. Pour tout $\delta > 0$, il existe $W \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\forall x \in Y \cap W$, $\|f(x)\|_F \leqslant \delta\|g(x)\|_G$.

Supposons (1). Il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ et $\varepsilon : Y \cap V \to F$ telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et $f = \varepsilon\|g\|_G$ sur $Y \cap V$. Notons $\eta = \|\varepsilon\|_F$, on a $\|f\|_F = \eta\|g\|_G$ sur $Y \cap V$ et $\eta(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Donc (1) $\implies$ (2).
Supposons (2). Soit $\delta > 0$, il existe $W \in \mathcal{V}(a)$ tel que $W \subset V$ et $\forall x \in Y \cap W$, $0 \leqslant \eta(x) < \delta$, puisque $\eta(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et η est à valeurs positives. Donc $\forall x \in Y \cap W$, $\|f(x)\|_F < \delta\|g(x)\|_G$, d'où (3).
Supposons (3). Soit $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\forall x \in Y \cap V$, $\|f(x)\|_F \leqslant \|g(x)\|_G$. On définit $\varepsilon : Y \cap V \to F$ par $\varepsilon(x) = \frac{1}{\|g(x)\|_G} f(x)$ si $g(x) \neq 0$ et $\varepsilon(x) = 0$ si $g(x) = 0$. Pour tout $x \in Y \cap V$ on a $f(x) = \varepsilon(x)\|g(x)\|_G$. En effet, si $g(x) = 0$ alors $f(x) = 0$, et si $g(x) \neq 0$ on a défini $\varepsilon(x)$ pour ça.
Soit $\delta > 0$, il existe $W \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\|f\|_x \leqslant \delta\|g\|_G$ sur $Y \cap W$. Quitte à considérer $V \cap W$, on peut supposer que $W \subset V$. Pour tout $x \in Y \cap W$, si $g(x) = 0$ alors $\varepsilon(x) = 0$. Sinon $\|\varepsilon(x)\|_F = \frac{\|f(x)\|_F}{\|g(x)\|_G} \leqslant \delta$. Donc, $\forall x \in Y \cap W$, $\|\varepsilon(x)\| \leqslant \delta$. Donc $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Ainsi (3) $\implies$ (1).

Exercice 2 (Symétrie de l'équivalence)**.** Soient X un espace topologique, $Y \subset X$ et $a \in \overline{Y}$. Soient f et g de Y vers un espace normé E. Montrer que $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \iff f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} o(f(x))$.
Supposons que $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$. Quitte à remplacer Y par son intersection avec un voisinage de a dans X, on peut supposer qu'il existe $\varepsilon : Y \to E$ tel que $f - g = \varepsilon\|g\|$ et $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Alors $g = f - \varepsilon\|g\|$, donc $\|g\| = \big\|f - \varepsilon\|g\|\big\| \leqslant \|f\| + \|\varepsilon\|\|g\|$ et donc $\|g\|(1 - \|\varepsilon\|) \leqslant \|f\|$. Comme $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $1 - \|\varepsilon(x)\| \geqslant \frac{1}{2}$ pour tout $x \in Y \cap V$. Pour tout $x \in Y \cap V$, on a

$$\frac{1}{2}\|g(x)\| \leqslant \|g(x)\|(1 - \|\varepsilon(x)\|) \leqslant \|f(x)\|$$

donc $\|g(x)\| \leqslant 2\|f(x)\|$.
On définit $\eta : Y \cap V \to E$ par $\eta(x) = \frac{\|g(x)\|}{\|f(x)\|}\varepsilon(x)$ si $f(x) \neq 0$ et $\eta(x) = \varepsilon(x)$ si $f(x) = 0$. Pour tout $x \in Y \cap V$ on a $\|f(x)\|\eta(x) = \|g(x)\|\varepsilon(x) = f(x) - g(x)$. On a $\|\eta(x)\| \leqslant 2\|\varepsilon(x)\| \xrightarrow[x\to a]{} 0$ donc $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} o(f(x))$, ce qui prouve le sens direct. Le sens réciproque est symétrique.

Exercice 3 (Applications bilinéaires)**.** Soient E_1, E_2 et F des Banachs et $B : E_1 \times E_2 \to F$ bilinéaire continue.

1. Montrer que B est différentiable et expliciter sa différentielle.
   Pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $h = (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$ on a

$$B(x+h) = B(x_1+h_1, x_2+h_2) = \underbrace{B(x_1,x_2)}_{=B(x)} + \underbrace{B(h_1,x_2)+B(x_1,h_2)}_{\text{linéaire continue en } h} + \underbrace{B(h_1,h_2)}_{=o(\|h\|_\infty)}.$$

   En effet, $\|B(h_1,h_2)\| \leqslant \|B\|\|h_1\|\|h_2\| \leqslant \|B\|\|(h_1,h_2)\|_\infty^2 = o(\|h\|_\infty)$ d'une part. D'autre part,

$$\begin{aligned}\|B(h_1,x_2)+B(x_1,h_2)\| &\leqslant \|B(h_1,x_2)\| + \|B(x_1,h_2)\| \leqslant \|B\|(\|h_1\|\|x_2\| + \|x_1\|\|h_2\|) \\ &\leqslant \|B\|(\|x_1\|+\|x_2\|)\|h\|_\infty \leqslant 2\|B\|\|x\|_\infty\|h\|_\infty,\end{aligned} \tag{i}$$

   donc $(h_1,h_2) \mapsto B(h_1,x_2)+B(x_1,h_2)$ est linéaire continue de $E_1 \times E_2$ avec $\|\cdot\|_\infty$ vers F. Donc B est différentiable en x et $D_xB : h \mapsto B(h_1,x_2)+B(x_1,h_2)$.

2. Montrer que $DB : E_1 \times E_2 \to \mathcal{L}(E_1, \times E_2, F)$ est linéaire et continue.
   Soient $x, y \in E_1 \times E_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $h \in E_1 \times E_2$, on a

$$\begin{aligned}D_{x+\lambda y}B(h) &= B(h_1, x_2+\lambda y_2) + B(x_1+\lambda y_1, h_2) \\ &= B(x_1,h_1) + \lambda B(y_1,h_2) + B(h_1,x_2) + \lambda B(h_1,y_2) \\ &= D_xB(h) + \lambda D_yB(h).\end{aligned}$$

   Donc $D_{x+\lambda y}B = D_xB + \lambda D_yB$ et donc DB est bien linéaire. Le calcul (i) montre que, pour tout $x \in E_1 \times E_2$, $\|D_xB\| \leqslant 2\|B\|\|x\|_\infty$. Donc DB est continue de $E_1 \times E_2$ avec $\|\cdot\|_\infty$ vers $\mathcal{L}(E_1 \times E_2, F)$ avec la norme d'opérateur, et de norme au plus $2\|B\|$.

3. Montrer que $\mu : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$ et expliciter sa différentielle.
   L'application μ est bilinéaire, et continue car on est en dimension finie. Donc μ est $\mathcal{C}^1$. Le cas général ci-dessus montre que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $D_{(\lambda,x)}\mu : (t,h) \mapsto tx + \lambda h$.

4. Soit $(E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, montrer $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$. Expliciter sa différentielle.
   Comme E est euclidien il est de dimension finie. Donc $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ est bilinéaire continue, donc $\mathcal{C}^1$. Le cas général montre que $D_{(x,y)}\langle \cdot\,, \cdot \rangle : (u,v) \mapsto \langle x\,, u \rangle + \langle y\,, v \rangle$ pour tout $x, y \in E$.

5. Soient E, F et G des Banachs, montrer que $C : (L,K) \mapsto K \circ L$ est $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G)$ vers $\mathcal{L}(E,G)$, équipés de leurs normes d'opérateurs. Expliciter sa différentielle.
   Une fois encore on est dans le cas d'une application bilinéaire entre espaces de Banachs. Par contre, cette fois, sa continuité n'est pas automatique. Si $L \in \mathcal{L}(E,F)$ et $K \in \mathcal{L}(F,G)$, on a vu que $K \circ L \in \mathcal{L}(E,G)$ et $\|K \circ L\| \leqslant \|K\|\|L\|$. Donc C est bien continue.
   Par le cas général, C est $\mathcal{C}^1$ et $D_{(L,K)}C : (P,Q) \mapsto Q \circ L + K \circ P$ pour tout (L,K), de $\mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(E,G)$ vers $\mathcal{L}(E,G)$.

Exercice 4 (Différentielle et dérivée)**.** Soient $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert, F un Banach et $f : U \to F$. Soit $x \in U$, montrer que f est différentiable en x si et seulement si elle y est dérivable. Expliciter la relation en D_xf et $f'(x)$ dans ce cas.
Si f est différentiable en x, alors

$$f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + D_xf(h) + o(h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + hD_xf(1) + o(h)$$

donc f est dérivable en x et $f'(x) = D_xf(1)$. Inversement, si f est dérivable en x, alors $h \mapsto hf'(x)$ est linéaire continue de $\mathbb{R}$ dans F et $f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + hf'(x) + o(h)$, ce qui prouve que f est différentiable en x et $D_xf : h \mapsto hf'(x)$.

Exercice 5 (Polynômes)**.** Montrer que les fonctions polynomiales de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ sont $\mathcal{C}^\infty$.
Il suffit de le prouver pour les monômes, le résultat s'en déduit ensuite par combinaison linéaire. Soient $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $X^\alpha : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, si $\alpha_i = 0$ on a $\partial_i X^\alpha = 0$, et sinon $\partial_i X^\alpha = \alpha_i X^\beta$ où $\beta_i = \alpha_i - 1$ et $\beta_j = \alpha_j$ pour $j \neq i$. Donc X^α a des dérivées partielles, qui sont des monômes de degré strictement plus petit, en particulier continues.
Par récurrence sur le degré total du monôme, X^α admet des dérivées partielles continues à tout ordre. Donc X^α est $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 6 (Différentielle du déterminant)**.** Soit $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application déterminant.

1. Montrer que det est différentiable en Id et expliciter sa différentielle.
   Soit $H = (h_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a

$$\det(\mathrm{Id} + H) = \det \begin{pmatrix} 1+h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,n} \\ h_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & h_{n-1,n} \\ h_{n,1} & \dots & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{pmatrix} \underset{H \to 0}{=} \prod_{i=1}^n (1 + h_{i,i}) + O\big(\|H\|_\infty^2\big)$$
$$\underset{H \to 0}{=} 1 + \sum_{i=1}^n h_{i,i} + O\big(\|H\|_\infty^2\big) \underset{H \to 0}{=} 1 + \mathrm{Tr}(H) + o(H).$$

   Comme Tr est linéaire, on en déduit que det est différentiable en Id et $D_{\mathrm{Id}} \det = \mathrm{Tr}$.
2. En déduire que det est différentiable sur $GL_n(\mathbb{R})$ et expliciter sa différentielle.
   Soient $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Comme $\|M^{-1}H\| \leqslant \|M^{-1}\| \|H\| \xrightarrow[H \to 0]{} 0$, on a

$$\det(M + H) = \det(M) \det(\mathrm{Id} + M^{-1}H) \underset{H \to 0}{=} \det(M)\big(\mathrm{Id} + \mathrm{Tr}\big(M^{-1}H\big) + o(M^{-1}H)\big)$$
$$\underset{H \to 0}{=} \det(M) + \mathrm{Tr}\big({}^{\mathrm{t}}\mathrm{co}(M)H\big) + o(H),$$

   où on a noté $\mathrm{co}(M)$ la matrice des cofacteurs de M et utilisé la formule ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{co}(M) = \det(M)M^{-1}$. Comme la trace et la multiplication par ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{co}(M)$ sont linéaires, det est différentiable en M et $D_M \det : H \mapsto \mathrm{Tr}\big({}^{\mathrm{t}}\mathrm{co}(M)H\big)$.
3. Montrer que det est en fait $\mathcal{C}^\infty$ sur $M_n(\mathbb{R})$, et expliciter sa diffentielle en tout point.
   L'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est polynomiale en les coefficients, donc $\mathcal{C}^\infty$. Les applications $D\det$ et $M \mapsto \mathrm{Tr}\big({}^{\mathrm{t}}\mathrm{co}(M)\,\cdot\big)$ sont donc deux applications continues de $M_n(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$, par exemple parce que les coefficients de ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{co}(M)$ sont polynomiaux en ceux de M. Elles coïncident sur l'ouvert dense $GL_n(\mathbb{R})$ donc partout. Donc, pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $D_M \det : H \mapsto \mathrm{Tr}\big({}^{\mathrm{t}}\mathrm{co}(M)H\big)$.

