Cours de Calcul Différentiel

Thomas Letendre

Prépa Agreg – Automne 2024

Introduction

Le point de départ du calcul différentiel est de définir un analogue de la dérivée pour les fonctions de plusieurs variables : la différentielle. La différentielle de f en x est l'application linéaire continue D_xf qui approxime le mieux f au voisinage de x. On cherche alors à comprendre f en la comparant à l'application plus simple D_xf. On obtient de la sorte des informations qualitatives (théorème d'inversion locale) ou quantitatives (inégalité des accroissements finis).

Le programme de l'agreg se limite au calcul différentiel pour les fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On va considérer plus généralement des fonctions entre ouverts d'espaces de Banach, ce qui a quelques belles applications (régularité du flot, calcul des variations).

Les références pour ce cours sont principalement [3, chap. II] et [5, chap. IX à XIV], avec quelques emprunts à [4]. Les livres [1, chap. 5] et [2] peuvent aussi être des références utiles.

Table des matières

1 Préliminaire : relations de comparaisons

Soient X un espace topologique, $Y \subset X$ et $a \in \overline{Y}$. Soient $f : Y \to F$ et $g : Y \to G$, où $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ sont deux espaces normés.

Définition 1.1. On dit que f est *négligeable* devant g quand x tend vers a s'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ et $\varepsilon : Y \cap V \to F$ tel que $f = \varepsilon \|g\|_G$ sur $Y \cap V$ et $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$. Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x \to a}{=} o\big(g(x)\big)$.

Remarque 1.2.
- Si g ne s'annule pas, cette définition revient à demander que $\frac{\|f(x)\|_F}{\|g(x)\|_G} \xrightarrow[x \to a]{} 0$.
- La relation de comparaison $f(x) \underset{x \to a}{=} o\big(g(x)\big)$ est conservée si on remplace $\|\cdot\|_F$ et $\|\cdot\|_G$ par des normes équivalentes. En dimension finie elle ne dépend donc pas des normes utilisées.
- La notation o fait des choses horribles à l'égalité qui n'est plus ni transitive ni symétrique. Dans $\mathbb{R}$, on a $x \underset{x \to 0}{=} o(1)$ et $x^2 \underset{x \to 0}{=} o(1)$. Mais on serait gêné d'écrire $o(1) \underset{x \to 0}{=} x$ ou $x \underset{x \to 0}{=} x^2$.

Lemme 1.3. *On a $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $V \in \mathcal{V}(a)$, tel que $\forall x \in Y \cap V$, $\|f(x)\|_F \leqslant \varepsilon \|g(x)\|_G$.*

Démonstration. En exercice. □

Définition 1.4. On dit que f est *dominée* par g sur Y (resp. au voisinage de a) s'il existe $C \geqslant 0$ (resp. $C \geqslant 0$ et $V \in \mathcal{V}(a)$) tel que $\|f(x)\|_F \leqslant C\|g(x)\|_G$ pour tout $x \in Y$ (resp. pour tout $x \in Y \cap V$). Dans ce cas, on note $f(x) = O\big(g(x)\big)$ (resp. $f(x) \underset{x \to a}{=} O\big(g(x)\big)$).

Définition 1.5. Dans le cas $F = G$, on dit que f et g sont *équivalentes* quand x tend vers a, et on note $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$, si $f(x) - g(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ (ou de façon équivalente si $f(x) - g(x) \underset{x \to a}{=} o(f(x))$).

2 Applications différentiables

Dans la suite, tous les espaces vectoriels considérés sont des Banach réels. On note E et F deux tels espaces, U un ouvert de E, et $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F.

2.1 Différentiabilité

Définition 2.1 (Différentiabilité)**.** Soit $f : U \to F$ et $x \in U$, on dit que f est *différentiable* en x s'il existe $L \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(x + h) \underset{h \to 0}{=} f(x) + L(h) + o(h)$.

Remarque 2.2. La différentiabilité de f en x dépend des normes à équivalence près via le $o(h)$. En dimension finie cette notion est uniquement définie.

