Cours de Topologie

Thomas Letendre

Prépa Agreg – Automne 2024

Introduction

La topologie est le domaine où on donne un sens formel aux notions de limites et de continuité. Dans ce cadre, on peut définir les notions de compacité, connexité et complétude, qui débouchent notamment sur des résultats d'existence non constructifs (théorème des valeurs intermédiaires, théorème du point fixe de Picard) ou d'uniformité (théorème de Heine).

Le programme de l'agreg se limite à la topologie des espaces métriques. Nous allons utiliser le vocabulaire de la topologie générale, mais on ne rentrera pas dans les subtilités qui apparaissent hors du cas métrique.

Les références principales pour ce cours sont [4, chap. I à VII] et [5], tout à fait lisibles par les agrégatif·ve·s. Le classique [2] est un bon réservoir de contre-exemples. Enfin, [1, chap. I] traite de topologie au niveau classe préparatoire (sous stéroïdes) de façon très concise, peut-être trop.

Table des matières

1 Préliminaire : le corps ordonné des réels

L'objet fondamental et principal exemple de ce cours est $\mathbb{R}$, muni de sa distance usuelle. Ses propriétés topologiques sont bien connues, mais les établir demande du travail. Elles sont à la base de nombreux résultats plus évolués. Par exemple, un ingrédient important de la preuve de l'équivalence des normes en dimension finie est la description des compacts de $\mathbb{R}$, voir Section 3.3. L'ordre dans lequel on établit les propriétés de $\mathbb{R}$ dépend fortement d'un choix de construction (ou de définition axiomatique) des réels. Dans cette section, on en choisit une.

Supposons construit le corps $(\mathbb{Q}, +, \times)$ des rationnels. L'ordre canonique $\leqslant$ sur $\mathbb{Q}$ est compatible avec $+$ et $\times$, au sens où si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ alors $a+b \geqslant 0$ et $ab \geqslant 0$, ce dont on déduit toutes les règles usuelles concernant les interactions entre $+, \times$ et $\leqslant$. On dit que $(\mathbb{Q}, +, \times, \leqslant)$ est un *corps ordonné.*

Théorème 1.1 (Admis)**.** *Il existe un corps ordonné* $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$*, unique à isomorphisme près, avec les propriétés suivantes.*

- $\mathbb{Q}$ *est un sous-corps de* $\mathbb{R}$*, et la relation d'ordre sur* $\mathbb{R}$ *étend celle de* $\mathbb{Q}$*.*
- Propriété de la borne supérieure *: toute partie non-vide et majorée de* $\mathbb{R}$ *possède une* borne supérieure*, c'est-à-dire un plus petit majorant.*

Démonstration. La preuve est accessible mais n'est pas un attendu de l'agreg, voir [3, chap. 1]. □

Remarque 1.2. Une autre possibilité est de supposer $\mathbb{R}$ complet par construction. Elle présente cependant un paradoxe apparent qu'il s'agit de lever : parler de suite de Cauchy nécessite une notion de distance, et une distance est une application à valeurs ... dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.3 (Intervalle)**.** On dit que la partie $I \subset \mathbb{R}$ est un *intervalle* si elle vérifie : $\forall x, y \in I$, $\forall z \in \mathbb{R}$, si $x < z < y$ alors $z \in I$. On note les intervalles classiquement $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$ selon leur nature aux bornes, où $a \leqslant b$ et les bornes ouvertes peuvent prendre les valeurs $\pm\infty$.

Corollaire 1.4 (Densité des rationnels)**.** *Tout intervalle ouvert non-vide de* $\mathbb{R}$ *contient un rationnel. Autrement dit, pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$ *tels que* $x < y$*, il existe* $r \in \mathbb{Q}$ *tel que* $x < r < y$*.*

Démonstration. En exercice, voir [4, sect. I.1]. □

2 Vocabulaire de la topologie générale

2.1 Espaces métriques et espaces topologiques

Définition 2.1 (Espace métrique)**.** Un *espace métrique* (X, d) est un ensemble X muni d'une *distance* d, c'est-à-dire une application $d : X \times X \to [0, +\infty[$ satisfaisant les axiomes suivants :

- séparation : $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- symétrie : $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;
- inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in X$, $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

Exemple 2.2.

1. L'exemple fondamental est $\mathbb{R}$ muni de $d : (x, y) \mapsto |y - x|$.
2. Plus généralement, un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ muni de $d : (x, y) \mapsto \|y - x\|$.
3. On définit une distance sur $\mathbb{R}$ par $d : (x, y) \mapsto |\arctan(y) - \arctan(x)|$. Elle s'étend en une distance sur $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec la convention $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ et $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$.
4. Tout ensemble peut être muni de la *distance discrète* : $d(x, y) = 0$ si $x = y$ et $d(x, y) = 1$ sinon.

Définition 2.3 (Boule)**.** Soient $x \in X$ et $R \in [0, +\infty[$, on note $B(x, R) = \{y \in X \mid d(x, y) < R\}$ (resp. $B_F(x, R) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant R\}$) la *boule ouverte* (resp. *fermée*) de *centre* x et de *rayon* R.

Le programme de l'agreg se restreint à la topologie des espaces métriques. Plus généralement on peut se placer dans le cadre des espaces topologiques, dont on introduit maintenant le vocabulaire.

Définition 2.4 (Espace topologique)**.** Un *espace topologique* $(X, \mathcal{O})$ est un ensemble X muni d'une *topologie* $\mathcal{O}$, c'est-à-dire une famille $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ satisfaisant les axiomes suivants :

- $\emptyset \in \mathcal{O}$ et $X \in \mathcal{O}$;
- stabilité par intersection finie : pour tout U et $V \in \mathcal{O}$, on a $U \cap V \in \mathcal{O}$.
- stabilité par réunion quelconque : pour toute famille $(U_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{O}$, on a $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$.

Pour tout $Y \subset X$, on dit que Y est *ouvert* si $Y \in \mathcal{O}$ et que Y *fermé* si $X \setminus Y \in \mathcal{O}$.

Remarque 2.5. L'ensemble des fermés contient $\emptyset$ et X. Il est stable par union finie et par intersection.