Exercice 7 (Linéarité de la différentiation)**.** Soient E et F des Banachs, $U \subset E$ ouvert et $x \in U$. Vérifier que $\mathrm{Diff}_x(U, F)$, $\mathrm{Diff}(U, F)$ et $\mathcal{C}^1(U, F)$ sont des espaces vectoriels sur lesquels D_x (resp. D) est linéaire.
On va montrer que $\mathrm{Diff}_x(U, F)$ est un sous-espace de l'espace F^U des fonctions de U dans F. Soient $f, g \in \mathrm{Diff}_x(U, F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$(f + \lambda g)(x + h) = f(x + h) + \lambda g(x + h) \underset{h \to 0}{=} f(x) + D_x f(h) + o(h) + \lambda g(x) + \lambda D_x g(h) + \lambda o(h)$$
$$\underset{h \to 0}{=} (f + \lambda g)(x) + (D_x f + \lambda D_x g)(h) + o(h).$$

L'application $D_x f + \lambda D_x g : E \to F$ est linéaire continue comme combinaison linéaire de telles applications. Donc $f + \lambda g$ est différentiable en x et $D_x(f + \lambda g) = D_x f + \lambda D_x g$. D'une part, cela prouve que $\mathrm{Diff}_x(U, F)$ est un sous-espace de F^U, donc un espace vectoriel. D'autre part, cela montre que $D_x : \mathrm{Diff}_x(U, F) \to \mathcal{L}(E, F)$ est linéaire.
Ensuite $\mathrm{Diff}(U, F) = \bigcap_{x\in U} \mathrm{Diff}_x(U, F)$ est un espace vectoriel comme intersection d'espaces vectoriels. Si $f, g \in \mathrm{Diff}(U, F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors le cas précédent montre que, pour tout $x \in U$, $D_x(f + \lambda g) = D_x f + \lambda D_x g$, donc $D(f + \lambda g) = D_f + \lambda D_g$. Donc $D : \mathrm{Diff}(U, F) \to \mathcal{L}(E, F)^U$ est linéaire.
L'espace $\mathcal{C}^0(U, \mathcal{L}(E, F))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)^U$, dont l'image réciproque par D est $\mathcal{C}^1(U, F)$. Donc $\mathcal{C}^1(U, F)$ est un sous-espace de $\mathrm{Diff}(U, F)$, donc un espace vectoriel. La restriction $D : \mathcal{C}^1(U, F) \to \mathcal{C}^0(U, \mathcal{L}(E, F))$ reste évidemment linéaire.

Exercice 8 (Applications vers un produit)**.** Soient $E, F_1, \dots, F_p$ des Banachs et $F = F_1 \times \dots \times F_p$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Soit $f = (f_1, \dots, f_p)$ de $U \subset E$ vers F, montrer que $f \in \mathrm{Diff}_x(U, F)$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f_i \in \mathrm{Diff}_x(U, F_i)$. Si c'est le cas, montrer que $D_x f : h \mapsto (D_x f_1(h), \dots, D_x f_p(h))$.
Soit $x \in U$, où U est ouvert de E. Si f est différentiable en x, alors $D_x f : E \to F_1 \times \dots \times F_p$ est linéaire continue. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on note p_i la projection canonique de F vers F_i et $g_i = p_i \circ D_x f$. On a alors

$$\begin{aligned}\|f_i(x+h) - f_i(x) - (g_i(x))(h)\|_{F_i} &= \big\|p_i\big(f(x+h) - f(x) - D_x f(h)\big)\big\|_{F_i} \\ &\leqslant \|f(x+h) - f(x) - D_x f(h)\|_\infty \underset{h\to 0}{=} o(h).\end{aligned}$$

Donc $f_i(x+h) \underset{h\to 0}{=} f_i(x) + (g_i(x))(h) + o(h)$. L'application $g_i(x)$ est linéaire et continue, comme composée de telles applications. Donc f_i est différentiable en x, et $D_x f_i = g_i(x) = p_i \circ D_x f$.
Inversement, supposons que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ la fonction f_i soit différentiable en x. On définit $L = (D_x f_1, \dots, D_x f_p)$ qui est linéaire de E vers F. Soit $h \in E$,

$$\|L(h)\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant p} \|D_x f_i(h)\|_{F_i} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant p} \|D_x f_i\| \|h\|_E \leqslant \|h\|_E \max_{1\leqslant i\leqslant p} \|D_x f_i\|,$$

donc L est continue. Puis $\|f(x+h) - f(x) - L(h)\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant p} \|f_i(x+h) - f_i(x) - D_x f_i(h)\|_{F_i}$. Par différentiabilité de f_i en x (voir les caractérisations de l'exercice 1), il existe $\varepsilon_i : U \to [0, +\infty[$ tel que $\|f_i(x+h) - f(x) + D_x f_i(h)\|_{F_i} = \varepsilon_i(h) \|h\|_E$ et $\varepsilon_i(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. Donc

$$\|f(x+h) - f(x) - L(h)\|_\infty = \|h\|_E \underbrace{\max_{1\leqslant i\leqslant p} \varepsilon_i(h)}_{=\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0},$$

c'est-à-dire $f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + L(h) + o(h)$. Donc f est différentiable en x et $D_x f = L$.

Exercice 9 (Règle de Leibniz)**.** Soient $I \subset \mathbb{R}$ un ouvert et $x \in I$

1. Soient f et g de I dans $\mathbb{R}$ dérivables en x, montrer que fg est dérivable en x et calculer $(fg)'(x)$.
   Par dérivabilité de f et g, on a

$$\begin{aligned}(fg)(x+h) = f(x+h)g(x+h) &\underset{h\to 0}{=} \big(f(x) + hf'(x) + o(h)\big)\big(g(x) + hg'(x) + o(h)\big) \\ &\underset{h\to 0}{=} f(x)g(x) + h\big(f'(x)g(x) + g'(x)f(x)\big) + o(h).\end{aligned}$$

   Donc fg est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$.

2. Soient f et g de I dans $\mathbb{R}^n$ dérivables en x, montrer que $\langle f\,, g\rangle$ est dérivable en x et calculer sa dérivée en x.

   Par dérivabilité de f et g, on a

$$\begin{aligned}\langle f\,, g\rangle(x+h) = \langle f(x+h)\,, g(x+h)\rangle &\underset{h\to 0}{=} \big\langle f(x) + hf'(x) + o(h)\,, g(x) + hg'(x) + o(h)\big\rangle \\ &\underset{h\to 0}{=} \langle f(x)\,, g(x)\rangle + h\big(\langle f'(x)\,, g(x)\rangle + \langle f(x)\,, g'(x)\rangle\big) + o(h).\end{aligned}$$

   Donc $\langle f\,, g\rangle$ est dérivable en x et $(\langle f\,, g\rangle)'(x) = \langle f'(x)\,, g(x)\rangle + \langle f(x)\,, g'(x)\rangle$.

3. Plus généralement, soient E,F_1,F_2 et G des Banachs, U un ouvert de E et $B : F_1 \times F_2 \to G$ bilinéaire continue. Soient $f_1 : U \to F_1$ et $f_2 : U \to F_2$ différentiables en $x \in U$. Montrer que $g = B(f_1, f_2)$ est différentiable en x et calculer $D_x g$.

   Notons $f = (f_1, f_2)$ de U dans $F_1 \times F_2$, de sorte que $g = B \circ f : U \to G$. On a montré que f est différentiable en x et calculé sa différentielle dans l'exercice 8. De même, on a montré que B est différentiable sur $F_1 \times F_2$ et calculé sa différentielle dans l'exercice 3. Par la règle de la chaine, on en déduit que g est différentiable en x et que

$$\begin{aligned}D_x g = D_x(B \circ f) &= D_{f(x)}B \circ D_x f = D_{(f_1(x), f_2(x))}B \circ (D_x f_1, D_x f_2) \\ &= B(f_1(x), D_x f_2(\cdot)) + B(D_x f_1(\cdot), f_2(x)).\end{aligned}$$

Exercice 10 (Primitive)**.** Soit F un espace de Banach, soit $\varphi : [a, b] \to F$ une fonction continue et $\Phi : x \mapsto \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que Φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et $\Phi' = \varphi$.
Comme F est potentiellement de dimension infinie, on doit utiliser l'intégrale de Riemann. Ici, pour tout $x \in [a, b]$, la fonction φ est continue sur $[a, x]$, donc $\Phi(x)$ est bien définie.
Soit $x \in [a, b]$, pour h assez petit on a

$$\begin{aligned}\|\Phi(x+h) - \Phi(x) - h\varphi(x)\| &= \left\| \int_a^{x+h} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^{x+h} \varphi(x)\,\mathrm{d}t \right\| \\ &= \left\| \int_x^{x+h} \big(\varphi(t) - \varphi(x)\big)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_x^{x+h} \|\varphi(t) - \varphi(x)\|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Comme φ est continue sur $[a, b]$ elle y est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $\delta > 0$ tel que si $|t - x| \leqslant \delta$ alors $\|\varphi(t) - \varphi(x)\| \leqslant \varepsilon$. Si $|h| \leqslant \delta$ alors $\frac{1}{|h|}\int_x^{x+h} \|\varphi(t) - \varphi(x)\|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$. Donc

$$\frac{\|\Phi(x+h) - \Phi(x) - h\varphi(x)\|}{|h|} \leqslant \frac{1}{|h|} \int_x^{x+h} \|\varphi(t) - \varphi(x)\|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Donc Φ est dérivable en x et $\Phi'(x) = \varphi(x)$. C'est valable pour tout $x \in [a, b]$, et φ est continue.

Exercice 11 (Intégration par parties)**.** Soient f et g des fonctions $\mathcal{C}^1$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, montrer que $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
On applique le théorème fondamental analyse à fg, qui est $\mathcal{C}^1$, et on utilise la règle Leibniz :

$$[f(t)g(t)]_a^b = \int_a^b (fg)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 12 (Caractère $\mathcal{C}^1$ et dérivées partielles)**.** Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, F un Banach et $f : U \to F$. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ si et seulement si les $(\partial_i f)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont bien définies et continues.
Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si f est $\mathcal{C}^1$ sur U, en particulier f est différentiable en tout $x \in U$, donc y admet des dérivées partielles définies par $\partial_i f(x) = D_x f(e_i)$, pour $i \in [\![1, n]\!]$. Il reste alors à vérifier que $\partial_i f : x \mapsto D_x f(e_i)$ est continue sur U. Soient $x, y \in U$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\|\partial_i f(y) - \partial_i f(x)\| = \|D_y f(e_i) - D_x f(e_i)\| \leqslant \|D_y f - D_x f\|\|e_i\| = \|D_y f - D_x f\| \xrightarrow[y\to x]{} 0,$$

car Df est continue en x. Donc $\partial_i f$ est continue en x, et finalement sur U.
Inversement, supposons que les $(\partial_i f)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont bien définies et continues sur U. D'après le cours, pour tout $x \in U$, f est différentiable en x. Il reste à vérifier que Df est continue. Soient $x, y \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}\|D_y f(h) - D_x f(h)\| = \left\|\sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(y) - \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(x)\right\| &\leqslant \sum_{i=1}^n |h_i| \|\partial_i f(y) - \partial_i f(x)\| \\ &\leqslant \|h\| \sum_{i=1}^n \|\partial_i f(y) - \partial_i f(x)\|.\end{aligned}$$

Donc $\|D_y f - D_x f\| \leqslant \sum_{i=1}^n \|\partial_i f(y) - \partial_i f(x)\| \xrightarrow[y\to x]{} 0$, par continuité des $(\partial_i f)_{1\leqslant i\leqslant n}$ en x. Donc Df est continue en x, et finalement sur U. Donc f est $\mathcal{C}^1$.

Exercice 13 (Un calcul explicite)**.** Soient $f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et $g : (y_1, y_2) \mapsto y_1^2 - y_2^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Calculer la différentielle de On note $h = g \circ f$. Justifier que h est différentiable et calculer sa différentielle en tout point.
Les applications f et g sont différentiables car elles sont polynomiales. Donc h est différentiable comme composée de deux telles applications, par la règle de la chaine. En fait h est même $\mathcal{C}^\infty$.
On est dans un cas très explicite dans $\mathbb{R}^n$, donc calculer la différentielle revient à calculer la jacobienne. On pourrait expliciter h et calculer ses dérivées partielles, mais il est plus simple de calculer les jacobiennes de f et g puis d'appliquer la règle de la chaine. Dans ce qui suit on identifie les applications linéaires avec leurs matrices dans les bases canoniques de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. On a donc

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ D_x f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3,\ D_y g = \begin{pmatrix} 2y_1 & -2y_2 \end{pmatrix}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} D_x h = D_{f(x)} g \circ D_x f &= \begin{pmatrix} 2f_1(x) & -2f_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} f_1(x) - f_2(x) & f_1(x) + f_2(x) & f_1(x) - f_2(x) \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x_2 & x_1 + x_3 & x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 14 (Un contre-exemple)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 0$ et $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.

1. Montrer que f est continue.
   Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, la fonction est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. En $(0, 0)$, on a $\|f(x_1, x_2) - f(0, 0)\| = \frac{|x_1||x_2|^2}{\|x\|^2} \leqslant \|x\| \xrightarrow[x\to(0,0)]{} 0$. Donc f est continue en $(0, 0)$.

2. Montrer que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0,0)$.

   Soit $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$, alors $f_{0,v}: t\mapsto \frac{tv_1(tv_2)^2}{t^2(v_1^2+v_2^2)} = tf(v)$ est linéaire, en particulier dérivable en $(0,0)$. Donc f admet des dérivées partielles dans toutes les directions en $(0,0)$ et, pour tout $v\in\mathbb{R}^2$, $\partial_v f(0,0) = (f_{0,v})'(0) = f(v)$.

3. Est-ce que f est différentiable en $(0,0)$?

   Si f était différentiable en $(0,0)$, on aurait $D_0 f: v\mapsto \partial_v f(0,0)$ et donc $D_0 f = f$. C'est absurde car f n'est pas linéaire. Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 15 (Un autre contre-exemple)**.** On considère la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(0,0)=0$ et $f(x_1,x_2) = x_1x_2\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)$ si $x=(x_1,x_2)\neq 0$.

1. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

   Sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, la fonction f est $\mathcal{C}^1$ comme produit et composée de fonctions usuelles. En particulier, elle y est différentiable. Par ailleurs $f(0)=0$ et $f(x_1,x_2) = O(x_1x_2) = o(\|x\|)$ lorsque $x\to 0$. Donc f est différentiable en 0 et $D_0 f = 0$.