Lemme 2.3. *Si f est différentiable en x alors elle est continue en x.*

Démonstration. On a $f(x+h) \underset{h \to 0}{=} f(x) + L(h) + o(h) \xrightarrow[h \to 0]{} f(x)$, car L est linéaire et continue. □

Lemme 2.4 (Unicité de la différentielle)**.** *Si f est différentiable en x, l'application L est unique.*

Démonstration. Soient $L, L' \in \mathcal{L}(E, F)$ satisfaisant toutes les deux la déf. 2.1, quand $h \to 0$ on a : $L'(h) - L(h) = (f(x+h) - f(x) + o(h)) - (f(x+h) - f(x) + o(h)) = o(h)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall h \in E$, $\|h\| \leqslant \delta \implies \|L'(h) - L(h)\| \leqslant \varepsilon \|h\|$. Soient $y \in E \setminus \{0\}$ et $h = \frac{\delta}{\|y\|} y$, on a :

$$\big\|(L' - L)(y)\big\| = \frac{\|y\|}{\delta} \big\|L'(h) - L(h)\big\| \leqslant \frac{\|y\|}{\delta} \varepsilon \|h\| = \varepsilon \|y\|.$$

C'est valable pour tout $y \neq 0$, donc $\|L' - L\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $\|L' - L\| = 0$ et $L = L'$. □

Définition 2.5 (Différentielle). • Si f est différentiable en x, l'application L de la déf. 2.1 est appelée la *différentielle* de f en x. On la note $D_x f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On dit que f est *différentiable* sur U si elle est différentiable en tout point de U. Dans ce cas, l'application $Df : x \mapsto D_x f$ de U dans $\mathcal{L}(E, F)$ est appelée la *différentielle* de f.
- Si $Df : U \to \mathcal{L}(E, F)$ est continue, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et on note $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$.

Exemple 2.6. 1. Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $x, h \in E$, on a $L(x + h) = L(x) + L(h)$, donc L est différentiable en x et $D_x L = L$. Donc $L \in \mathcal{C}^1(E, F)$ car $DL : E \mapsto \mathcal{L}(E, F)$ est constante. Par exemple, si $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$ et $L : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$. L'application L est parfois notée abusivement x_i et sa différentielle dx_i. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $d_x x_i : (h_1, \dots, h_n) \mapsto h_i$.

2. Soit $B : E_1 \times E_2 \to F$ bilinéaire et continue, il existe $C \geqslant 0$ tel que $\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $\|B(x_1, x_2)\|_F \leqslant C \|x_1\|_{E_1} \|x_2\|_{E_2}$. Pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $h = (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$ on a

$$B(x+h) = B(x_1+h_1, x_2+h_2) = \underbrace{B(x_1, x_2)}_{=B(x)} + \underbrace{B(h_1, x_2) + B(x_1, h_2)}_{\text{linéaire continue en } h} + \underbrace{B(h_1, h_2)}_{=O\left(\|h_1\|_{E_1}\|h_2\|_{E_2}\right)=o(\|h\|_\infty)}.$$

Donc B est différentiable en x et $D_x B : h \mapsto B(h_1, x_2) + B(x_1, h_2)$. D'où $B \in \mathcal{C}^1(E_1 \times E_2, F)$. Par exemple, si $E_1 = E_2 = F = \mathbb{R}$, et $B : (x, y) \mapsto xy$ alors $D_{(x,y)} B : (u, v) \mapsto uy + vx$.

3. Soient E un Banach et $\operatorname{Inv} : L \mapsto L^{-1}$ définit sur l'ouvert $GL(E) \subset \mathcal{L}(E)$. Pour tout $H \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|H\| < \frac{1}{2}$, on a $\|\sum_{k \geqslant 0} (-H)^k\| \leqslant \sum_{k \geqslant 0} \|H\|^k < 2$. D'après le lemme de Neumann,

$$(\operatorname{Id} + H)^{-1} = \operatorname{Id} - H + H^2 \sum_{k \geqslant 0} (-H)^k \underset{H \to 0}{=} \operatorname{Id} - H + O(H^2) \underset{H \to 0}{=} \operatorname{Id} - H + o(H).$$

Soit $L \in GL(E)$, les applications $H \mapsto L^{-1}H$ et $H \mapsto L^{-1}HL^{-1}$ sont linéaires continues de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$. En particulier, $L^{-1}H = O(H)$ et $L^{-1}HL^{-1} = O(H)$. Lorsque $H \to 0$, on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{Inv}(L + H) &= (L + H)^{-1} = (\operatorname{Id} + L^{-1}H)^{-1} L^{-1} = \left(\operatorname{Id} - L^{-1}H + o\left(L^{-1}H\right)\right) L^{-1} \\ &= \underbrace{L^{-1}}_{=\operatorname{Inv}(L)} - \underbrace{L^{-1}HL^{-1}}_{\text{linéaire continue en } H} + \underbrace{o(L^{-1}HL^{-1})}_{=o(H)}.\end{aligned}$$

Donc Inv est différentiable et, pour tout $L \in GL(E)$, $D_L \operatorname{Inv} : H \mapsto -L^{-1}HL^{-1}$.