Exemple 2.6.
1. Sur un ensemble X, la famille $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ définit une topologie, dite *grossière*.
2. $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X, dite *discrète*, telle que toute partie est ouverte et fermée.
3. La famille des réunions d'intervalles ouverts définit une topologie sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.7. *Soit (X, d) un espace métrique, les réunions quelconques de boules ouvertes forment une topologie sur X, appelée* topologie métrique*.*

Démonstration. En exercice, voir [4, sect. II.2]. □

Lemme 2.8 (Séparation)**.** *La topologie métrique sur (X, d) est* séparée *: pour tout $x, y \in X$ distincts il existe deux ouverts U et V tels que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.*

Démonstration. Les boules ouvertes de rayon $\frac{d(x,y)}{3}$ centrées en x et y conviennent. □

Exemple 2.9.
1. Si $\mathrm{Card}(X) \geqslant 2$ la topologie grossière n'est pas séparée, donc pas métrique.
2. La topologie discrète (ex. 2.6.2) est métrique, associée à la distance discrète (ex. 2.2.4).
3. La topologie de l'exemple 2.6.3 est la topologie métrique associée à la distance usuelle sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2.10.
- Plusieurs distances peuvent définir la même topologie. Les notions topologiques (ouverts, limite, continuité, etc.) dépendent uniquement de la topologie sous-jacente.
- Être ouvert (ou fermé) est une propriété extrinsèque : elle dépend d'un espace topologique ambiant. Par exemple, $]0, 1]$ est ouvert dans $]0, 1]$, fermé dans $\mathbb{R}^*$ et ni l'un ni l'autre dans $\mathbb{R}$.
- La topologie usuelle de $\mathbb{R}$ peut être décrite en termes d'intervalles (cf. ex. 2.9.3), c'est-à-dire en utilisant uniquement la relation d'ordre. La spécificité de $\mathbb{R}$ vient de ce lien entre ordre et topologie, combiné avec la propriété de la borne supérieure.

2.2 Voisinages, intérieur, adhérence

Définition 2.11 (Voisinage)**.** Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $x \in X$. On dit que $A \subset X$ est un *voisinage* de x s'il existe $U \in \mathcal{O}$ tel que $x \in U \subset A$. Si X est métrique, cette condition est équivalente à : il existe $R > 0$ tel que $B(x, R) \subset A$. On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

Lemme 2.12. *L'ensemble $\mathcal{V}(x)$ est stable par les opérations suivantes :*

- *extension : si $A \in \mathcal{V}(x)$ et $A \subset B$ alors $B \in \mathcal{V}(x)$;*
- *intersection finie : si $A, B \in \mathcal{V}(x)$ alors $A \cap B \in \mathcal{V}(x)$.*

Démonstration. En exercice, voir [4, sect. II.3]. □

Définition 2.13 (Adhérence, intérieur, frontière)**.** Soit A une partie d'un espace topologique X.

- Son *adhérence* $\overline{A}$ est l'intersection des fermés contenant A, i.e. le plus petit fermé contenant A.
- Son *intérieur* $\mathring{A}$ est l'union des ouverts inclus dans A, i.e. le plus gros ouvert inclus dans A.
- Sa *frontière* est le fermé $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Lemme 2.14. *Soient $x \in X$ et $A \subset X$, on a les caractérisations suivantes en termes de voisinages :*

$$x \in \mathring{A} \iff A \in \mathcal{V}(x) \qquad \text{et} \qquad x \in \overline{A} \iff \forall U \in \mathcal{V}(x), U \cap A \neq \emptyset$$

Démonstration. Si $x \in \mathring{A} \subset A$ alors $A \in \mathcal{V}(x)$ car $\mathring{A}$ est ouvert. Si $A \in \mathcal{V}(x)$, il existe U ouvert tel que $x \in U \subset A$. Par définition $U \subset \mathring{A}$, donc $x \in \mathring{A}$.

Pour le second point on prouve que $x \notin \overline{A} \iff \exists U \in \mathcal{V}(x), U \cap A = \emptyset$. Si $x \notin \overline{A}$ alors $X \setminus \overline{A}$ est un voisinage ouvert de x disjoint de A. S'il existe $U \in \mathcal{V}(x)$ tel que $U \cap A = \emptyset$, quitte à réduire U on peut le supposer ouvert. Alors $X \setminus U$ est un fermé contenant A, donc $\overline{A} \subset X \setminus U$, et $x \notin \overline{A}$. □

Définition 2.15 (Densité)**.** Une partie $A \subset X$ est dite *dense* dans X si $\overline{A} = X$.

Lemme 2.16. *La partie $A \subset X$ est dense si et seulement si pour tout ouvert $U \neq \emptyset$ on a $A \cap U \neq \emptyset$.*

Démonstration. Si $\overline{A} \neq X$, alors $X \setminus \overline{A}$ est ouvert, non-vide et disjoint de A. Si $\overline{A} = X$, soit U ouvert non-vide. Soit $x \in U$, on a $U \in \mathcal{V}(x)$. Comme $x \in \overline{A}$ on a donc $U \cap A \neq \emptyset$, d'après le lem. 2.14. □

Exemple 2.17. Tout ouvert non-vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$ d'après le cor. 1.4. Donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2.3 Limite et continuité

Définition 2.18 (Limite d'une suite)**.** Soient $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace topologique Y et $\ell \in Y$, on dit que $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ si $\forall V \in \mathcal{V}(\ell)$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant N, y_n \in V$.

Si Y est métrique, cette condition est équivalente à : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant N$, $d_Y(y_n, \ell) < \varepsilon$.

Définition 2.19 (Valeur d'adhérence)**.** Soient $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans Y, on dit que y est *valeur d'adhérence* de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout $V \in \mathcal{V}(y)$ l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid y_n \in V\}$ est infini.

Lemme 2.20. *L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le fermé $\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\{y_n \mid n \geqslant N\}}$.*

Démonstration. En exercice. □

Si Y est un espace métrique, ou plus généralement un espace séparé, on a unicité de la limite d'une suite convergente. C'est une raison pour laquel les espaces métriques sont agréables. Une autre raison est qu'on y dispose de caractérisations séquentielles, i.e. par les suites, des propriétés topologiques (adhérence, limite, continuité, etc.). Un exemple est le résultat suivant.

Lemme 2.21. *Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace métrique (Y, d), le point $y \in Y$ est valeurs d'adhérence de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il est limite d'une sous-suite extraite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Démonstration. En exercice, voir [4, sect. II.6]. □

Définition 2.22. Soient X et Y des espaces topologiques, $A \subset X$ et $f : A \to Y$. Soient $x_0 \in \overline{A}$ et $\ell \in Y$, on dit que $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$ si pour tout $V \in \mathcal{V}(\ell)$ il existe $U \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $U \cap A \subset f^{-1}(V)$.

Si X et Y sont métriques, cette condition équivaut à : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $B(x_0, \eta) \cap A \subset f^{-1}\big(B(\ell, \varepsilon)\big)$, i.e. $\forall x \in A, d_X(x, x_0) < \eta \implies d_Y(f(x), \ell) < \varepsilon$.

Remarque 2.23. Cette définition recouvre les définitions habituelles de limite en $\pm\infty$ pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, et de limite infinie pour les fonctions à valeurs réelles. Il faut pour cela munir $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ de la distance de l'exemple 2.2.1, qui induit la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$, et pour laquelle les boules centrées en $+\infty$ (resp. $-\infty$) sont de la forme $]a,+\infty[\cup\{+\infty\}$ (resp. $\{-\infty\}\cup]-\infty,a[$).