2. Est-ce que f est de classe $\mathcal{C}^1$?

   Soit $x=(x_1,x_2)\neq(0,0)$, on a $\partial_1 f(x) = x_2\sin(\frac{1}{\|x\|}) - \frac{x_1^2x_2}{\|x\|^3}\cos\left(\frac{1}{\|x\|}\right)$ et symétriquement $\partial_2 f(x) = x_1\sin(\frac{1}{\|x\|}) - \frac{x_1x_2^2}{\|x\|^3}\cos\left(\frac{1}{\|x\|}\right)$. Si f était de classe $\mathcal{C}^1$, ses dérivées partielles serait continues, en particulier en 0. Notamment, on aurait

   $$\partial_1 f\left(\frac{t}{\sqrt{2}},\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \frac{t}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{1}{|t|}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\cos\left(\frac{1}{|t|}\right) \xrightarrow[t\to 0]{} 0,$$

   ce qui impliquerait que $\cos\left(\frac{1}{|t|}\right)\xrightarrow[t\to 0]{} 0$, et donc $\cos(\theta)\xrightarrow[\theta\to+\infty]{} 0$. C'est absurde, donc f n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On remarque que sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, les dérivées partielles sont continues comme sommes, ce qui remontre que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, et que le seul problème pour la continuité de Df est en 0.

Exercice 16 (Contre-exemple à l'égalité des accroissements finis)**.** Donner un contre-exemple à l'égalité des accroissements pour les fonctions à valeurs dans un espace de dimension 2 ou plus.

On considère $f: t\mapsto e^{i\pi t}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2$. Si l'égalité des accroissements finis était vraie pour cette fonction, il existerait $t\in[0,1]$ tel que $-2 = \frac{f(1)-f(0)}{1} = f'(t) = i\pi e^{i\pi t}$. En prenant les modules on aurait $\pi = 2$, ce qui est absurde.

Exercice 17 (Conditions d'extremum)**.** Soit $f: U\to\mathbb{R}$ une application différentiable, où U est un ouvert d'un Banach E. On rappelle que $x\in U$ est appelé un *point critique* de f si $D_x f = 0$.

1. Si f atteint un extremum local en $x\in U$, montrer que x est point critique de f. Donner un contre-exemple à la réciproque.

   Pour tout $v\in E$, l'application partielle $f_{x,v}: t\mapsto f(x+tv)$ est bien définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ et atteint un extremum local en 0. Par le cas traité en cours pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a $D_x f(v) = f'_{x,v}(0) = 0$. Donc $D_x f = 0$.

   Pour la fonction $f: x\mapsto x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le point $x=0$ est critique mais n'est pas un extremum local.

Dans la suite on suppose que f est deux fois différentiable en $x\in U$.

2. Si f atteint un minimum local en x, montrer que $D_x^2 f(v,v) \geqslant 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}$. La réciproque est-elle vraie ?

   Par la question précédente, $D_x f = 0$. Par Taylor–Young à l'ordre 2, on a donc

   $$f(x+v) = f(x) + D_x^2 f(v,v) + o(\|v\|^2). \tag{ii}$$

   Soit $v \in E$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ suffisamment proche de 0 on a donc

   $$0 \leqslant \frac{f(x+tv) - f(x)}{t^2} \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{t^2}\big(D_x^2 f(tv,tv) + o(\|tv\|^2)\big) \underset{t\to 0}{=} D_x^2 f(v,v) + o(1).$$

   En passant à la limite $t \to 0$, on a $D_x^2 f(v,v) \geqslant 0$.

   La réciproque est fausse, toujours en considérant $f : x \mapsto x^3$ qui est telle que $f'(0) = f''(0) = 0$ et pour laquelle 0 n'est pas minimum local.

3. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $v \in E$, $D_x^2 f(v,v) \geqslant \varepsilon \|v\|^2$. Montrer que x est un minimum local de f.

   On repart de la formule de Taylor–Young (ii). Par la caractérisation de l'exercice 1, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $v \in B(0,\eta)$,

   $$\big|f(x+v) - f(x) - D_x^2 f(v,v)\big| < \varepsilon \|v\|^2.$$

   Donc $f(x+v) - f(x) > D_x^2 f(v,v) - \varepsilon\|v\|^2 \geqslant 0$. Donc x est un minimum local de f.

4. On suppose que E est de dimension finie et que, pour tout $v \in E \setminus \{0\}$, $D_x^2 f(v,v) > 0$. Montrer que x est un minimum local de f.

   On va se ramener au cas précédent en utilisant la compacité de la sphère unité S de E. Comme S est fermée et bornée en dimension finie elle est compacte. Comme $D_x^2 f$ est continue, l'application $v \mapsto D_x^2 f(v,v)$ est continue, et elle atteint donc un minimum $\varepsilon > 0$ sur S. Alors, pour tout $v \neq 0$ on a

   $$D_x^2 f(v,v) = \|v\|^2 D_x^2 f\left(\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|}\right) \geqslant \varepsilon \|v\|^2.$$

   Cette relation étant encore vraie pour $v = 0$ on est ramené au cas de la question précédente.

Exercice 18 (Recherche d'extrema)**.** Soit $f : (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + 8\cos(x_1)\cos(x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f atteint un minimum global. Atteint-elle un maximum global ?

   Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x) = \|x\|^2 + 8\cos(x_1)\cos(x_2) \geqslant \|x\|^2 - 8 \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$. Cela montre que f n'atteint pas de maximum global.

   En revanche, notons $K = f^{-1}(]-\infty, 8])$. Par continuité de f, l'ensemble K est fermé dans $\mathbb{R}^2$, on a $0 \in K$ puisque $f(0) = 8$. Enfin, comme f tend vers $+\infty$ à l'infini, il existe $R > 0$ tel que $\|x\| > R \implies f(x) > 8$. Donc $K \subset B_F(0,R)$ et finalement K est compact. De nouveau par continuité, $f_{|K}$ admet un minimum. Par définition de K, ce minimum est un minimum global.

2. Déterminer la jacobienne et la hessienne de f en tout point $x \in \mathbb{R}^2$.

   On calcule les dérivées partielles. Pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

   $$\begin{aligned} \partial_1 f(x) &= 2x_1 - 8\sin(x_1)\cos(x_2), & \partial_1^2 f(x) = \partial_2^2 f(x) &= 2 - 8\cos(x_1)\cos(x_2), \\ \partial_2 f(x) &= 2x_2 - 8\cos(x_1)\sin(x_2), & \partial_1\partial_2 f(x) &= 8\sin(x_1)\sin(x_2). \end{aligned}$$

Notons $J_x(f)$ la jacobienne et $H_x(f)$ la hessienne de f en x, on a donc

$$J_x(f) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 8\sin(x_1)\cos(x_2) & 2x_2 - 8\cos(x_1)\sin(x_2) \end{pmatrix},$$
$$H_x(f) = \begin{pmatrix} 2 - 8\cos(x_1)\cos(x_2) & 8\sin(x_1)\sin(x_2) \\ 8\sin(x_1)\sin(x_2) & 2 - 8\cos(x_1)\cos(x_2) \end{pmatrix}.$$

3. Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $D_x f = 0$ si et seulement si $x_1 + x_2 = 4\sin(x_1 + x_2)$ ou $x_1 - x_2 = 4\sin(x_1 - x_2)$. En déduire la liste des 9 points critiques de f.

   Indication. On pourra commencer par montrer que l'équation $\frac{\sin(t)}{t} = \frac{1}{4}$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}^*$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$ et que $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

   On a $D_x f = 0 \iff J_x f = 0$ ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x_1 = 4\sin(x_1)\cos(x_2) \\ x_2 = 4\cos(x_1)\sin(x_2) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 4\sin(x_1)\cos(x_2) + 4\cos(x_1)\sin(x_2) \\ x_1 - x_2 = 4\sin(x_1)\cos(x_2) - 4\cos(x_1)\sin(x_2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 4\sin(x_1 + x_2) \\ x_1 - x_2 = 4\sin(x_1 - x_2) \end{cases}$$

   Cherchons les solutions de ce système. On va commencer par déterminer les $t \neq 0$ tels que $\frac{\sin(t)}{t} = \frac{1}{4}$. La fonction $g : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est bien définie hors de 0 et paire. Si $t \geqslant 2\pi$ alors $|g(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi} < \frac{1}{4}$. Par ailleurs g est négative sur $[\pi, 2\pi]$. On est ramené à chercher les $t \in]0, \pi[$ tels que $g(t) = \frac{1}{4}$. Pour tout $t \in]0, \pi[$, $g'(t) = \frac{\cos(t)t - \sin(t)}{t^2}$. Sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, le numérateur est clairement négatif. Sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $t < \tan(t) \iff \cos(t)t - \sin(t) < 0$. Donc g' est à valeurs strictement négatives, et g décroit strictement sur $]0, \pi[$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $t \in]0, \pi[$ tel que $g(t) = \frac{1}{4}$. Remarquons que, comme $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi} > \frac{1}{4}$, on doit avoir $t > \frac{\pi}{2}$.

   Notons α l'unique réel strictement positif tel que $g(\alpha) = \frac{1}{4}$. On a vu que $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, ce point est critique pour f si et seulement si il satisfait le système d'équation ci-dessus, qui est équivalent à $x_1 + x_2 \in \{-\alpha, 0, \alpha\}$ et $x_1 - x_2 \in \{-\alpha, 0, \alpha\}$. On a donc 9 possibilités.

   Les points critiques de f sont donc $z_0 = (0, 0)$, $z_1 = (-\alpha, 0)$, $z_2 = (\alpha, 0)$, $z_3 = (0, -\alpha)$, $z_4 = (0, \alpha)$, $z_5 = (-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2})$, $z_6 = (-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})$, $z_7 = (\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2})$ et $z_8 = (\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})$.

4. Parmi les 9 points critiques précédents, lesquels sont des minima locaux, lesquels des maxima locaux et lesquels des points cols (les autres) ?

   Pour déterminer la nature d'un point critique on étudie la nature de la hessienne en ce point. Si celle-ci est définie-positive (resp. définie-positive) on a un minimum (resp. maximum local), voir exercice 17. Dans les autres cas, si la hessienne est non-dégénérée on a un point-col. Comme la hessienne est symétrique, elle est diagonalisable, et tout ceci se lit donc sur les signes des valeurs propres, qui se déduisent des signes de la trace et du déterminant de la hessienne.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ on a $\tau(x) := \mathrm{Tr}(H_x(f)) = 4(1 - 4\cos(x_1)\cos(x_2))$ et

$$\begin{aligned} \delta(x) := \det(H_x(f)) &= (2 - 8\cos(x_1)\cos(x_2))^2 - (8\sin(x_1)\sin(x_2))^2 \\ &= 4 - 32\cos(x_1)\cos(x_2) + 64\big(\cos(x_1)^2\cos(x_2)^2 - \sin(x_1)^2\sin(x_2)^2\big) \\ &= 4(1 - 8\cos(x_1)\cos(x_2) + 16\cos(x_1 + x_2)\cos(x_1 - x_2)). \end{aligned}$$

   En $z_0 = (0, 0)$, on a $\tau(z_0) = -12$ et $\delta(z_0) = 36$. Donc en z_0, la hessienne de f a deux valeurs propres de même signe car $\delta(z_0) > 0$ et elles sont négatives car $\tau(z_0) < 0$. Donc $H_{z_0}(f)$ est définie-négative, et z_0 est un maximum local.

Pour $i \in \{1,2,3,4\}$, on a $\tau(z_i) = 4(1-4\cos(\alpha))$. Comme $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, on a $\cos(\alpha) < 0$ et donc $\tau(z_i) > 0$. Par ailleurs,

$$\delta(z_i) = 4\big(1 - 8\cos(\alpha) + 16\cos(\alpha)^2\big) = 4(1-4\cos(\alpha))^2 > 0.$$

Donc $H_{z_i}(f)$ est non-dégénérée et admet deux valeurs propres de même signe, qui sont en fait positives. Donc $H_{z_i}(f)$ est définie-positive, et z_1, z_2, z_3 et z_4 sont des minima locaux.

Pour $i \in \{5,6,7,8\}$, on a

$$\begin{aligned}\delta(z_i) &= 4\left(1 - 8\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 16\cos(\alpha)\right) = 4(1 - 4(1+\cos(\alpha)) + 16\cos(\alpha)) \\ &= -12(1-4\cos(\alpha)) < 0.\end{aligned}$$

Donc $H_{z_i}(f)$ est non-dégénérée avec deux valeurs propres de signes différents. Donc z_i est un point-col.

5. Déterminer la valeur du minimum de f en fonction de α.

   Le minimum global de f est en particulier un minimum local. Il est donc atteint en l'un des points z_1, z_2, z_3 ou z_4. On remarque sur la forme de f que $f(x_1, x_2)$ dépend uniquement de $|x_1|$ et $|x_2|$. Donc on a en fait $f(z_1) = f(z_2) = f(z_3) = f(z_4)$, et f atteint donc son minimum global en 4 points différents.

   La valeur de ce minimum est $f(z_2) = f(\alpha, 0) = \alpha^2 + 8\cos(\alpha)$. On peut donner des valeurs approchées : $\alpha \simeq 2,457$ et $f(z_2) \simeq -0,162$.

Exercice 19 (Point de Fermat)**.** Soient x_1, x_2 et $x_3 \in \mathbb{R}^2$ trois points non alignés. On définit $f : x \mapsto \|x - x_1\| + \|x - x_2\| + \|x - x_3\|$, où on a noté $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$.