Lemme 2.7 (Différentielle et dérivée). *Si $E = \mathbb{R}$ alors $f : U \to F$ est différentiable en $x \in U$ si et seulement si elle est dérivable en x. Si c'est le cas, on a $D_x f : h \mapsto f'(x)h$ et $f'(x) = D_x f(1)$.*

Démonstration. En exercice, voir [5, sect. X.2]. □

2.2 Opérations sur les applications différentiables

Dans cette section on s'intéresse aux opérations préservant la classe des fonctions différentiables. Cela permet de prouver la différentiabilité de fontions construites à partir de fonctions élémentaires. Un résultat important est la règle de la chaine (prop. 2.10).

Lemme 2.8 (Linéarité). *L'ensemble $\operatorname{Diff}_x(U, F)$ (resp. $\operatorname{Diff}(U, F)$, resp. $\mathcal{C}^1(U, F)$) des fonctions différentiables en $x \in U$ (resp. sur U, resp. $\mathcal{C}^1$) est un espace vectoriel et $D_x : \operatorname{Diff}_x(U, F) \to \mathcal{L}(E, F)$ (resp. $D : \operatorname{Diff}(U, F) \to \mathcal{L}(E, F)^U$, resp. $D : \mathcal{C}^1(U, F) \to \mathcal{C}^0(U, \mathcal{L}(E, F))$) est linéaire.*

Démonstration. En exercice, voir [5, sect. X.3]. □

Lemme 2.9. *Supposons $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par : $\forall y = (y_1, \ldots, y_p) \in F$, $\|y\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \|y_i\|_{F_i}$. Soit $f = (f_1, \ldots, f_p)$ de U dans F, on a $f \in \mathrm{Diff}_x(U, F)$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f_i \in \mathrm{Diff}_x(U, F_i)$. De plus, si c'est le cas, $D_x f : h \mapsto (D_x f_1(h), \ldots, D_x f_p(h))$.*

Démonstration. En exercice. □

Proposition 2.10 (Règle de la chaine)**.** *Soient E, F et G des Banachs et $U \subset E$ et $V \subset F$ des ouverts. Si $f : U \to V$ est différentiable en x et $g : V \to G$ est différentiable en $f(x)$ alors $g \circ f : U \to G$ est différentiable en x et $D_x(g \circ f) = D_{f(x)} g \circ D_x f$.*

Démonstration. Remarquons déjà que $D_{f(x)} g \circ D_x f$ est bien linéaire et continue. Soit $\beta > 0$ tel que $B(f(x), \beta) \subset V$. Par continuité de f en x, il existe $\alpha > 0$ tel que $B(x, \alpha) \subset U \cap f^{-1}\big(B(f(x), \beta)\big)$.

Comme f est différentiable en x, il existe $\varepsilon : B(0, \alpha) \to F$ telle que $\varepsilon(u) \xrightarrow[u \to 0]{} 0$ et

$$\forall u \in B(0, \alpha), \qquad f(x+u) = f(x) + \underbrace{D_x f(u) + \|u\| \varepsilon(u)}_{= v(u) \in B(0, \beta)}.$$

De même, par différentiabilité de g en $f(x)$, il existe $\eta : B(0, \beta) \to G$ telle que $\eta(v) \xrightarrow[v \to 0]{} 0$ et

$$\forall v \in B(0, \beta), \qquad g(f(x) + v) = g(f(x)) + D_{f(x)} g(v) + \|v\| \eta(v).$$

Pour tout $u \in B(0, \alpha)$, on a $v(u) \in B(0, \beta)$. Donc

$$\begin{aligned} g(f(x+u)) = g(f(x) + v(u)) &= g(f(x)) + D_{f(x)} g(v(u)) + \|v(u)\| \eta(v(u)) \\ &= g(f(x)) + D_{f(x)} g(D_x f(u)) + \|u\| D_{f(x)} g(\varepsilon(u)) + \|v(u)\| \eta(v(u)). \end{aligned}$$

Comme $D_{f(x)} g$ est linéaire continue, $D_{f(x)} g(\varepsilon(u)) \xrightarrow[u \to 0]{} 0$ et $\|u\| D_{f(x)} g(\varepsilon(u)) \underset{u \to 0}{=} o(u)$. D'autre part,

$$\|v(u)\| \leqslant \|D_x f(u)\| + \|u\| \|\varepsilon(u)\| \leqslant \|u\| (\|D_x f\| + \|\varepsilon(u)\|) \underset{u \to 0}{=} O(u) \xrightarrow[u \to 0]{} 0.$$

Donc $\eta(v(u)) \xrightarrow[u \to 0]{} 0$ et $\|v(u)\| \eta(v(u)) \underset{u \to 0}{=} o(u)$. Finalement,

$$(g \circ f)(x+u) \underset{u \to 0}{=} (g \circ f)(x) + (D_{f(x)} g \circ D_x f)(u) + o(u).$$ □