Définition 2.24 (Continuité en un point)**.** Soit $f : X \to Y$ entre espaces topologiques, on dit que f est *continue en* $x_0 \in X$ si $\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0))$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_0)$, c'est-à-dire si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0)$.

Définition 2.25 (Continuité)**.** Soit $f : X \to Y$ une application entre espaces topologiques, on dit que f est *continue* si elle vérifie les conditions équivalentes suivantes :

- f est continue en tout point $x \in X$;
- pour tout $U \subset Y$ ouvert, $f^{-1}(U)$ est ouvert ;
- pour tout $F \subset Y$ fermé, $f^{-1}(F)$ est fermé ;

Si f est continue bijective et f^{-1} est continue, on dit que f est un *homéomorphisme* et que X et Y sont *homéomorphes*.

Lemme 2.26. *Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont continues alors $g \circ f$ est continue.*

Démonstration. Pour tout $U \subset Z$ ouvert on a $g^{-1}(U) \subset Y$ ouvert, par continuité de g. Donc $(g\circ f)^{-1}(U) = f^{-1}\big(g^{-1}(U)\big)$ est ouvert dans X par continuité de f. Donc $g \circ f$ est continue. □

2.4 Topologie induite et topologie produit

Définition 2.27 (Topologie induite)**.** Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $Z \subset X$, la famille $\mathcal{O}_Z = \{O \cap Z \mid O \in \mathcal{O}\}$ définit une topologie sur Z appelée *topologie induite*. C'est la plus petite topologie (celle avec le moins d'ouverts) qui rend l'inclusion canonique $\iota_Z : z \in Z \mapsto z \in X$ continue.

Si (X, d) est un espace métrique alors la topologie induite sur Z est métrique et définie par $d_{|Z\times Z}$.

Lemme 2.28 (Continuité des restrictions)**.** *Soient $f : X \to Y$ continue entre espaces topologiques et $Z \subset X$, alors la restriction $f_{|Z} : Z \to Y$ est continue pour la topologie induite.*

Démonstration. On a $f_{|Z} = f \circ \iota_Z$, d'où le résultat puisque f et ι_Z sont continues. □

Définition 2.29 (Topologie produit)**.** Soient $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ des espaces topologiques et $X = \prod_{i\in I} X_i$. On définit les ouverts de la *topologie produit* sur X comme les réunions d'ensembles de la forme $\prod_{i\in I} U_i$, où $U_i \in \mathcal{O}_i$ pour tout $i \in I$, et $U_i = X_i$ sauf pour un nombre fini d'indices. C'est la plus petite topologie telle que la projection $X \to X_i$ soit continue pour tout $i \in I$.

Soient $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ et $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans X. Notons $x^{(n)} = \left(x_i^{(n)}\right)_{i\in I}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut vérifier que $x^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ dans X si et seulement si : $\forall i \in I$, $x_i^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_i$ dans X_i. La topologie produit est donc la topologie de la convergence composante par composante.

Supposons que pour tout $i \in I$ la topologie de X_i est définie par une distance d_i. Si $I = \{1, \dots, n\}$, seul cas au programme de l'agreg, la topologie produit sur X est métrique. On peut la définir au choix par l'une des distance suivantes :

$$d_p : \big((x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}, (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\big) \mapsto \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} d_i(x_i, y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{avec } p \in [1, +\infty[,$$

$$\text{ou } d_\infty : \big((x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}, (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\big) \mapsto \max_{1\leqslant i\leqslant n} d_i(x_i, y_i).$$

Si $I = \mathbb{N}$, la topologie produit sur X est encore métrique, associée par exemple à la distance $d : \big((x^{(i)})_{i\in\mathbb{N}}, (y^{(i)})_{i\in\mathbb{N}}\big) \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \min\big(1, d_i(x^{(i)}, y^{(i)})\big)$. Si I est indénombrable, la topologie produit n'est pas associée à une métrique. La topologie produit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, qui est la topologie de la convergence simple pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, fournit un exemple naturel de telle topologie.

3 Compacité

Dans cette section on s'intéresse à la compacité. Cette propriété permet d'obtenir des résultats d'existence (d'extréma par exemple) ou d'uniformité (théorème de Heine). Un résultat fondamental est la compacité des segments de $\mathbb{R}$.

3.1 Propriété de Borel–Lebesgue

Définition 3.1 (Propriété de Borel–Lebesgue)**.** On dit qu'un espace topologique X satisfait la *propriété de Borel–Lebesgue* **(BL)** si pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ telle que $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ il existe $J \subset I$ fini tel que $X = \bigcup_{i\in J} U_i$. De façon équivalente, X satisfait **(BL)** si pour toute famille de fermés $(F_i)_{i\in I}$ telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$ il existe $J \subset I$ fini tel que $\bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$.

Définition 3.2 (Espace compact)**.** On dit qu'un espace topologique X est *compact* si il est séparé (par exemple métrique) et satisfait **(BL)**.

Remarque 3.3. La compacité est une propriété intrinsèque d'un espace topologique. Quand on parle de la compacité d'une partie, cela signifie qu'on considère cette partie munie de la topologie induite. En particulier, dans X séparé, une partie $K \subset X$ est compacte si et seulement si, pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, il existe $J \subset I$ fini tel que $K \subset \bigcup_{i\in J} U_i$.

Lemme 3.4. *Soit X un espace compact et $F \subset X$ une partie fermée, alors F est compacte.*

Démonstration. Soit $(U_i)_{i\in I}$ des ouverts de X tels que $F \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Alors $X = (X \setminus F) \cup \bigcup_{i\in I} U_i$ est un recouvrement ouvert. Donc il existe $J \subset I$ fini tel que $X = (X \setminus F) \cup \bigcup_{i\in J} U_i$, et donc $F \subset \bigcup_{i\in J} U_i$. □

Lemme 3.5. *Soit K un compact d'un espace topologique séparé X, alors K est fermé dans X.*

Démonstration. On va prouver que $X \setminus K$ est ouvert. Soit $a \notin K$, comme X est séparé, pour tout $x \in K$ il existe $U_x \in \mathcal{V}(x)$ et $V_x \in \mathcal{V}(a)$, des voisinages ouverts dans X, tels que $U_x \cap V_x = \emptyset$. Comme $K \subset \bigcup_{x\in K} U_x$, il existe $x_1, \dots, x_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} = U$. Mais alors $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$ est un ouvert et $U \cap V = \emptyset$. Donc $a \in V \subset X \setminus U \subset X \setminus K$. Donc $X \setminus K \in \mathcal{V}(a)$ pour tout $a \in X \setminus K$. □

Lemme 3.6. *Soit $f : X \to Y$ continue d'un compact dans un espace séparé, alors $f(X)$ est compact.*