   La fonction f est continue. De plus $f(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$, par exemple parce que pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $\|x - x_i\| \geqslant \|x\| - \|x_i\|$. On va montrer que cela suffit à obtenir l'existence d'un minimum.

   Soit $\alpha = f(0)$, on considère $K = f^{-1}(]-\infty, \alpha])$, qui est fermé par continuité de f et contient 0. Il existe $R \geqslant 0$ tel que, pour $x \in \mathbb{R}^2 \setminus B(0,R)$, $f(x) > \alpha$. Alors $K \subset B(0,R)$. Donc K est fermé borné, donc compact.

   Par continuité, $f_{|K}$ atteint un minimum, disons en $y \in K$. En particulier $f(y) \leqslant f(0)$, donc par définition de K, la fonction f atteint un minimum global en y.

2. Montrer que $\|\cdot\|$ est strictement convexe, au sens où pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$ et tout $t \in [0,1]$ on a $\|(1-t)x + ty\| \leqslant (1-t)\|x\| + t\|y\|$, avec égalité si et seulement si $t \in \{0,1\}$ ou x et y sont positivement colinéaires.

   Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$ et $t \in [0,1]$, on a

   $$\|(1-t)x+ty\|^2 = (1-t)^2\|x\|^2 + 2(1-t)t\langle x\,, y\rangle + t^2\|y\|^2 \leqslant (1-t)^2\|x\|^2 + 2(1-t)t\|x\|\|y\| + t^2\|y\|^2$$

   par Cauchy-Schwarz. Donc $\|(1-t)x+ty\| \leqslant (1-t)\|x\| + t\|y\|$. C'est valable pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$ et $t \in [0,1]$, donc $\|\cdot\|$ est convexe.

   En reprenant le calcul précédent, $\|(1-t)x + ty\| = (1-t)\|x\| + t\|y\|$ si et seulement si on est dans le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire si et seulement si $(1-t)x$ et ty sont positivement colinéaires. Cela se produit exactement si $t \in \{0,1\}$, ou si x et y sont positivement colinéaires.

3. En déduire que le minimum de f est unique.

Supposons par l'absurde que f atteigne son minimum global en deux points y et z distincts. Soit $t \in]0,1[$, on a d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} f((1-t)y+tz) =& \|(1-t)(y-x_1)+t(z-x_1)\| + \|(1-t)(y-x_2)+t(z-x_2)\| \\ & + \|(1-t)(y-x_3)+t(z-x_3)\| \\ \leqslant & (1-t)\|y-x_1\| + t\|z-x_1\| + (1-t)\|y-x_2\| + t\|z-x_2\| \\ & + (1-t)\|y-x_3\| + t\|z-x_3\| \\ \leqslant & (1-t)f(y)+tf(z). \end{aligned}$$

Comme $f(y)=f(z)$ est le minimum de f on a en fait égalité. On est donc dans le cas d'égalité pour les trois inégalités appliquées dans le calcul précédent. À savoir, pour tout $i \in \{1,2,3\}$,

$$\|(1-t)(y-x_i)+t(z-x_i)\| = (1-t)\|y-x_i\| + t\|z-x_i\|$$

donc $y-x_i$ et $z-x_i$ sont colinéaires, puisque $t \in]0,1[$. Comme on a supposé $y \neq z$, on donc que x_1, x_2 et x_3 sont sur la droite (y,z), ce qui contredit l'hypothèse qu'ils ne sont pas alignés. C'est absurde, donc f atteint son minimum en un unique point de $\mathbb{R}^2$.

4. Supposons que f atteignent son minimum en $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1,x_2,x_3\}$. Montrer que les segements $[y,x_i]$ forment entre eux des angles de $\frac{2\pi}{3}$ en y.

Enfin une question où on fait du calcul différentiel. La norme euclidienne $N : x \mapsto \|x\|$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et, pour tout $x \neq 0$, $D_xN : v \mapsto \left\langle \frac{x}{\|x\|}\,, v \right\rangle$. En effet, lorsque $v \to 0$ on a :

$$\begin{aligned} N(x+v) &= \sqrt{\langle x+v\,, x+v\rangle} = \sqrt{\|x\|^2 + 2\langle x\,,v\rangle + \|v\|^2} = \|x\|\sqrt{1+2\left\langle \frac{x}{\|x\|^2}\,,v\right\rangle + o(v)} \\ &= \|x\|\left(1+\left\langle \frac{x}{\|x\|^2}\,,v\right\rangle + o(v)\right) = N(x) + \left\langle \frac{x}{\|x\|}\,,v\right\rangle + o(v). \end{aligned}$$

On peut aussi le prouver en calculant les dérivées partielles de $N : (z_1,z_2) \mapsto \sqrt{z_1^2+z_2^2}$ et en vérifiant qu'elles sont continues.

Alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1,x_2,x_3\}$ comme somme et composée de fonctions différentiables. Pour tout $x \notin \{x_1,x_2,x_3\}$ on a alors

$$D_xf = \sum_{i=1}^{3} D_{x-x_i}N \circ \mathrm{Id} = \sum_{i=1}^{3}\left\langle \frac{x-x_i}{\|x-x_i\|}\,,\cdot\right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{3} \frac{x-x_i}{\|x-x_i\|}\,,\cdot\right\rangle.$$

En y, on a $D_yf=0$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i-y}{\|x_i-y\|} = 0$. On va déduire de cette égalité que les segements $[y,x_i]$ forment entre eux des angles de $\frac{2\pi}{3}$ en y.

Pour cela, on identifie canoniquement $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, pour pouvoir calculer avec les complexes. Le problème étant invariant par translation, rotation et symétrie, on peut supposer que $y=0$, que $\frac{x_1}{|x_1|}=1$ et que $\frac{x_2}{|x_2|}$ se trouve dans le demi-plan supérieur. Il existe $\alpha \in [0,\pi]$ et $\beta \in]-\pi,\pi]$ tels que $\frac{x_2}{|x_2|} = e^{i\alpha}$ et $\frac{x_3}{|x_3|} = e^{i\beta}$. La condition ci-dessus affirme alors que $1+e^{i\alpha}+e^{i\beta}=0$.

On en déduit $\sin(\beta) = -\sin(\alpha)$, d'où $\beta \in \{-\alpha, -\pi+\alpha\}$. Par ailleurs $-1 = \cos(\alpha)+\cos(\beta)$ ce qui interdit $\beta = \alpha-\pi$. Donc $-\beta = \alpha = \frac{2\pi}{3}$. Ainsi, une fois qu'on a normalisé la situation, on a $\frac{x_1}{|x_1|}=1$, $\frac{x_2}{|x_2|} = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et $\frac{x_3}{|x_3|} = e^{-2i\frac{\pi}{3}}$. Cela prouve le résultat attendu sur les angles.

Exercice 20 (Régularité des applications linéaires et bilinéaires).

1. Soit $L : E \to F$ une application linéaire continue en Banachs, montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

   On sait que L est différentiable et $D_x L = L$ pour tout $x \in E$. Donc $DL : E \to \mathcal{L}(E, F)$ est constante, donc différentiable et $D_x^2 L = 0 \in \mathcal{L}_2(E, F)$ pour tout $x \in E$. En répétant l'argument, on montre par récurrence que pour tout $p \geqslant 2$, $D^p L$ est bien définie sur E et $D_x^p L = 0 \in \mathcal{L}_p(E, F)$ pour tout $x \in E$. Donc L est bien $\mathcal{C}^\infty$ sur E.

2. Soit $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire continue entre Banachs, montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

   On a montré dans l'exercice 3 que B est différentiable et $DB : E_1 \times E_2 \to \mathcal{L}(E_1 \times E_2, F)$ est linéaire continue. Par la question précédente DB est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donc B aussi.

Exercice 21 (Régularité des composées). Soient E, F et G des Banachs, $U \subset E$ et $V \subset F$ des ouverts et $k \in \mathbb{N}$. Si $f : U \to V$ et $g : V \to G$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ montrer que $g \circ f$ aussi.

On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. Le cas $k = 1$ a été traité en cours de topologie. Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons le résultat vrai pour k (pour toutes applications entre des ouverts d'espaces de Banach). Soient $f : U \to V$ et $g : V \to G$ de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. Par la règle de la chaine, pour tout $x \in U$ on a

$$D_x(g \circ f) = D_{f(x)} g \circ D_x f.$$

Par hypothèse, $Dg : V \mapsto \mathcal{L}(F, G)$ est $\mathcal{C}^k$, de même que $f : U \to V$. Donc $Dg \circ f : x \mapsto D_{f(x)} g$ est $\mathcal{C}^k$, par hypothèse de récurrence. Comme Df est aussi $\mathcal{C}^k$, l'application $x \mapsto (D_x f, D_{f(x)} g)$ est $\mathcal{C}^k$ de U dans $\mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$.
On a déjà vu que $B : (L, K) \mapsto K \circ L$ est bilinéaire continue sur $\mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$ dans $\mathcal{L}(E, G)$. Par l'exercice 20, on sait que B est $\mathcal{C}^\infty$, en particulier $\mathcal{C}^k$. Par hypothèse de récurrence de nouveau, $D(g \circ f) = B \circ (Df, Dg \circ f)$ est de classe $\mathcal{C}^k$. Donc $g \circ f$ est $\mathcal{C}^{k+1}$, ce qui achève la récurrence et établit le résultat.

Exercice 22 (Régularité de l'inverse).

1. Montrer que $\mathrm{Inv} : M \to M^{-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.

   En dimension finie c'est relativement simple. Déjà $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est ouvert par continuité de det, qui est polynomial. Ensuite on utilise la formule $\mathrm{Inv}(M) = M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^{\mathrm{t}}\mathrm{co}(M)$, où $\mathrm{co}(M)$ est la matrice des cofacteurs de M.
   Sur $GL_n(\mathbb{R})$, la fonction det ne s'annule pas, donc $M \mapsto \frac{1}{\det(M)}$ est bien définie. Les coefficients de ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{co}(M)$ sont des déterminants extraits de M, en particulier des polynômes en les coefficients de M. Donc les coefficients de M^{-1} sont des fractions rationnelles en les coefficients de M, en particulier $\mathcal{C}^\infty$. Donc Inv est $\mathcal{C}^\infty$.

2. Soit E un espace de Banach, montrer que $\mathrm{Inv} : L \mapsto L^{-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$ de $GL(E)$ dans lui-même.

   Dans ce cadre, c'est plus compliqué. On a montré dans le cours de topologie que $GL(E)$ est ouvert dans le Banach $\mathcal{L}(E)$ et que Inv est continu. On a aussi montré dans le cours de calcul différentiel que Inv est différentiable et que $D_L \mathrm{Inv} : H \mapsto -L^{-1} H L^{-1}$ pour tout $L \in GL(E)$.
   Soient $M, N \in \mathcal{L}(E)$, on définit $B(M, N) : H \mapsto -MHN$ qui est linéaire de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même. Pour tout $H \in \mathcal{L}(E)$, $\|B(M, N)(H)\| = \|MHN\| \leqslant \|M\| \|N\| \|H\|$. Donc $B(M, N)$ est continue, et $\|B(M, N)\| \leqslant \|M\| \|N\|$. On définit ainsi $B : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ qui est bilinéaire et continue. Notons aussi $\iota : L \mapsto (L, L)$ qui est linéaire continue de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$.
   L'expression ci-dessus montre que $D_L \mathrm{Inv} = B(L^{-1}, L^{-1}) = B(\iota(L^{-1})) = (B \circ \iota \circ \mathrm{Inv})(L)$ pour tout $L \in GL(E)$. En d'autres termes $D\,\mathrm{Inv} = B \circ \iota \circ \mathrm{Inv}$ de $GL(E)$ vers $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$. Les applications B et ι sont $\mathcal{C}^\infty$, car linéaire continue et bilinéaire continue respectivement. Si Inv est $\mathcal{C}^k$, alors $D\,\mathrm{Inv}$ est $\mathcal{C}^k$ comme composée d'applications $\mathcal{C}^k$, voir exercice 21, et donc Inv est $\mathcal{C}^{k+1}$. Puisque Inv est $\mathcal{C}^0$, on conclut par récurrence que Inv est $\mathcal{C}^\infty$.