Démonstration. Soit $(U_i)_{i\in I}$ des ouverts de Y tels que $f(X) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, alors $X = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$ est un recouvrement ouvert de X. Il existe donc $J \subset I$ fini tel que $X = \bigcup_{i\in J} f^{-1}(U_i)$. Donc $f(X) \subset \bigcup_{i\in J} U_i$. □

Lemme 3.7. *Soit $f : X \to Y$ une bijection continue d'un compact dans un espace séparé, alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration. Il suffit de prouver que f^{-1} est continue, c'est-à-dire que l'image directe par f (qui est l'image réciproque par f^{-1}) de tout fermé de X est fermée dans Y. Soit $F \subset X$ fermé. Comme X est compact F aussi. Comme Y est séparé et f continue, $f(F)$ est compact, donc fermé. □

Exemple 3.8. Soient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes de réels modulo 1 et $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la projection canonique. On peut munir $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ d'une métrique d_0, définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad d_0(\pi(x), \pi(y)) = d(x + \mathbb{Z}, y + \mathbb{Z}) = \min_{n\in\mathbb{Z}} |x - y + n|.$$

La fonction $t \mapsto e^{2i\pi t}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ induit une bijection $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$, et on peut vérifier qu'à la fois π et f sont continues.

On prouvera plus loin que $[0, 1]$ est un compact de $\mathbb{R}$, voir thm. 3.21. Si on admet ce fait, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \pi([0, 1])$ est compact par le lem. 3.6. Donc f est un homéomorphisme par le lem. 3.7.

Théorème 3.9 (compacts emboités)**.** *Soient X un espace compact et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fermés tels que $F_{n+1} \subset F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$ si et seulement si $\exists N \in \mathbb{N}$, $F_N = \emptyset$.*

Démonstration. Par compacité, il existe $J \subset \mathbb{N}$ fini tel que $\bigcap_{n\in J} F_n = \emptyset$. Soit $N = \max(J)$, par décroissance de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'intersection précédente est $F_N = \emptyset$. La réciproque est claire. □

Corollaire 3.10. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace compact X, alors $(x_n)_{n\in N}$ admet des valeurs d'adhérences.*

Démonstration. D'après le lem. 2.20, l'ensemble des valeurs d'adhérences est $\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n \mid n \geqslant N\}}$. C'est une intersection de fermés non-vides, donc elle est non-vide par le thm. 3.9. □

Lemme 3.11. *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace compact X converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.*

Démonstration. En exercice, voir [5, sect. II.2.2]. □

3.2 Espaces métriques compacts

Dans cette section on considère des espaces métriques donc séparés. Dans ce cadre, on peut caractériser les compacts en termes de suites.

Définition 3.12 (Propriété de Bolzano–Weierstrass)**.** On dit qu'un espace métrique (X, d) satisfait la propriété de *Bolzano–Weierstrass* **(BW)** si toute suite à valeurs dans X admet une valeur d'adhérence (i.e. une sous-suite convergente, voir lem. 2.21).

Théorème 3.13. *Un espace métrique (X, d) est compact si et seulement s'il satisfait **(BW)**.*

Lemme 3.14 (Lebesgue)**.** *Si (X, d) satisfait **(BW)**, pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall x \in X$, $\exists i \in I$, $B(x, \varepsilon) \subset U_i$.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X pour lequel il n'existe pas de tel ε.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $x_n \in X$ tel que $B(x_n, \frac{1}{n})$ n'est contenu dans aucun des U_i. Soit ℓ une valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Il existe $i \in I$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B(\ell, 2\varepsilon) \subset U_i$. Il existe $n > \frac{1}{\varepsilon}$ tel que $x_n \in B(\ell, \varepsilon)$. Alors $B(x_n, \frac{1}{n}) \subset B(x_n, \varepsilon) \subset B(\ell, 2\varepsilon) \subset U_i$. Contradiction. □

Lemme 3.15 (Précompacité)**.** *Si (X, d) satisfait **(BW)**, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $Y \subset X$ fini tel que $X = \bigcup_{y\in Y} B(y, \varepsilon)$.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Soit $\varepsilon > 0$, supposons qu'aucune union finie de boules ouvertes de rayon ε ne recouvre X. Par récurrence, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{k=0}^{n} B(x_k, \varepsilon) \neq \emptyset$.

Si $y \in X$, la boule $B(y, \frac{\varepsilon}{2})$ contient au plus l'un des x_n, donc y n'est pas valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc cette suite n'a pas de valeur d'adhérence. Contradiction. □

Démonstration du thm. 3.13. Si (X,d) est compact, il satisfait **(BW)** par le cor. 3.10.

Inversement, si (X,d) satsifait **(BW)**, soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Soit $\varepsilon > 0$ donné par le lem. 3.14. Soit $Y \subset X$ fini tel que $X \subset \bigcup_{y\in Y} B(y,\varepsilon)$, donné par le lem. 3.15. Pour tout $y \in Y$, il existe $i_y \in I$ tel que $B(y,\varepsilon) \subset U_{i_y}$. Alors $(U_{i_y})_{y\in Y}$ est un sous-recouvrement fini de X. Donc X est séparé et satisfait **(BL)** donc est compact. □

Théorème 3.16 (Tychonov)**.** *Soient I un ensemble fini ou dénombrable et $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces métriques compacts, alors le produit $X = \prod_{i\in I} X_i$ est compact.*

Démonstration. Comme la topologie produit sur X est métrique, on va montrer que X a **(BW)**. Soit $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{i\in I}$. On va construire une sous-suite extraite convergente par extractions successives.

Dans le cas dénombrable, on peut supposer $I = \mathbb{N}$. Soit $i \in \mathbb{N}$, supposons qu'on a construit des extractions $\varphi_0, \dots, \varphi_{i-1}$ telles que, pour tout $j \in [\![0, i-1]\!]$, la suite $(x_j^{(\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_j(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans X_j vers un certain x_j. Notons que cette hypothèse est vérifiée pour $i = 0$, ce qui permet de traiter l'initialisation et l'hérédité en même temps. Par compacité de X_i, la suite $(x_i^{(\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_j(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence $x_i \in X_i$. D'après le lem. 2.21, il existe donc une extraction φ_i telle que $(x_i^{(\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_i(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_i. Par récurrence, il existe donc une suite $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'extractions telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $x_i^{(\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_i(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_i$ dans X_i.

On utilise alors le procédé diagonal de Cantor en définissant l'extraction $\varphi : k \mapsto \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_k(k)$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite $(x_i^{(\varphi(n))})_{n\geqslant i}$ est extraite de $(x_i^{(\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_i(n))})_{n\geqslant i}$ donc converge vers x_i. Donc $x^{(\varphi(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans X, par définition de la topologie produit.

Si I est fini, on peut le supposer de la forme $I = [\![0, n]\!]$. Un nombre fini d'étape de la récurrence précédente fournit $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ telles que $x_i^{(\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_i(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_i \in X_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. Si on pose $\varphi = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n$, on a $x^{(\varphi(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n} \in X$. □

Remarque 3.17. Plus généralement, un produit quelconque d'espaces topologiques compacts est compact, voir [5, sect. II.2.4]. Le cas général sort largement des attendus de l'agreg.

Définition 3.18 (Continuité uniforme)**.** Soit $f : X \to Y$ entre espaces métriques, on dit que f est *uniformément continue* si $\forall\varepsilon > 0$, $\forall\eta > 0$ tel que $\forall x, y \in X$, $d(x,y) < \eta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Remarque 3.19. On verra dans la section 5.2 qu'un intérêt technique des applications uniformément continues est que l'image d'une suite de Cauchy par une telle application est de Cauchy.

Théorème 3.20 (Heine)**.** *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces métriques. Si X est compact alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $z \in X$ il existe $\eta_z > 0$ tel que $B(z, 2\eta_z) \subset f^{-1}(B(f(z),\varepsilon))$. On a alors $X = \bigcup_{z\in X} B(z,\eta_z)$. Par compacité, on peut se ramener à une famille finie $z_1, \dots, z_n \in X$. Notons $\eta = \min\{\eta_{z_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} > 0$.

Soient $x, y \in X$ tels que $d(x,y) < \eta$. Il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $d(x, z_i) < \eta_{z_i}$. Par inégalité triangulaire $d(y, z_i) < 2\eta_{z_i}$, donc x et $y \in B(z_i, 2\eta_{z_i})$ et donc $f(x)$ et $f(y) \in B(f(z_i),\varepsilon)$. Donc $d(f(x), f(y)) < 2\varepsilon$. Donc f est uniformément continue. □

3.3 Compacité des segments et quelques conséquences

Théorème 3.21. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$, alors $[a,b]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Il s'agit d'utiliser la spécificité de $\mathbb{R}$: la propriété de la borne supérieure. La topologie usuelle de $\mathbb{R}$ est métrique donc séparée. On va montrer que $[a,b]$ satisfait **(BL)**.

Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $[a,b]$ par des ouverts de $\mathbb{R}$, on considère l'ensemble

$$E = \left\{ x \in [a,b] \;\middle|\; \exists J \subset I \text{ fini tel que } [a,x] \subset \bigcup_{i\in J} U_i \right\}.$$

Il contient a et est majoré par b donc admet une borne supérieure $s \in [a,b]$. On va prouver que $b = s \in E$.

Soit $j \in I$ tel que $s \in U_j$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]s-\varepsilon, s+\varepsilon[\subset U_j$. On note $\eta = \frac{1}{2}\min(\varepsilon, b-s) \geqslant 0$, de sorte que $s+\eta \in [a,b] \cap [s, s+\varepsilon[$. Il existe $x \in E \cap]s-\varepsilon, s]$, sinon $s-\varepsilon$ majorerait E. Soit $J \subset I$ fini tel que $[a,x] \subset \bigcup_{i\in J} U_i$. On a alors $[a, s+\eta] \subset [a,x] \cup]s-\varepsilon, s+\varepsilon[\subset \bigcup_{i\in J\cup\{j\}} U_i$, donc $s+\eta \in E$. Par définition de s, on a donc $\eta = 0$. Donc $b = s = s+\eta \in E$. $\square$

Corollaire 3.22. *Les compacts de* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *sont exactement les fermés bornés pour* $\|\cdot\|_\infty$.

Démonstration. La topologie de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est métrique, définie par $d_\infty : (x,y) \mapsto \|y-x\|_\infty$. On a vu que c'est la topologie produit sur $\mathbb{R}^n$.

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ fermé et borné pour $\|\cdot\|_\infty$. Il existe $M > 0$ tel que $A \subset [-M,M]^n$. Par les thms. 3.16 et 3.21, l'ensemble $[-M,M]^n$ est compact, et donc A aussi.

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact. On sait déjà que K est fermé. De plus $K \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}}]-k,k[^n$, donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \bigcup_{k=0}^{k_0}]-k,k[^n =]-k_0,k_0[^n$. Donc pour tout $x \in K$, $\|x\|_\infty \leqslant k_0$. $\square$

Corollaire 3.23. *Soient X un compact non-vide et $f : X \to \mathbb{R}$ continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Démonstration. Comme f est continue, l'ensemble $f(X)$ est compact non-vide de $\mathbb{R}$. Donc il est fermé et borné par le cor. 3.22. $\square$

Corollaire 3.24 (Équivalence des normes)**.** *Sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Il suffit de prouver que sur $\mathbb{R}^n$ une norme quelconque N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$N(x) = N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leqslant \|x\|_\infty \underbrace{\sum_{i=1}^n N(e_i)}_{=M}. \tag{3.1}$$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|N(y) - N(x)| \leqslant N(y-x) \leqslant M\|y-x\|_\infty$. Donc N est continue sur $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

L'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$ est fermé borné pour $\|\cdot\|_\infty$, donc compact pour $\|\cdot\|_\infty$ d'après le cor. 3.22. Donc N est bornée sur S et atteint ses bornes. Donc il existe $x_0 \in S$ tel que $0 < m = N(x_0) \leqslant N(x)$ pour tout $x \in S$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a donc

$$N(x) = \|x\|_\infty N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \geqslant m\|x\|_\infty, \tag{3.2}$$

et cette inégalité est encore vraie en $x = 0$. Le résultat est donné par (3.1) et (3.2). $\square$

Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ étant équivalentes, elles définissent la même topologie. En particulier, si une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est fermée (resp. bornée, resp. compacte) pour une norme donnée elle l'est pour toute. A posteriori, on déduit des cor. 3.22 et 3.24 que les compacts de $\mathbb{R}^n$ (pour n'importe quelle norme) sont exactement les fermés bornés (pour n'importe quelle norme).

4 Connexité

Dans cette section on s'intéresse à la notion de connexité d'un espace topologique (ou métrique). Elle permet d'obtenir des résultats d'existence (théorèmes des valeurs intermédiaires) ou de passage du local au global (une fonction constante au voisinage de chaque point d'un connexe est constante). Un résultat fondamental est la description des connexes de $\mathbb{R}$.

4.1 Espaces connexes

Proposition 4.1. *Soit X un espace topologique, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Les seules parties à la fois ouvertes et fermées de X sont $\emptyset$ et X.*
2. *Pour toute partition $X = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ de X en ouverts, il existe $j \in I$ tel que $U_j = X$.*
3. *Toute fonction $g : X \to \{0,1\}$ continue pour la topologie discrète de $\{0,1\}$ est constante.*

Démonstration. (1) $\implies$ (2). Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts telle que $X = \bigsqcup_{i \in I} U_i$. Si $X = \emptyset$ c'est bon. Sinon, il existe $j \in I$ tel que $U_j \neq \emptyset$. Alors $X \setminus U_j = \bigsqcup_{i \neq j} U_i$ est ouvert, donc U_j est ouvert et fermé, donc $U_j = X$. Dans ce cas $U_i = \emptyset$ pour tout $i \neq j$.