3. Soient E et F des Banachs, montrer que $\text{Inv} : L \mapsto L^{-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$ de $\text{Iso}(E,F)$ dans $\text{Iso}(F,E)$.
   Si E et F ne sont pas isomorphes, Inv est l'application vide, donc c'est de la zérologie. Si E et F sont isomorphes, on se ramène au cas précédent.
   Soit $M \in \text{Iso}(F,E)$. Notons $\phi : L \mapsto M \circ L$ de $\mathcal{L}(E,F)$ vers $\mathcal{L}(E)$ et $\psi : K \mapsto K \circ M$ de $\mathcal{L}(E)$ vers $\mathcal{L}(F,E)$. Ces deux applications sont linéaires continues, donc $\mathcal{C}^\infty$. Notons $\text{Inv}_E : K \to K^{-1}$ de $GL(E)$ dans lui-même, qui est $\mathcal{C}^\infty$ par la question précédente.
   Pour tout $L \in \text{Iso}(E,F)$ on a
   $$\text{Inv}(L) = L^{-1} = L^{-1} \circ M^{-1} \circ M = (M \circ L)^{-1} \circ M = \psi(\text{Inv}_E(\phi(L))).$$
   Donc $\text{Inv} = \psi \circ \text{Inv}_E \circ \phi$ est $\mathcal{C}^\infty$ comme composée d'applications $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 23 (Développement de Taylor)**.** Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, F un espace de Banach et $f : U \to F$ une application k-différentiable en $x \in U$. Soit $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, montrer que

$$D_x^k f(h, \ldots, h) = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k} \frac{k!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n} \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f(x).$$

Pour simplifier les écritures on utilise des notations multi-indicielles : pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ on note $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$, $\binom{k}{\alpha} = \frac{k!}{\alpha!} = \frac{k!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!}$ et $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n}$. On veut donc prouver que $D_x^k f(h, \ldots, h) = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} h^\alpha \partial^\alpha f(x)$.
On écrit $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$, avec $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et on développe par multilinéarité.

$$\begin{aligned} D_x^k f(h, \ldots, h) &= D_x^k f\left(\sum_{i_1=1}^n h_{i_1} e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_k=1}^n h_{i_k} e_{i_k} \right) \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant n} h_{i_1} \ldots h_{i_k} D_x f^k(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant n} h_{i_1} \ldots h_{i_k} (\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f)(x). \end{aligned}$$

Soit $i_1, \ldots, i_k \in [\![1, n]\!]$, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, on note $\alpha_p = \text{Card}(\{j \in [\![1, k]\!] \mid i_j = p\})$. Alors on a $h_{i_1} \ldots h_{i_k} = h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n} = h^\alpha$ et $\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} = \partial^\alpha$. De plus, par définition des $(\alpha_p)_{1 \leqslant p \leqslant m}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \text{Card}(\bigsqcup_{p=1}^n \{j \in [\![1, k]\!] \mid i_j = p\}) = \text{Card}([\![1, k]\!]) = k$. Les termes dans l'expression de $D_x^k f(h, \ldots, h)$ ci-dessus sont donc de la forme $h^\alpha \partial^\alpha f(x)$ avec $|\alpha| = k$.
Inversement, soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| = k$. On a $h^\alpha \partial^\alpha f(x) = h_{i_1} \ldots h_{i_k} (\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f)(x)$ si et seulement si exactement α_1 des $(i_j)_{1 \leqslant j \leqslant k}$ sont égaux à 1, α_2 sont égaux à 2, etc. Le nombre de k-uplets $(i_1, \ldots, i_k) \in [\![1, n]\!]$ satisfaisant cette condition est le nombre de partition de $[\![1, k]\!]$ en n ensembles de cardinaux respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, c'est-à-dire $\frac{k!}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!} = \binom{k}{\alpha}$.
Finalement, $D_x^k f(h, \ldots, h) = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} h^\alpha \partial^\alpha f(x)$ comme attendu.

Exercice 24 (Encore un contre-exemple)**.** Donner un exemple d'homéomorphisme $\mathcal{C}^\infty$ qui ne soit pas un difféomorphisme.
On peut considérer $f : x \mapsto x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui est $\mathcal{C}^\infty$, bijective et dont la réciproque $f^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas dérivable en 0.

Exercice 25 (Théorème d'inversion globale)**.** Soient E et F des Banachs, $U \subset E$ un ouvert de $f : U \to F$ une application $\mathcal{C}^k$ telle que $\forall x \in U$, $D_x f \in \text{Iso}(E,F)$.

1. Montrer que f est une application ouverte.

   Soit $\Omega \subset U$ un ouvert, il s'agit de montrer que $f(\Omega)$ est ouvert. Soit $y \in f(\Omega)$, il existe $x \in \Omega$ tel que $y = f(x)$. Comme $D_x f \in \mathrm{Iso}(E, F)$, par le théorème d'inversion locale, f réalise un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme local d'un voisinage de x dans U vers un voisinage de y dans F. Quitte à prendre l'intersection avec $\Omega \in \mathcal{V}(x)$, il existe V voisinage ouvert de x inclus dans Ω tel que $f_{|V}$ soit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de V vers son image. En particulier, $f(V)$ est ouvert et $y \in f(V) \subset f(\Omega)$. Donc $f(\Omega)$ est voisinage de y. Donc $f(\Omega)$ est voisinage de chacun de ses points, donc ouvert. Donc f est ouverte.

2. Si f est injective, montrer que c'est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U vers $f(U)$.

   Si f est injective, alors $f : U \to f(U)$ est bijective et $\mathcal{C}^k$. Comme f est une application ouverte, l'application réciproque f^{-1} est continue. Donc f est un homéomorphisme.

   Comme $D_x f$ est un isomorphisme pour tout $x \in U$, on a que f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme d'après le cours.

Exercice 26 (Régularité des racines d'un polynôme)**.** Soit $d \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{ev} : \mathbb{R}_d[X] \times \mathbb{R}$ l'application d'évaluation définie par $\mathrm{ev} : (P, x) \mapsto P(x)$.

1. Justifier que ev est $\mathcal{C}^\infty$.

   Soit $\varphi : \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_d[X] \times \mathbb{R}$ l'isomorphisme définit par $\varphi : (a_0, \dots, a_d, x) \mapsto \left(\sum_{i=0}^d a_i X^i, x\right)$. L'application $\mathrm{ev} \circ \varphi : \mathbb{R}^{d+2} \to \mathbb{R}$ est $(a_0, \dots, a_d, x) \mapsto \sum_{i=0}^d a_i x^i$. Elle est polynomiale sur $\mathbb{R}^{d+2}$, donc $\mathcal{C}^\infty$. Comme φ^{-1} est linéaire donc $\mathcal{C}^\infty$, on a que $\mathrm{ev} = (\mathrm{ev} \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$ comme composée d'applications $\mathcal{C}^\infty$.

   De façon moins abstraite, on travaille dans la base canonique $(1, X, \dots, X^d)$ de $\mathbb{R}_d[X]$, et $\mathrm{ev} \circ \varphi$ est ev lue dans cette base. Mais pour cela il faut se convaincre que le choix d'une base ne modifie pas le caractère $\mathcal{C}^\infty$ d'une application.

2. Pour tout $P \in \mathbb{R}_d[X]$ et $x \in \mathbb{R}$, déterminer $D_{(P,x)} \mathrm{ev}$.

   Soient $P \in \mathbb{R}_d[X]$ et $x \in \mathbb{R}$, on sait par le point précédent que $D_{(P,x)} \mathrm{ev} : \mathbb{R}_d[X] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie et linéaire. Pour tout $Q \in \mathbb{R}_d[X]$ et $h \in \mathbb{R}$,

   $$D_{(P,x)} \mathrm{ev}(Q, h) = D_{(P,x)} \mathrm{ev}(Q, 0) + D_{(P,x)} \mathrm{ev}(0, h).$$

   Le nombre $D_{(P,x)} \mathrm{ev}(0, h)$ est la dérivée directionnelle de ev dans la direction $(0, h)$ en (P, x), i.e la dérivée en 0 de la fonction $f : t \mapsto \mathrm{ev}((P, x) + t(0, h)) = \mathrm{ev}(P, x + th) = P(x + th)$. Donc

   $$D_{(P,x)} \mathrm{ev}(0, h) = f'(0) = hP'(t).$$

   De même, $D_{(P,x)} \mathrm{ev}(Q, 0)$ est la dérivée en 0 de $g : t \mapsto \mathrm{ev}((P + tQ, x)) = P(x) + tQ(x)$, c'est-à-dire $D_{(P,x)} \mathrm{ev}(Q, 0) = g'(0) = Q(x)$. Finalement $D_{(P,x)} \mathrm{ev} : (Q, h) \mapsto Q(x) + hP'(x)$.

   Plus conceptuellement, $\partial_1 \mathrm{ev}(P, x) = D_{(P,x)} \mathrm{ev}(\cdot, 0)$ est la différentielle en P de l'application linéaire $\mathrm{ev}(\cdot, x) : \mathbb{R}_d[X] \to \mathbb{R}$. Donc $D_{(P,x)} \mathrm{ev}(\cdot, 0) = \partial_1 \mathrm{ev}(P, x) = \mathrm{ev}(\cdot, x)$. Par ailleurs, $\partial_2 \mathrm{ev}(P, x) = D_{(P,x)} \mathrm{ev}(0, \cdot)$ est la différentielle en x de l'application $\mathrm{ev}(P, \cdot) = P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire la multiplication par $P'(x)$. Par linéarité,

   $$D_{(P,x)} \mathrm{ev}(Q, h) = \partial_1 \mathrm{ev}(P, x)(Q) + \partial_2 \mathrm{ev}(P, x)(h) = Q(x) + hP'(x).$$

3. Soient $P \in \mathbb{R}_d[X]$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $P(x) = 0$ et $P'(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe un voisinage U de P dans $\mathbb{R}_d[X]$, un voisinage I de x dans $\mathbb{R}$ et $\psi : U \to I$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que $\psi(P) = x$ et, pour tout $Q \in U$, $\psi(Q)$ est l'unique racine de Q dans I.

On a $\mathrm{ev}(P,x) = 0$ et $\partial_2 \mathrm{ev}(P,x) : h \mapsto hP'(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ d'après la question précédente. Comme $P'(x) \neq 0$, on a que $\partial_2 \mathrm{ev}(P,x)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert U de P dans $\mathbb{R}_d[X]$, un voisinage ouvert I de x dans $\mathbb{R}$ et $\psi : U \to I$ tels que $\psi(P) = x$ et $\forall (Q,y) \in U \times I$, $Q(y) = \mathrm{ev}(Q,y) = 0 \iff y = \psi(Q)$.

Notamment, pour tout $Q \in U$, il existe une unique racine de Q dans I, qui est $\psi(Q)$.

Exercice 27 (Volume d'une courbe)**.** Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in [a,b]$, $\forall \varepsilon \in]0,1]$, $\gamma([x-\alpha\varepsilon, x+\alpha\varepsilon]) \subset B_F(\gamma(x), \varepsilon)$.

   Comme $[a,b] \subset I$ et I est ouvert, il existe $\beta > 0$ tel que $K = [a-\beta, b+\beta] \subset I$. Comme γ' est continue, elle est bornée sur le compact K, disons par $C > 0$. Posons $\alpha = \min\big(\beta, \frac{1}{C}\big) > 0$.

   Soient $\varepsilon \in]0,1]$ et $x \in [a,b]$, on a $0 < \varepsilon\alpha \leqslant \beta$ donc $[x-\varepsilon\alpha, x+\varepsilon\alpha] \subset K \subset I$. Donc, pour tout $y \in [x-\varepsilon\alpha, x+\varepsilon\alpha]$, on a $\|\gamma(y)-\gamma(x)\| \leqslant |y-x| \|\gamma'\|_{\infty,K} \leqslant C\alpha\varepsilon \leqslant \varepsilon$, par l'inégalité des accroissements finis. D'où le résultat.

2. Soit $\varepsilon \in]0,1]$, montrer qu'on peut recouvrir $\gamma([a,b])$ par $\lceil \frac{b-a}{2\alpha\varepsilon} \rceil$ boules fermées de rayon ε.

   Le segment $[a,b]$ étant de longueur $(b-a)$, on peut le recouvrir par $\lceil \frac{b-a}{2\alpha\varepsilon} \rceil$ segments de longueur $2\alpha\varepsilon$. Par exemple, les segments $[a+(2k-2)\alpha\varepsilon, a+2k\alpha\varepsilon]$ avec $k \in [\![1, \lceil \frac{b-a}{2\alpha\varepsilon} \rceil]\!]$, que l'on peut aussi écrire comme $[x_k - \alpha\varepsilon, x_k + \alpha\varepsilon]$, où $x_k = a + (2k-1)\alpha\varepsilon$ et $k \in [\![1, \lceil \frac{b-a}{2\alpha\varepsilon} \rceil]\!]$. Alors

   $$\gamma([a,b]) = \bigcup_{k=1}^{\lceil \frac{b-a}{2\alpha\varepsilon} \rceil} \gamma([x_k-\alpha\varepsilon, x_k+\alpha\varepsilon]) \subset \bigcup_{k=1}^{\lceil \frac{b-a}{2\alpha\varepsilon} \rceil} B_F(\gamma(x_k), \varepsilon),$$

   d'après la question précédente.

3. En déduire que $\gamma(I)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$ pour la mesure de Lebesgue.

   Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. D'après la question précédente, le volume n-dimensionnel de $\gamma([a,b])$ est borné par celui de $\lceil \frac{b-a}{2\alpha\varepsilon} \rceil$ boules de rayon ε. En notant ω le volume de la boule unité euclidienne de $\mathbb{R}^n$, on a

   $$\mathrm{Vol}(\gamma([a,b])) \leqslant \left\lceil \frac{b-a}{2\alpha\varepsilon} \right\rceil \varepsilon^n \omega \leqslant \omega\varepsilon^n \left(\frac{b-a}{2\alpha\varepsilon} + 1 \right) \leqslant \omega\varepsilon^{n-1} \left(\frac{b-a}{2\alpha} + \varepsilon \right) \underset{\varepsilon \to 0}{=} O(\varepsilon^{n-1}).$$

   Comme le terme de gauche est indépendant de ε, on en déduit que $\gamma([a,b])$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$.

   Ensuite, il existe deux suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, le première décroissante, la seconde croissante, telles que $a_0 < b_0$ et $I = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [a_k, b_k]$. Donc $\gamma(I) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \gamma([a_k, b_k])$ est union dénombrable d'ensembles de mesure nulle, donc de mesure nulle.

Exercice 28 (Lemme de Sard, cas facile)**.** Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On note $C = \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$ l'ensemble des points critiques de f.

1. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que : pour tout $x \in [a,b] \cap C$, on a $\gamma([x-\delta, x+\delta]) \subset [f(x) - \varepsilon\delta, f(x) + \varepsilon\delta]$.

   Comme $[a,b] \subset I$ et I est ouvert, il existe $\alpha > 0$ tel que $K = [a-\alpha, b+\alpha] \subset I$. Comme f' est continue, elle est uniformément continue sur le compact K. Soit $\delta \in]0, \alpha]$ tel que pour tout $x, y \in K$ si $|y-x| \leqslant \delta$ alors $|f'(y) - f'(x)| \leqslant \varepsilon$. Soit $x \in [a,b] \cap C$, alors $[x-\delta, x+\delta] \subset K$. Pour tout $z \in [x-\delta, x+\delta]$, on a donc $|f'(z)| = |f'(z) - f'(x)| \leqslant \varepsilon$. Par l'inégalité des accroissements finis, pour tout $y \in [x-\delta, x+\delta]$ on a donc $|f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon|y-x| \leqslant \varepsilon\delta$. Donc on a $\gamma([x-\delta, x+\delta]) \subset [f(x) - \varepsilon\delta, f(x) + \varepsilon\delta]$.

2. En déduire que $\gamma([a,b]\cap C)$ est de mesure nulle.
   Si $[a,b]\cap C=\emptyset$ c'est vrai. Sinon, comme $C=(f')^{-1}(0)$ est fermé, $[a,b]\cap C$ est compact et non-vide, il admet donc un minimum x_1.
   Soit $\varepsilon>0$ et soit $\delta>0$ correspondant donné par la question précédente, on note $N=\left\lceil\frac{b-a}{\delta}\right\rceil$. Pour tout $k\in[\![1,N]\!]$, on notera $x_k=x_1$ si le compact $[a+(k-1)\delta,a+k\delta]\cap C$ est vide, et $x_k=\min([a+(k-1)\delta,a+k\delta]\cap C)$ sinon. Si $[a+(k-1)\delta,a+k\delta]\cap C\neq\emptyset$, alors il contient x_k et est de longueur δ, donc $[a+(k-1)\delta,a+k\delta]\cap C\subset[x_k-\delta,x_k+\delta]$. Cette dernière inclusion est encore vrai si $[a+(k-1)\delta,a+k\delta]\cap C=\emptyset$. Comme $N\delta\geqslant b-a$, on a donc
   $$[a,b]\cap C=\bigcup_{k=1}^{N}[a+(k-1)\delta,a+k\delta]\cap C\subset\bigcup_{k=1}^{N}[x_k-\delta,x_k+\delta]$$
   Donc, en utilisant la définition de δ,
   $$f([a,b]\cap C)\subset\bigcup_{k=1}^{N}f([x_k-\delta,x_k+\delta])\subset\bigcup_{k=1}^{N}[f(x_k)-\varepsilon\delta,f(x_k)+\varepsilon\delta].$$
   Donc $f([a,b]\cap C)$ est de mesure au plus
   $$2N\varepsilon\delta\leqslant 2\varepsilon\delta\left(\frac{b-a}{\delta}+1\right)\leqslant 2(b-a+\delta)\varepsilon\leqslant 2(b-a+\alpha)\varepsilon,$$
   où α est comme dans la solution de la question précédente, en particulier indépendant de ε. C'est vrai pour tout $\varepsilon>0$ donc $f([a,b]\cap C)$ est de mesure nulle.
3. Montrer que $\gamma(C)$ est de mesure nulle.
   Comme dans la dernière question de l'exercice 27, on recouvre I par une famille dénombrable de segment et on applique le résultat à chacun. Alors $f(C)$ est union dénombrable d'ensembles négligeables, donc négligeable.

Exercice 29 (Continuité des applications multilinéaires)**.** Soient E et F des Banachs. Pour tout $x=(x_1,\dots,x_k)\in E^k$ on note $\|x\|_\infty=\max_{1\leqslant 1\leqslant k}\|x_i\|_E$.

1. Montrer que $\left(E^k,\|\cdot\|_\infty\right)$ est un espace de Banach
   Soit $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E^k. Pour tout $i\in[\![1,k]\!]$, pour tout $p,q\in\mathbb{N}$, on a $\|x_i^{(p)}-x_i^{(q)}\|_E\leqslant\|x^{(p)}-x^{(q)}\|_\infty$. Donc $(x_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E, donc converge vers une limite $x_i\in E$. Alors $x^{(n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}x=(x_1,\dots,x_k)$.
2. Soit $M:E^k\to F$ une application k-linéaire. Montrer que M est continue si et seulement s'il existe $C\geqslant 0$ tel que, pour tout $x\in E^k$, $\|M(x)\|_F\leqslant C\|x_1\|_E\dots\|x_k\|_E$.
   Supposons qu'il existe $C\geqslant 0$ comme ci-dessus. Soient $x=(x_1,\dots,x_k)$ et $y=(y_1,\dots,y_k)\in E^k$,
   $$\begin{aligned}\|M(y_1,\dots,y_k)-M(x_1,\dots,x_k)\|_F\leqslant&\|M(y_1,\dots,y_k)-M(x_1,,y_2\dots,y_k)\|_F\\&+\|M(x_1,y_2,\dots,y_k)-M(x_1,x_2,y_3,\dots,y_k)\|_F\\&+\dots+\|M(x_1,\dots,x_{k-1},y_k)-M(x_1,\dots,x_{k-1},x_k)\|_F\\\leqslant&\|M(y_1-x_1,y_2,\dots,y_k)\|_F\\&+\|M(x_1,y_2-x_2,y_3\dots,y_k)\|_F\\&+\dots+\|M(x_1,\dots,x_{k-1},y_k-x_k)\|_F\\\leqslant&C\|y_1-x_1\|_E\|y_2\|_E\dots\|y_k\|_E\\&+\dots+\|x_1\|_E\dots\|x_{k-1}\|_E\|y_k-x_k\|_E\\&\xrightarrow[y\to x]{}0.\end{aligned}$$

Donc M est continue sur E^k. Inversement, si M est continue, elle est en particulier continue en 0, donc il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in E^k$ si $\|x\|_\infty \leqslant \delta$ alors $\|M(x)\|_F \leqslant 1$. Soit $x = (x_1, \dots, x_k) \in E^k$, si l'un des x_i est nul alors $M(x) = 0$. Si $x_i \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, alors

$$1 \geqslant \left\| M\left(\frac{\delta}{\|x_1\|_E} x_1, \cdots, \frac{\delta}{\|x_k\|_E} x_k \right) \right\| = \frac{\delta^k}{\|x_1\|_E \dots \|x_k\|_E} \|M(x)\|_F.$$

Donc, pour tout $x \in E^k$, $\|M(x)\|_F \leqslant C \|x_1\|_E \dots \|x_k\|_E$ avec $C = \frac{1}{\delta^k}$.

3. Vérifier que la norme subordonnées à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ est bien une norme sur $\mathcal{L}_k(E, F)$. On rappelle qu'elle est définie par $\|M\| = \sup \left\{ \frac{\|M(x)\|_F}{\|x_1\|_E \cdots \|x_k\|_E} \;\middle|\; \forall i \in [\![1, k]\!], x_i \neq 0 \right\}$ pour tout $M \in \mathcal{L}_k(E, F)$.

   La question précédente montre déjà que $\|M\|$ est définie pour tout $M \in \mathcal{L}_k(E, F)$. Si $\|M\| = 0$ alors pour tout $x \in E^k$, $\|M(x)\| = 0$ et donc $M = 0$. Inversement, si $M = 0$ alors $\|M\| = 0$.

   Si $M, N \in \mathcal{L}_k(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors, pour tout $x \in E^k$ tel que $\forall i \in [\![1, k]\!], x_i \neq 0$,

$$\|(M + N)(x)\|_F \leqslant \|M(x)\|_F + \|N(x)\|_F \leqslant (\|M\| + \|N\|) \|x_1\|_E \dots \|x_k\|_E,$$
$$\frac{\|\lambda M(x)\|_F}{\|x_1\|_E \dots \|x_k\|_E} = |\lambda| \frac{\|M(x)\|_F}{\|x_1\|_E \dots \|x_k\|_E}.$$

   Donc $\|M + N\| \leqslant \|M\| + \|N\|$ et $\|\lambda M\| = |\lambda| \|M\|$ en passant au sup sur x.

4. En utilisant les isomorphismes canoniques $\mathcal{L}_k(E, F) \simeq \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, \dots \mathcal{L}(E, F) \dots))$ définis en cours, montrer que $(\mathcal{L}_k(E, F), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

   On sait que l'espace des applications linéaires continues entre deux Banachs est de Banach pour la norme d'opérateur, voir les exercices de topologie. Par récurrence, $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, \dots \mathcal{L}(E, F) \dots))$ est donc de Banach pour la norme naturelle induite par $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

   On a vu en cours que l'isomorphisme canonique $\mathcal{L}_k(E, F) \simeq \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, \dots \mathcal{L}(E, F) \dots))$ est en fait une isométrie. Donc $(\mathcal{L}_k(E, F), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

5. Par le même genre d'argument, montrer que si E est de dimension finie alors toute application k-linéaire sur E^k est continue.

   On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$. On sait que si E est de dimension finie, alors toute application linéaire sur E est continue, ce qui traite le cas $k = 1$ et servira dans l'étape de récurrence. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons que toute application k-linéaire sur E^k est continue. Soient F un espace normé et $M : E^{k+1} \to F$ une application $(k + 1)$-linéaire.

   Soit $x_0 \in E$, alors $M(x_0, \cdot) : E^k \to F$ est k-linéaire, donc continue par hypothèse de récurrence. On définit ainsi $\varphi : E \to \mathcal{L}_k(E, F)$ par $\varphi : x_0 \mapsto M(x_0, \cdot)$. Cette application est linéaire de E vers $\mathcal{L}_k(E, F)$, donc continue. Alors, pour tout $x = (x_0, \dots, x_k) \in E^{k+1}$, on a

$$\begin{aligned} \|M(x)\|_F = \|\varphi(x_0)(x_1, \dots, x_k)\|_F &\leqslant \|\varphi(x_0)\|_{\mathcal{L}_k(E,F)} \|x_1\|_E \dots \|x_k\|_E \\ &\leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{L}(E, \mathcal{L}_k(E,F))} \|x_0\|_E \dots \|x_k\|_E. \end{aligned}$$

   Donc M est continue sur E.

Exercice 30 (Différentiabilité des applications multilinéaires)**.** Soient E et F des espaces de Banach, $k \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{L}_k(E, F)$.

1. Montrer que M est différentiable sur $\left(E^k, \|\cdot\|_\infty\right)$ et expliciter sa différentielle.

   Soient $x = (x_1, \dots, x_k)$ et $h = (h_1, \dots, h_k) \in E^k$. Notons $\Lambda = \prod_{i=1}^k \{x_i, h_i\}$, de sorte que $\lambda = (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant k} \in \Lambda$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ on a $\lambda_i = x_i$ ou $\lambda_i = h_i$. L'ensemble

Λ est de cardinal 2^k et, par multilinéarité,

$$\begin{aligned}
M(x+h) =& M(x_1, x_2+h_2, \dots, x_k+h_k) + M(h_1, x_2+h_2, \dots, x_k+h_k) \\
=& M(x_1, x_2, x_3+h_3, \dots, x_k+h_k) + M(x_1, h_2, x_3+h_3, \dots, x_k+h_k) \\
&+ M(h_1, x_2, x_3+h_3, \dots, x_k+h_k) + M(h_1, h_2, x_3+h_3, \dots, x_k+h_k) \\
=& \dots = \sum_{\lambda\in\Lambda} M(\lambda).
\end{aligned}$$

Soit $\lambda \in \Lambda$, on a $\|M(\lambda)\| \leqslant \|M\| \|\lambda_1\|_E \dots \|\lambda_2\|_E$. Dans le régime où x est fixé et $h \to 0$, dès que deux des λ_i sont du type h_i le terme précédent est $O\big(\|h\|_\infty^2\big) = o(h)$. Donc,

$$M(x+h) = M(x) + M(h_1, x_2, \dots, x_k) + M(x_1, h_2, x_3, \dots, x_k) + \dots + M(x_1, \dots, x_{k-1}, h_k) + o(h).$$

Comme M est k-linéaire continue, l'application $M(\cdot, x_2, \dots, x_k)$ est linéaire et continue sur E. Comme de plus $p_1 : h = (h_1, \dots, h_k) \mapsto h_1$ est linéaire continue sur E^k, l'application composée $\psi_1(x_2, \dots, x_k) : h \mapsto M(h_1, x_2, \dots, x_k)$ linéaire continue de E^k dans F. De même pour les autres termes. Donc

$$h \mapsto M(h_1, x_2, \dots, x_k) + M(x_1, h_2, x_3, \dots, x_k) + \dots + M(x_1, \dots, x_{k-1}, h_k)$$

est linéaire continue sur E^k comme somme de telles applications.
Finalement, M est différentiable en tout $x = (x_1, \dots, x_k) \in E^k$ et

$$D_x M : (h_1, \dots, h_k) \mapsto M(h_1, x_2, \dots, x_k) + M(x_1, h_2, x_3, \dots, x_k) + \dots + M(x_1, \dots, x_{k-1}, h_k). \tag{iii}$$

2. Montrer que M est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur E^k.

On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $k = 1$, soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$, on sait que $D_x L = L$ pour tout $x \in E$. Donc DL est constante, donc différentiable de différentielle nulle. Donc pour tout $x \in E$, $D_x^2 L = 0 \in \mathcal{L}_2(E, F)$. En répétant l'argument, pour tout $p \geqslant 2$, $D^p L$ est bien définie et $\forall x \in E$, $D_x^p L = 0 \in \mathcal{L}_p(E, F)$. Donc L est bien $\mathcal{C}^\infty$ sur E.