(2) $\implies$ (3). Comme $\{0,1\}$ est discret et g est continue, $X = g^{-1}(0) \sqcup g^{-1}(1)$ est une partition de X en ouverts. Donc l'un de ces ouverts est égal à X. Donc g est constante.

(3) $\implies$ (1). Soit $U \subset X$ ouvert et fermé. La fonction indicatrice $\mathbf{1}_U : X \to \{0,1\}$ de U est continue pour la topologie discrète sur $\{0,1\}$, donc est constante. Donc $U = \emptyset$ ou $U = X$. ☐

Définition 4.2 (Espace connexe)**.** Un espace topologique qui vérifie les propriétés de la prop. 4.1 est dit *connexe*.

La connexité est une propriété intrinsèque d'un espace topologique. Quand on parle de la connexité d'une partie, cela signifie qu'on considère cette partie munie de la topologie induite.

Lemme 4.3. *Soit $f : X \to Y$ continue, si X est connexe alors $f(X)$ est connexe.*

Démonstration. Soit $g : f(X) \to \{0,1\}$ continue, alors $g \circ f : X \to \{0,1\}$ est continue, donc constante par connexité de X. Donc g est constante, car $f : X \to f(X)$ est surjective. ☐

Lemme 4.4. *Soient $(C_i)_{i \in I}$ des parties connexes d'un espace topologique X, si $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$ alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.*

Démonstration. En exercice, voir [4, sect. V.1] ou [5, sect. II.1.1]. ☐

Lemme 4.5. *Soient A et B des parties d'un espace topologique X telles que $A \subset B \subset \overline{A}$. Si A est connexe alors B est connexe.*

Démonstration. Soit $g : B \to \{0,1\}$ continue. Alors $g_{|A}$ est continue donc constante par connexité de A, disons $A \subset g^{-1}(0)$. Par ailleurs $g^{-1}(0)$ est un fermé de B, donc de la forme $B \cap F$ avec F fermé de X. On a $A \subset g^{-1}(0) \subset F$ et donc $B \subset \overline{A} \subset F$. Donc $g^{-1}(0) = B$ et g est constante. ☐

4.2 Connexité des intervalles et connexité par arcs

Lemme 4.6. *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont des intervalles.*

Démonstration. Soit $C \subset \mathbb{R}$ un connexe, supposé non-vide. Soient $a, b \in C$ tels que $a \leqslant b$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que $a < c < b$. Si $c \notin C$ alors $C \cap]-\infty, c[$ et $C \cap]c, +\infty[$ sont deux ouverts non-vides qui partitionnent C. C'est absurde, donc $c \in C$. Donc C est un intervalle. ☐

Corollaire 4.7 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soient X un connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ continue, alors $f(X)$ est un intervalle. En particulier, soient $x, y \in X$, toute valeur entre $f(x)$ et $f(y)$ est atteinte par f.*

Théorème 4.8. *Les intervalles sont des parties connexes de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Il faut utiliser la spécificité de $\mathbb{R}$: la propriété de la borne supérieure.

Soit I un intervalle, supposons par l'absurde que I n'est pas connexe. Il existe alors U ouvert et fermé dans I tel que $\emptyset \neq U \neq I$. Soient $a \in U$ et $b \in I \setminus U$, quitte à échanger U et $I \setminus U$ on peut supposer que $a < b$. L'ensemble $E = \{t \in [a, b] \mid [a, t] \subset U\}$ contient a et est majoré par b. Soit $s = \sup E \in [a, b] \subset I$. Comme $E \subset U$ et U est fermé dans I, on a $s \in U$, en particulier $s < b$.

Comme U est ouvert dans I, il existe V ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $U = V \cap I$. Alors $s \in U \subset V$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[s - \varepsilon, s + \varepsilon] \subset V$. On peut supposer $s + \varepsilon \leqslant b$. Par ailleurs, il existe $x \in E \cap [s - \varepsilon, s]$, sinon $s - \varepsilon$ majorerait E. Alors $[x, s + \varepsilon] \subset V \cap [a, b] \subset V \cap I = U$. Mais alors $[a, s + \varepsilon] = [a, x] \cup [x, s + \varepsilon] \subset U$, donc $s + \varepsilon \in E$. Contradiction, donc I est connexe. □

Corollaire 4.9. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue tel que $f(a)f(b) < 0$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = 0$.*

Définition 4.10 (Connexité par arcs)**.** Un espace topologique X est dit *connexe par arcs* si pour tout $x, y \in X$ il existe un *chemin* de x à y, i.e. $\gamma : [0, 1] \to X$ continu tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Lemme 4.11. *Si X est connexe par arcs il est connexe.*

Démonstration. Soit $x \in X$, pour tout $y \in X$ il existe $\gamma_y : [0, 1] \to X$ chemin continu de x à y. Puis $X = \bigcup_{y \in X} \gamma_y([0, 1])$ est réunion de connexes s'intersectant en x, donc connexe par le lem. 4.4. □

Proposition 4.12. *Soit $n \geqslant 2$, il n'existe pas de bijection continue $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. En particulier, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe un tel $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est connexe par arcs donc connexe. Comme φ est bijective, $\varphi(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{\varphi(0)\}$. Par continuité de φ cet ensemble est connexe, ce qui contredit le lem. 4.6. □

4.3 Composantes connexes

Dans toute cette section X un espace topologique.

Définition 4.13 (Composante connexe)**.** Soit $x \in X$, l'union des parties connexes de X contenant x est appelée *composante connexe* de x, notée C_x. C'est le plus gros connexe de X contentant x.

Lemme 4.14. *Pour tout $x \in X$, la partie C_x est connexe et fermée.*

Démonstration. Par le lem. 4.4, on sait que C_x est connexe. Par le lem. 4.5, l'ensemble $\overline{C_x}$ est un connexe contenant x. Donc $\overline{C_x} \subset C_x$, d'où l'égalité. □

Lemme 4.15. *Soient x et $y \in X$, alors $C_x \cap C_y = \emptyset$ ou $C_x = C_y$.*

Démonstration. Si $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, alors $C_x \cup C_y$ est un connexe contenant x donc inclus dans C_x, donc $C_y \subset C_x$. Symétriquement $C_x \subset C_y$, d'où l'égalité. □

Avoir la même composante connexe définit une relation d'équivalence sur X, pour laquelle C_x est la classe de x. Les classes d'équivalence $(C_i)_{i \in I}$ pour cette relation sont appelées les *composantes connexes* de X. Elles fournissent une partition en fermés $X = \bigsqcup_{i \in I} C_i$. Dans le cas $X = \mathbb{R}$, cette partition permet de montrer le résultat suivant.