Soit $k \geqslant 2$, supposons que toute application $(k-1)$-linéaire sur E^{k-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit $M \in \mathcal{L}_k(E, F)$, on a vu dans la question précédente que M est différentiable et que DM est définie par (iii).

Soient $y_2, \dots, y_k \in E$, on note comme précédemment $\psi_1(y_2, \dots, y_k) = M(\cdot, y_2, \dots, y_k) \circ p_1$. On a vu que $\psi_1(y_2, \dots, y_k) \in \mathcal{L}(E^k, F)$. Par ailleurs, $\psi_1 : E^{k-1} \to \mathcal{L}(E^k, F)$ est $(k-1)$-linéaire. Pour tout $h \in E^k$ et $y \in E^{k-1}$,

$$\begin{aligned}
\|\psi_1(y)(h)\|_F = \|M(h_1, y_2, \dots, y_k)\|_F &\leqslant \|M\| \|h_1\|_E \|y_2\|_E \dots \|y_k\|_E \\
&\leqslant \|M\| \|h\|_\infty \|y_2\|_E \dots \|y_k\|_E
\end{aligned}$$

Donc $\|\psi_1(y_2, \dots, y_k)\|_{\mathcal{L}(E^k, F)} \leqslant \|M\| \|y_2\|_E \dots \|y_k\|_E$ et donc ψ_1 est continue sur E^{k-1}. Finalement, on a $\psi_1 \in \mathcal{L}_{k-1}(E, \mathcal{L}(E^k, F))$. Donc ψ_1 est $\mathcal{C}^\infty$ par hypothèse de récurrence.

La projection $\pi_1 : (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_2, \dots, x_k)$ est linéaire continue de E^k dans E^{k-1}, en particulier $\mathcal{C}^\infty$. Donc $\psi_1 \circ \pi_1 : (x_1, \dots, x_k) \mapsto M(\cdot, x_2, \dots, x_k) \circ p_1$ est $\mathcal{C}^\infty$ de E^k vers $\mathcal{L}(E^k, F)$, voir exercice 21. D'après (iii), pour tout $x = (x_1, \dots, x_k) \in E^k$,

$$\begin{aligned}
D_x M &= M(\cdot, x_2, \dots, x_k) \circ p_1 + M(x_1, \cdot, x_3, \dots, x_k) \circ p_2 + \dots + M(x_1, \dots, x_{k-1}, \cdot) \circ p_k \\
&= \psi_1(\pi_1(x)) + \psi_2(\pi_2(x)) + \dots + \psi_k(\pi_k(x)),
\end{aligned}$$

où $\psi_2, \dots, \psi_k$ et $\pi_2, \dots, \pi_k$ sont définies similairement à ψ_1 et π_1 respectivement. Le même raisonnement que ci-dessus montre que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\varphi_i \circ \pi_i : E^k \to \mathcal{L}(E^k, F)$ est $\mathcal{C}^\infty$. Donc $DM = \sum_{i=1}^k \varphi_i \circ \pi_i$ est $\mathcal{C}^\infty$. Donc M est $\mathcal{C}^\infty$, ce qui conclut la récurrence et établit le résultat.

Exercice 31 (Applications multilinéaires symétriques)**.** Soient E et F des Banachs, $k \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{L}_k(E, F)$. On suppose que M est symétrique et on définit $f : x \mapsto \frac{1}{k!}M(x, \dots, x)$ de E dans F.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

   L'application $\iota : x \mapsto (x, \dots, x)$ de E dans E^k est $\mathcal{C}^\infty$ car linéaire continue. Donc $f = \frac{1}{k!}M \circ \iota$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, en utilisant les résultats des exercices 21 et 30.

2. Montrer que pour tout $p \in [\![1, k]\!]$, $\forall x \in E$, $D^p_x f : (h_1, \dots, h_p) \mapsto \frac{1}{(k-p)!}M(h_1, \dots, h_p, x, \dots, x)$ et pour tout $p > k$, $D^p f = 0$.

   On prouve par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que : pour tout E,F et k, pour tout $M \in \mathcal{L}_k(E, F)$ symétrique on a la formule voulue pour $D^p f$.

   Pour $p = 1$, soient E et F des Banachs et $M \in \mathcal{L}_k(E, F)$ symétrique, la règle de la chaine montre que, pour tout $x \in E$,

   $$D_x f = \frac{1}{k!}D_x(M \circ \iota) = \frac{1}{k!}D_{\iota(x)}M \circ D_x\iota = D_{\iota(x)}M \circ \iota,$$

   puisque ι est linéaire continue. On utilise alors la formule (iii) prouvée dans l'exercice 30 et la symétrie de M. Pour tout $x, h \in E$,

   $$\begin{aligned} D_x f(h) &= \frac{1}{k!}D_{(x,\dots,x)}M(h, \dots, h) \\ &= \frac{1}{k!}(M(h, x, \dots, x) + M(x, h, x, \dots, x) + \dots + M(x, \dots, x, h)) \\ &= \frac{1}{(k-1)!}M(h, x, \dots, x), \end{aligned}$$

   ce qui prouve le cas $p = 1$.

   Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat vrai pour p. Soient E et F des Banachs et $M \in \mathcal{L}_k(E, F)$ symétrique. Par hypothèse de récurrence, si $p = k$ alors $Df : x \mapsto M$, et si $p > k$ alors $Df : x \mapsto 0$. Dans les deux cas, Df est constante de E dans $\mathcal{L}_k(E, F)$ et donc $D^{p+1}_x f = 0$ pour tout $x \in E$.

   Supposons désormais que $k > p$. Par hypothèse de récurrence, pour tout $x \in E$,

   $$D^p_x f = \frac{1}{(k-p)!}M(\underbrace{\quad\cdot\quad}_{p \text{ arguments}}, \underbrace{x, \dots, x}_{(k-p) \text{ termes}}).$$

   Notons $N : E^{k-p} \to \mathcal{L}_p(E, F)$ définie par $N(y_{p+1}, \dots, y_k) = M(\cdot, y_{p+1}, \dots, y_k)$. L'application N est $(k-p)$-linéaire continue et symétrique. De plus,

   $$D^p f : x \mapsto \frac{1}{(k-p)!}N(x, \dots, x).$$

   En appliquant le cas $p = 1$ à cette fonction, pour tout $x, h_1, \dots, h_{p+1} \in E$ on a

   $$\begin{aligned} D^{p+1}_x f(h_1, \dots, h_{p+1}) &= \big(D_x(D^p f)(h_{p+1})\big)(h_1, \dots, h_p) \\ &= \frac{1}{(k-p-1)!}\big(N(h_p, x, \dots, x)\big)(h_1, \dots, h_p) \\ &= \frac{1}{(k-p-1)!}M(h_1, \dots, h_p, h_{p+1}, x, \dots, x). \end{aligned}$$

   Cela établit le résultat voulu pour $p + 1$ et conclut la récurrence.

Exercice 32 (Suite de fonctions différentiables)**.** Soient E et F des Banachs et $U \subset E$ un ouvert convexe borné. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions différentiables de U dans F. On suppose que :

- il existe $x_0 \in U$ tel que $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $a \in F$;
- il existe $g : U \to \mathcal{L}(E,F)$ telle que $Df_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} g$ uniformément.

1. Montrer que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, pour tout $x, y \in U$ on a

$$\|(f_p(x) - f_p(y)) - (f_q(x) - f_q(y))\| \leqslant \|Df_q - Df_p\|_\infty \|y - x\| \tag{1}$$

   On applique l'inégalité des accroissements finis en x et y à l'application $f_q - f_p$ qui est différentiable sur U. C'est bien possible puisque $[x, y] \subset U$ par convexité. Notons que

$$\|Df_q - Df_p\|_\infty \leqslant \|Df_q - g\|_\infty + \|Df_p - g\|_\infty$$

   et que le terme de droite est fini, au moins pour p et q assez grands.

2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur U, vers une fonction $f : U \to F$.
   Comme $f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, il est équivalent de montrer que $(f_n - f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur U vers une fonction h. On a alors

$$f_n = f_n(x_0) + f_n - f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} a + h = f.$$

   Comme U est borné, il existe $R > 0$ tel que $U \subset B(x_0, R)$. En appliquant (1) avec $y = x_0$, pour tout $x \in U$, $\|(f_p(x) - f_p(x_0)) - (f_q(x) - f_q(x_0))\| \leqslant \|Df_q - Df_p\|_\infty R$. On en déduit que $\|(f_p - f_p(x_0)) - (f_q - f_q(x_0))\|_\infty \leqslant \|Df_q - Df_p\|_\infty R$. Comme (Df_n) converge uniformément elle est de Cauchy uniforme. L'inégalité précédente montre alors que $(f_n - f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy uniforme. Plus précisément, c'est une suite de Cauchy dans l'espace des fonctions bornées de U dans F, qui est un Banach pour $\|\cdot\|_\infty$. Donc $(f_n - f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur U.

3. Montrer que f est différentiable sur U et que $Df = g$.
   Soit $x \in U$, comme $g(x) \in \mathcal{L}(E,F)$ il suffit de prouver que $f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + g(x)(h) + o(h)$. Pour tout h assez petit et tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|f(x+h) - f(x) - g(x)\cdot h\| \leqslant& \|(f(x+h) - f(x)) - (f_p(x+h) - f_p(x))\| \\ &+ \|f_p(x+h) - f_p(x) - D_x f_p \cdot h\| + \|D_x f_p \cdot h - g(x)\cdot h\| \\ \leqslant& 2\|g - Df_p\|_\infty \|h\| + \|f_p(x+h) - f_p(x) - D_x f_p \cdot h\|,\end{aligned}$$

   où on a utilisé (1) avec $y = x + h$ et $q \to +\infty$ pour contrôler le premier terme.
   Soit $\varepsilon > 0$, il existe p tel que $\|Df_p - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Par différentiabilité en x de f_p, pour h suffisamment petit, $\|f_p(x+h) - f_p(x) - D_x f_p \cdot h\| \leqslant \varepsilon \|h\|$. Donc pour tout h assez petit $\|f(x+h) - f(x) - g(x)\cdot h\| \leqslant 3\varepsilon\|h\|$. Donc $\|f(x+h) - f(x) - g(x)\cdot h\| = o(h)$. Donc f est différentiable en x et $D_x f = g(x)$.

Exercice 33 (Série de fonctions différentiables)**.** Soient E et F des Banachs et $U \subset E$ un ouvert convexe borné. Soit $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions différentiables de U dans F. On suppose que :

- il existe $x_0 \in U$ tel que $\sum_{k\in\mathbb{N}} g_k(x_0)$ converge ;
- la série de fonction $\sum_{k\in\mathbb{N}} Dg_k$ converge uniformément sur U.

Montrer que $\sum_{k\in\mathbb{N}} g_k$ converge uniformément sur U, que la somme est une fonction différentiable sur U, et que $D(\sum_{k\in\mathbb{N}} g_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} Dg_k$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n = \sum_{k=0}^{n} g_k$. Alors $f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k\geqslant 0} g_k(x_0)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est différentiable sur U de différentielle $Df_n = \sum_{k=0}^{n} Dg_k$. En particulier, $(Df_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur U vers $\sum_{k\in\mathbb{N}} Dg_k$.
En appliquant le résultat de l'exercice 32 à $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur U vers une fonction différentiable de différentielle $\sum_{k\in\mathbb{N}} Dg_k$. C'est exactement le résultat souhaité.

Exercice 34 (Différentiabilité de l'exponentielle)**.** Soit E un Banach et $\exp : L \mapsto \sum_{k\geqslant 0} \frac{L^k}{k!}$ de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même.