Proposition 4.16. *Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.*

Démonstration. En exercice. □

5 Complétude

On va maintenant s'intéresser à complétude qui est une notion purement métrique. Dans cette section, tous les espaces considérés sont donc métriques. La complétude fournit des théorèmes d'existence importants, comme le théorème du point fixe de Picard ou le théorème de prolongement des applications uniformément continues.

5.1 Suites de Cauchy et espaces complets

Définition 5.1 (Suite de Cauchy)**.** Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace métrique (X,d) est dite *de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p,q \geqslant N$, $d(x_p,x_q) < \varepsilon$.

Lemme 5.2. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge elle est de Cauchy*

Démonstration. En exercice. □

Lemme 5.3. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy alors elle est bornée.*

Démonstration. En exercice. □

Lemme 5.4. *Si la suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence $\ell \in X$, alors $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.*

Démonstration. En exercice. □

Définition 5.5 (Espace complet)**.** Un espace métrique (X,d) est dit *complet* si toute suite de Cauchy à valeurs dans X converge dans X.

La complétude est une propriété intrinsèque d'un espace métrique. Quand on parle de la complétude d'une partie, cela signifie qu'on considère cette partie munie de la distance induite.

Lemme 5.6. *Tout espace métrique compact (X,d) est complet.*

Démonstration. Une suite de Cauchy à valeurs dans X admet une valeur d'adhérence par compacité. Donc elle converge par le lem. 5.4. □

Théorème 5.7. *Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$ de dimension finie est complet. En particulier $\mathbb{R}$ est complet pour sa norme usuelle.*

Démonstration. Une suite de Cauchy à valeurs dans E est bornée, donc contenue dans un compact. Elle possède donc une valeur d'adhérence, et donc converge. □

Lemme 5.8. *Soit F une partie fermée d'un espace complet (X,d), alors (F,d) est complet.*

Démonstration. Une suite de Cauchy de F converge dans X par complétude. La limite est dans F car c'est un fermé. □

Lemme 5.9. *Soit (X,d) un métrique et $Y \subset X$. Si (Y,d) est complet alors Y est fermé dans X.*

Démonstration. Soit $x \in \overline{Y}$, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Y qui converge vers x. Cette suite est de Cauchy car convergente dans X. Par complétude elle converge dans Y, donc $x \in Y$. Donc $\overline{Y} = Y$. □

Corollaire 5.10. *Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $F \subset E$ un sous-espace de dimension finie, alors F est fermé.*

Démonstration. L'espace vectoriel normé $(F,\|\cdot\|)$ est complet car de dimension finie. Donc il est fermé dans E. □

5.2 Applications de la complétude

Le résultat suivant est un résultat d'existence important. Il apparait dans la preuve de nombreux résultats : théorème d'inversion local, théorème de Cauchy–Lipschitz, méthode de Newton, etc.

Théorème 5.11 (Picard)**.** *Soient (X,d) un espace complet et $f : X \to X$ une application k-contractante (i.e. k-lipschitzienne avec $k < 1$). Alors f admet un unique point fixe $\ell \in X$. De plus, pour tout $x_0 \in X$, la suite récurrente définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers ℓ.*

Démonstration. Prouvons d'abord l'unicité. Soient ℓ et $\ell' \in X$ deux points fixes de f, on a alors $d(\ell,\ell') = d(f(\ell), f(\ell')) \leqslant kd(\ell,\ell')$. Si $\ell \neq \ell'$ alors $d(\ell,\ell') \leqslant kd(\ell,\ell') < d(\ell,\ell')$ ce qui est absurde.

Soit $x_0 \in X$, on définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, i.e. $x_n = f^n(x_0) = f \circ \dots \circ f(x_0)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x_{n+1}) \leqslant kd(x_{n-1}, x_n) \leqslant \ldots \leqslant k^n d(x_0, x_1)$. Donc si $p < q$ alors

$$d(x_p,x_q) \leqslant d(x_p,x_{p+1}) + \dots + d(x_{q-1},x_q) \leqslant \left(k^p + \dots + k^{q-1}\right)d(x_0,x_1) \leqslant \underbrace{k^p}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{}0} \frac{d(x_0,x_1)}{1-k}.$$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X,d) et donc converge vers $\ell \in X$. Comme f est contractante elle est continue. Donc $f(\ell) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \ell$. □

Un autre résultat important de complétude est le théorème suivant. Parmi ses applications, on peut citer la définition de la transformée de Fourier–Plancherel sur $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 5.12 (Prolongement d'applications uniformément continues à valeurs dans un complet)**.** *Soient D une partie dense d'un métrique X et Y un espace complet. Soit $f : D \to Y$ une application uniformément continue. Il existe un unique prolongement continu $\widetilde{f} : X \to Y$ de f, qui est en fait uniformément continu.*

Démonstration. Soit $x \in X$, comme $\overline{D} = X$, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans D telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est de Cauchy. Comme f est uniformément continue, cela implique que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge par complétude de Y. Notons ℓ sa limite. Si $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans D et $x'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, alors $d(x_n, x'_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $d(f(x_n), f(x'_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par uniforme continuité de f, et donc $f(x'_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Ainsi, pour tout $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ on a $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. En particulier, tout prolongement continu $\widetilde{f} : X \to Y$ de f doit vérifier $\widetilde{f}(x) = \ell$. Cela prouve l'unicité et donne le seul candidat possible. Vérifions que $\widetilde{f}$ ainsi défini est uniformément continu.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ un module d'uniforme continuité de f associé à ε. Soient x et $y \in X$ tels que $d(x,y) < \frac{\delta}{2}$, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x et y respectivement. Pour tout n assez grand on a $d(x_n, y_n) < \delta$ et donc $d(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$. En passant à la limite $n \to +\infty$, on obtient $d\Big(\widetilde{f}(x), \widetilde{f}(y)\Big) \leqslant \varepsilon$. Donc $\widetilde{f}$ est uniformément continue. □

5.3 Espaces de Banach

Dans cette section, on fait quelques rappels sur les applications linéaires continues et la topologie des espaces de Banach. Ils seront utiles dans le cours de calcul différentiel.