1. Montrer que exp est bien définie.
   Soit $L \in \mathcal{L}(E)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|L^k\| \leqslant \|L\|^k$. Ainsi, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{L^k}{k!}$ est normalement convergente, donc convergente, dans le Banach $\mathcal{L}(E)$ muni de sa norme d'opérateur.
2. Montrer que exp est différentiable sur $\mathcal{L}(E)$ et exprimer $D_L \exp(H)$ sous forme d'une série.
   On va utiliser le résultat de l'exercice 33.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $g_k : L \mapsto \frac{L^k}{k!}$ de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même. La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} g_k(0)$ converge dans $\mathcal{L}(E)$ vers Id. Notons que $g_0 : L \mapsto \mathrm{Id}$ est constante.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on note $M_k : (L_1, \dots, L_k) \mapsto L_k \circ \dots \circ L_1$ qui est k-linéaire de $\mathcal{L}(E)^k$ vers $\mathcal{L}(E)$. Cette application est continue car $\|M_k(L_1, \dots, L_k)\| = \|L_k \circ \dots \circ L_1\| \leqslant \|L_1\| \dots \|L_k\|$ pour tout $L_1, \dots, L_k \in \mathcal{L}(E)$. Donc M_k est différentiable, et sa différentielle est donnée par l'expression (iii).
   Notons $\iota_k : L \mapsto (L, \dots, L)$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)^k$, qui est linéaire continue. On a $g_k = \frac{1}{k!} M_k \circ \iota_k$, donc g_k est différentiable comme composée d'applications différentiables. Soit $L \in \mathcal{L}(E)$, par la règle de la chaine et la formule (iii), pour tout $H \in \mathcal{L}(E)$,
$$\begin{aligned} D_L g_k(H) &= \frac{1}{k!}\big(D_{\iota(L)} M_k \circ \iota\big)(H) = \frac{1}{k!} D_{(L,\dots,L)} M_k(H, \dots, H) \\ &= \frac{1}{k!}\big(M_k(H, L, \dots, L) + M_k(L, H, L, \dots, L) + \dots + M_k(L, \dots, L, H)\big). \end{aligned}$$
   Donc
$$\begin{aligned} \|D_L g_k(H)\| &\leqslant \frac{1}{k!}\big(\|M_k(H, L, \dots, L)\| + \|M_k(L, H, L, \dots, L)\| + \dots + \|M_k(L, \dots, L, H)\|\big) \\ &\leqslant \frac{1}{k!} k \|L\|^{k-1} \|H\| = \frac{\|L\|^{k-1}}{(k-1)!} \|H\|. \end{aligned}$$
   Ainsi $\|D_L g_k\| \leqslant \frac{\|L\|^{k-1}}{(k-1)!}$.
   Soit $R > 0$, pour tout $L \in B(0, R)$, on a $\|D_L g_k\| \leqslant \frac{R^{k-1}}{(k-1)!}$, donc $\|Dg_k\|_{\infty, B(0,R)} \leqslant \frac{R^{k-1}}{(k-1)!}$. Ainsi, la série $\sum_{k\geqslant 0} Dg_k$ converge normalement donc uniformément sur l'ouvert convexe borné $B(0, R)$. Par l'exercice 33, $\sum_{k\in\mathbb{N}} g_k$ converge uniformément vers f sur $B(0, R)$. De plus exp est différentiable sur $B(0, R)$ et $D \exp = \sum_{k\in\mathbb{N}} Dg_k$. Ceci est valable pour tout $R > 0$, donc

exp est différentiable sur $\mathcal{L}(E)$. De plus, pour tout $L, H \in \mathcal{L}(E)$,

$$\begin{aligned}
D_L \exp(H) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} D_L g_k(H) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k!}\big(M_k(H, L, \dots, L) + M_k(L, H, L, \dots, L) + \cdots + M_k(L, \dots, L, H)\big) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k!}\big(H \circ L \circ \cdots \circ L + L \circ H \circ L \circ \cdots \circ L + \cdots + L \circ \cdots \circ L \circ H\big)
\end{aligned}$$

3. Soient L et $H \in \mathcal{L}(E)$ tels que $L \circ H = H \circ L$, vérifier que $D_L \exp(H) = \exp(L) \circ H$.
   Si L et H commutent la formule précédente devient
   $$D_L \exp(H) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(k-1)!} L^{k-1} \circ H = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{L^k}{k!}\right) \circ H = \exp(L) \circ H,$$
   où on utilise la continuité de $K \mapsto K \circ H$ pour échanger la somme et la composition par H à droite.

Exercice 35 (Principe variationnel et géodésiques)**.** Soient $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ la norme associée. On note $\|\cdot\|_\infty$ la norme sup pour les fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^n$. On rappelle que $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$ est un Banach pour la norme définie par $\|\gamma\|_1 = \|\gamma\|_\infty + \|\gamma'\|_\infty$ pour tout $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $E = \{\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^n) \mid \gamma(0) = 0 = \gamma(1)\}$.

1. Montrer que $(E, \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach.
   L'application ev : $\gamma \mapsto (\gamma(0), \gamma(1))$ est linéaire continue de $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$ vers $\mathbb{R}^{2n}$. Donc l'espace $E = \ker(\mathrm{ev})$ est un sous-espace vectoriel fermé du Banach $\big(\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1\big)$. Donc $(E, \|\cdot\|_1)$ est complet.
2. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{S} : \gamma \mapsto \int_0^1 \|x + \gamma'(t)\|^2 \,\mathrm{d}t$ de E vers $\mathbb{R}$, montrer que $\mathcal{S}$ est différentiable et calculer sa différentielle.
   Soit γ et $h \in E$, on a
   $$\begin{aligned}
   \mathcal{S}(\gamma + h) &= \int_0^1 \|x + \gamma'(t) + h'(t)\|^2 \,\mathrm{d}t \\
   &= \int_0^1 \|x + \gamma'(t)\|^2 + 2\langle x + \gamma'(t)\,, h'(t)\rangle + \|h'(t)\|^2 \,\mathrm{d}t \qquad \text{(iv)} \\
   &= \mathcal{S}(\gamma) + 2\int_0^1 \langle x + \gamma'(t)\,, h'(t)\rangle \,\mathrm{d}t + \int_0^1 \|h'(t)\|^2 \,\mathrm{d}t.
   \end{aligned}$$
   D'une part, $\int_0^1 \|h'(t)\|^2 \,\mathrm{d}t \leqslant \|h'\|_\infty^2 \leqslant \|h\|_1^2 = o(h)$ lorsque $h \to 0$. D'autre part, $\forall h \in E$,
   $$\begin{aligned}
   \left|\int_0^1 \langle x + \gamma'(t)\,, h'(t)\rangle \,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^1 \big|\langle x + \gamma'(t)\,, h'(t)\rangle\big| \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \|x + \gamma'(t)\|\|h'(t)\| \,\mathrm{d}t \\
   &\leqslant \|x + \gamma'\|_\infty \|h'\|_\infty \leqslant \|x + \gamma'\|_\infty \|h\|_1,
   \end{aligned}$$
   Donc la forme linéaire $h \mapsto \int_0^1 \langle x + \gamma'(t)\,, h'(t)\rangle \,\mathrm{d}t$ est continue sur $(E, \|\cdot\|_1)$. Donc, pour tout $\gamma \in E$, l'application $\mathcal{S}$ est différentiable en γ et
   $$D_\gamma \mathcal{S} : h \mapsto 2\int_0^1 \langle x + \gamma'(t)\,, h'(t)\rangle \,\mathrm{d}t.$$

3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que, pour tout $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $g(0) = 0 = g(1)$, on a $\int_0^1 f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est constante.

   Indication. Considérer $g : y \mapsto \int_0^y f(t) - m\,\mathrm{d}t$, où $m = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Considérons g comme dans l'indication. On a bien $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $g(0) = 0$ et $g(1) = \int_0^1 f(t) - m\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - m = 0$. Notons que $\int_0^1 g'(t)\,\mathrm{d}t = g(1) - g(0) = 0$. On a donc

$$0 = \int_0^1 f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (f(t) - m)g'(t)\,\mathrm{d}t + m\int_0^1 g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (f(t) - m)^2\,\mathrm{d}t.$$

   Donc $f - m$ est la fonction nulle, et f est bien constante (à m qui est sa valeur moyenne, tout va bien).

4. En déduire que $\mathcal{S}$ possède un unique point critique γ_0 dans E et le déterminer.

   Soit $\gamma \in E$, supposons que γ soit un point critique de $\mathcal{S}$. Pour tout $h \in E$ on a

$$D_\gamma \mathcal{S}(h) = \int_0^1 \langle x + \gamma'(t)\,, h'(t)\rangle\,\mathrm{d}t = 0.$$

   Notons $h = (h_1, \dots, h_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Quitte à se restreindre à des $h \in E$ tels que $h_j = 0$ pour tout $j \neq i$, on a que

$$\int_0^1 \big(x_i + \gamma_i'(t)\big)h_i'(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

   pour tout $h_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $h_i(0) = 0 = h_i(1)$. Par la question précédente on a $x_i + \gamma_i'$ constante. Donc γ_i' est constante. Comme $\gamma \in E$, on a $0 = \gamma_i(1) - \gamma_i(0) = \int_0^1 \gamma_i'(t)\,\mathrm{d}t$. Donc finalement γ_i' est la fonction nulle, et γ_i aussi vu que $\gamma_i(0) = 0$. C'est valable pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, donc finalement $\gamma = 0$. Cela prouve que 0 est l'unique point critique potentiel de $\mathcal{S}$.

   Par ailleurs, pour tout $h \in E$ on a

$$D_0\mathcal{S}(h) = \int_0^1 \langle x\,, h'(t)\rangle\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 h_i'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n x_i(h_i(1) - h_i(0)) = 0.$$

   Donc 0 est effectivement point critique de $\mathcal{S}$. Donc $\mathcal{S}$ admet un unique point critique, en $\gamma_0 = 0$.

5. Vérifier que γ_0 est le minimum global de $\mathcal{S}$.

   On repart du calcul (iv). Pour tout $h \in E$, comme γ_0 est critique, on a

$$\mathcal{S}(\gamma_0 + h) = \mathcal{S}(\gamma_0) + D_{\gamma_0}\mathcal{S}(h) + \int_0^1 \|h'(t)\|^2\,\mathrm{d}t = \mathcal{S}(\gamma_0) + \int_0^1 \|h'(t)\|^2\,\mathrm{d}t \geqslant \mathcal{S}(\gamma_0).$$

Soit Γ une courbe régulière entre 0 et x, au sens où il existe un paramétrage $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\alpha(a) = 0$, $\alpha(b) = 1$, α' ne s'annule pas, et $\Gamma = \alpha([a,b])$. On note $L(\Gamma) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\,\mathrm{d}t$ la longueur de Γ. Si $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ est un autre paramétrage admissible, on rappelle qu'il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ tel que $\beta = \alpha \circ \varphi$. On rappelle également qu'un tel Γ admet un paramétrage par longueur d'arc, c'est-à-dire tel que $\|\alpha'\|$ est constante à 1.

6. Montrer que $L(\Gamma)$ ne dépend pas du choix du paramétrage α, et qu'on peut toujours trouver un paramétrage $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tel que $\|\alpha'\|$ est constante.

Soient $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ et $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ deux paramétrages admissibles de Γ. D'après le rappel, il existe $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que $\beta = \alpha \circ \varphi$. Alors on a $\beta' = (\alpha' \circ \varphi)\varphi'$ et donc

$$\int_c^d \|\beta'(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_c^d \|\alpha'(\varphi(t))\| |\varphi'(t)| \,\mathrm{d}t = \int_a^b \|\alpha'(s)\| \,\mathrm{d}s$$

par le changement de variable $s = \varphi(y)$. Donc $L(\Gamma)$ ne dépend pas du choix d'un paramétrage.

L'énoncé rappelle qu'il existe une paramétrage par longueur d'arc de Γ. Soit $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un tel paramétrage. Alors $\beta : t \mapsto \alpha((1-t)a + tb)$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$ est tel que $\beta(0) = \alpha(a) = 0$, $\beta(1) = \alpha(b) = x$, $\beta([0,1]) = \alpha([a,b]) = \Gamma$. Enfin pour tout $t \in [0,1]$,

$$\|\beta'(t)\| = \|\alpha'((1-t)a + tb)\|(b-a) = b - a.$$

Donc $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ est un paramétrage de Γ à vitesse constante.

7. On note $u : t \mapsto tx$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ un paramétrage de Γ tel que $\|\alpha'\|$ soit constante, montrer que $L(\Gamma)^2 = \mathcal{S}(\alpha - u)$.

   Notons $v > 0$ la constante telle que $\|\alpha'\|(t) = v$ pour tout $t \in [0,1]$. On a

$$L(\Gamma) = \int_0^1 \|\alpha'(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_0^1 v \,\mathrm{d}t = v.$$

   D'autre part, $\alpha - u$ est $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$ et $\alpha(0) = 0 = u(0)$ et $\alpha(1) = x = u(1)$, donc $\alpha - u \in E$. On calcule alors

$$\mathcal{S}(\alpha - u) = \int_0^1 \|x + \alpha'(t) - u'(t)\|^2 \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2 \,\mathrm{d}t = v^2.$$

   Donc $L(\Gamma)^2 = \mathcal{S}(\alpha - u)$.

8. Conclure qu'il existe une unique courbe régulière de 0 à x minimisant L et la déterminer.

   Toute courbe régulière Γ de 0 à x admet un paramétrage $\alpha_\Gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ à vitesse constante. Comme $L(\Gamma)$ ne dépend pas du paramétrage, on peut se restreindre à ne considérer que des paramétrages de ce type.

   Pour des paramétrages de ce type, on vient de prouver que $L(\Gamma)^2 = \mathcal{S}(\alpha_\Gamma - u)$. Minimiser $L(\Gamma)$ parmi les courbes régulières revient donc à minimiser $\mathcal{S}(\alpha - u)$ parmi les α à vitesse constante.

   Or, on a vu que $\mathcal{S}$ admet un unique minimum global sur E, en 0. Donc, pour tout α du type précédent on a $\mathcal{S}(\alpha - u) \geqslant \mathcal{S}(0) = \mathcal{S}(u - u)$. Comme $u : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ est $\mathcal{C}^1$ de 0 vers x à vitesse constante, c'est un paramétrage du type qui nous intéresse. Ainsi, pour tout courbe régulière Γ

$$L(\Gamma)^2 = \mathcal{S}(\alpha_\Gamma - u) \geqslant \mathcal{S}(0) = L(u([0,1]))^2.$$

   Finalement, il existe une unique courbe régulière de 0 à x minimisant la longueur, et c'est $u([0,1]) = [0,x] \subset \mathbb{R}^n$, qui est de longueur $\|x\|$.

   Remarque. Tout ça pour ça, certes. Mais c'est le prototype d'une méthode permettant de déterminer les courbes de longueur minimale dans des espaces métriques plus compliqués : les variétés riemanniennes. Ce genre de techniques est aussi à la base de la formulation Lagrangienne de la mécanique classique, par exemple.