Lemme 5.13 (Continuité des applications linéaires)**.** *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $L : E \to F$ une application linéaire, les énoncés suivants sont équivalents.*

1. L est continue sur E.

2. Il existe $C \geqslant 0$ tel que $\forall x \in E$, $\|L(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$.

Démonstration. En exercice, voir [4, sect. VII.4]. □

Lemme 5.14. *Si E est de dimension finie alors toute application linéaire $L : E \to F$ est continue.*

Démonstration. On définit une norme auxiliaire sur E par $x \mapsto \|x\|_E + \|L(x)\|_F$. Comme E est de dimension finie, elle est équivalente à $\|\cdot\|_E$ par le cor. 3.24. Il existe donc $C \geqslant 0$ tel que : $\forall x \in E$, $\|x\|_E + \|L(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$. En particulier, $\forall x \in E$, $\|L(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$. □

Définition 5.15 (Norme d'opérateur)**.** On note $\mathcal{L}(E, F)$ (resp. $\mathcal{L}(E)$) l'espace des applications linéaires *continues* de E dans F (resp. E). On définit sur $\mathcal{L}(E, F)$ la *norme d'opérateur* subordonnée à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ par :

$$\forall L \in \mathcal{L}(E, F), \qquad \|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup\left\{ \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} \;\middle|\; x \neq 0 \right\} = \sup\{\|L(x)\|_F \mid \|x\|_E = 1\}.$$

On note aussi $\mathrm{Iso}(E, F) = \left\{L \in \mathcal{L}(E, F) \;\middle|\; L \text{ bijective et } L^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)\right\}$ et $GL(E) = \mathrm{Iso}(E, E)$.

Lemme 5.16. *Soient $L \in \mathcal{L}(E, F)$ et $K \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $K \circ L \in \mathcal{L}(E, G)$ et $\|K \circ L\| \leqslant \|K\|\|L\|$.*

Démonstration. En exercice, voir [4, sect. VII.4]. □

Définition 5.17 (Espace de Banach)**.** Un *espace de Banach* est un espace vectoriel normé complet.

Exemple 5.18.

1. Les espaces vectoriels normés de dimension finie sont de Banach.
2. Soient K un compact et F un Banach, l'espace $\mathcal{C}^0(K, F)$ des fonctions continues de K dans F est de Banach pour la norme sup $\|\cdot\|_\infty$.

Proposition 5.19. *Si F est de Banach alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de Banach pour la norme de la définition 5.15. En particulier, $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est de Banach pour la norme subordonnée à $\|\cdot\|_E$ et $|\cdot|$.*

Démonstration. En exercice, voir [4, sect. VII.4]. □

Proposition 5.20. *Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ est de Banach si et seulement si il vérifie : pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge dans E.*

Démonstration. En exercice, voir [4, sect. VII.4]. □

Lemme 5.21 (Neumann)**.** *Soient E un Banach et $L \in \mathcal{L}(E)$. Si $\|L\| < 1$ alors $\mathrm{Id} - L \in GL(E)$ et $(\mathrm{Id} - L)^{-1} = \sum_{k\geqslant 0} L^k$.*

Démonstration. D'après le lem. 5.16, $\|L^k\| \leqslant \|L\|^k$ pour tout $k \geqslant 0$. Comme $\|L\| < 1$, la série $\sum_{k\geqslant 0} L^k$ est normalement convergente, donc convergente dans le Banach $\mathcal{L}(E)$, par la prop. 5.20. Le résultat est alors conséquence des égalités $(\mathrm{Id} - L)\left(\sum_{k\geqslant 0} L^k\right) = \mathrm{Id} = \left(\sum_{k\geqslant 0} L^k\right)(\mathrm{Id} - L)$. □

Corollaire 5.22. *Si E est de Banach, alors $GL(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$. De plus l'application $\mathrm{Inv} : L \mapsto L^{-1}$ est continue de $GL(E)$ dans lui-même.*

Démonstration. En exercice, voir [4, sect. VII.5]. □

5.4 Théorème de Baire

Théorème 5.23 (Baire)**.** *Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des ouverts denses de X, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$ est dense. De façon équivalente, soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des fermés d'intérieurs vides de X, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$ est d'intérieur vide.*

Démonstration. Soit $V \neq \emptyset$ un ouvert de X, montrons que $V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n \neq \emptyset$, ce qui prouvera la densité de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$ (cf. lem. 2.16).

Comme U_1 est ouvert et dense, $V \cap U_1$ est ouvert et non-vide. Donc il existe $x_1 \in X$ et $R_1 \in]0, 1]$ tels que $B(x_1, R_1) \subset V \cap U_1$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons qu'il existe $x_k \in X$ et $R_k \in]0, \frac{1}{k}]$ tels que $B(x_k, R_k) \subset V \cap \bigcap_{n=1}^{k} U_n$. Comme U_{k+1} est ouvert dense, $B(x_k, R_k) \cap U_{k+1}$ est ouvert non-vide, et il existe donc $x_{k+1} \in X$ et $R_{k+1} \in]0, \frac{1}{k+1}]$ tels que :

$$B(x_{k+1}, R_{k+1}) \subset B_F(x_{k+1}, R_{k+1}) \subset B(x_{k+1}, 2R_{k+1}) \subset B(x_k, R_k) \cap U_{k+1} \subset V \cap \bigcap_{n=1}^{k+1} U_n.$$

Par récurrence, on construit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 < R_k \leqslant \frac{1}{k}$ et $B_F(x_{k+1}, R_{k+1}) \subset B(x_k, R_k) \cap U_{k+1} \subset V \cap \bigcap_{n=0}^{k+1} U_n$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $p, q \geqslant N$ on a $x_p, x_q \in B(x_N, R_N)$ donc $d(x_p, x_q) < 2R_N \leqslant \frac{2}{N}$. Donc $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy. Comme X est complet, elle converge vers un certain $x \in X$. Pour tout $k \geqslant N$, $x_k \in B_F(x_N, R_N)$ fermée, donc $x \in B_F(x_N, R_N) \subset V \cap \bigcap_{n=1}^{N} U_n$. Donc $x \in V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. □

Corollaire 5.24. *Un espace normé E de dimension infinie dénombrable n'est pas de Banach.*

Démonstration. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace de dimension finie $F_n = \mathrm{Vect}\{e_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}$ est fermé et d'intérieur vide, sinon il contiendrait une boule, et donc E. Mais alors $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides. Si E était de Banach, cela contredirait le thm. 5.23. □

Le théorème de Baire a de nombreuses conséquences moins anecdoctiques : existence de fonctions continues nulle part dérivables, théorème de Banach–Steinhaus, etc. On en déduit aussi le théorème d'isomorphisme de Banach.

Théorème 5.25 (Banach)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach. Si $L \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective, alors $L^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. Notamment L^{-1} est nécessairement continue.*

Démonstration. Voir [4, app. B]. La preuve est accessible mais ce n'est pas un simple exercice. □

Références

[1] Xavier Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, Ellipses, 2008.

[2] Bertrand Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*, Ellipses, 2007.

[3] Walter Rudin, *Principes d'analyse mathématique*, Edisciences, 2000.

[4] Jean Saint Raymond, *Topologie, calcul différentiel et variable complexe*, Calvage et Mounet, 2008.

[5] Claude Tisseron, *Notions de topologie, introduction aux espaces fonctionnels*, Hermann, 1985.