Corollaire 2.11. *Si $f : U \to V$ et $g : V \to G$ sont $\mathcal{C}^1$ alors $g \circ f$ est $\mathcal{C}^1$.*

Démonstration. La prop. 2.10 montrer que $g \circ f \in \mathrm{Diff}(U, G)$ et $D(g \circ f) : x \mapsto D_{f(x)} g \circ D_x f$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{L}(E,F) & \\
U \arrow[urr, bend left, "Df"] \arrow[r, blue, "{(D_f, D_{f(\cdot)}g)}"] \arrow[rrr, red, bend right, "D(g\circ f)"'] \arrow[drr, blue, "D_{f(\cdot)}g = Dg\circ f"'] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G) \arrow[rr, "\circ"] & & \mathcal{L}(E,F) \\
V \arrow[rr, "Dg"'] & & \mathcal{L}(F,G) &
\end{tikzcd}$$

Les flèches noires sont continues, par des résultats antérieurs ou par hypothèse.
En composant des applications continues, les flèches bleues sont continues, donc la flèche rouge aussi. □

Corollaire 2.12. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $U \subset E$ ouverts. Soient $\gamma : I \to U$ dérivable en $t \in I$ et $f : U \to F$ différentiable en $\gamma(t)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et $(f \circ \gamma)'(t) = D_{\gamma(t)} f(\gamma'(t))$.*

2.3 Dérivées directionnelles et dérivées partielles

Définition 2.13 (Dérivée directionnelle)**.** Soient $f : U \to F$, $x \in U$ et $v \in E$.

- On note $f_{x,v} : t \mapsto f(x + tv)$ qui est bien définie d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ vers F.
- Si $f_{x,v}$ est dérivable en 0, la *dérivée de* f *en* x *dans la direction* v est $\partial_v f(x) = (f_{x,v})'(0)$.
- Si $E = \mathbb{R}^n$ et $(e_1, \dots, e_n)$ est sa base canonique, la i-ème *dérivée partielle* de f en x est $\partial_i f(x) = \partial_{e_i} f(x)$, si elle existe.

Lemme 2.14. *Si $f : U \to F$ est différentiable en $x \in U$ alors, pour tout $v \in E$, $\partial_v f(x) = D_x f(v)$. Si de plus $E = \mathbb{R}^n$, la fonction f admet des dérivées partielles en x et $D_x f : h \mapsto \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(v)$.*

Démonstration. Supposons f différentiable en x. Soient $v \in E$ et $\gamma : t \mapsto x + tv$, de sorte que $f_{x,v} = f \circ \gamma$. Comme γ est dérivable, le cor. 2.12 montre que $f_{x,v}$ est dérivable en 0 et

$$\partial_v f(x) = (f_{x,v})'(0) = (f \circ \gamma)'(0) = D_x f(\gamma'(0)) = D_x f(v).$$

Si $E = \mathbb{R}^n$ cela prouve l'existence des dérivées partielles de f en x. Soit $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i \in \mathbb{R}^n$, par linéarité, $D_x f(h) = \sum_{i=1}^n h_i D_x f(e_i) = \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(x)$. □

Définition 2.15 (Jacobienne)**.** Soit $f = (f_1, \dots, f_m)$ de $U \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Si les $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ admettent des dérivées partielles en $x \in U$, la matrice *jacobienne* de f en x est $\big(\partial_j f_i(x)\big)_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$. Si f est différentiable en x, c'est la matrice de $D_x f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

Remarque 2.16. Dans les cas concrets, le calcul de la différentielle revient souvent au calcul de la jacobienne. La différentielle d'une composée se calcule par produit matriciel via la règle de la chaine.

L'existence de dérivées dans toutes les directions ne suffit pas à prouver la différentiabilité. Cependant, cela fournit l'unique candidat pour être la différentielle éventuelle.

Exemple 2.17. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = 0$ si $x_2 \neq 0$ et $f(x_1, x_2) = x_1$ sinon.

Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, si $v_2 \neq 0$ alors $f_{0,v} : t \mapsto 0$ est dérivable et $\partial_v f(0) = (f_{0,v})'(0) = 0 = f(v)$. Si $v_2 = 0$ alors $f_{0,v} : t \mapsto f(tv_1, 0) = tv_1$ est dérivable et $\partial_v f(0) = (f_{0,v})'(0) = v_1 = f(v)$.

Si f était différentiable en 0, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$ on aurait $D_0 f(v) = \partial_v f(0) = f(v)$, donc $D_0 f = f$. C'est absurde car f n'est pas linéaire.

3 Accroissements finis

Le résultat principal de ce cours est l'inégalité des accroissements finis. De nombreux résultats fondamentaux en découlent, comme on le verra dans la suite. Dans toute cette section E et F sont des Banachs et $U \subset E$ est ouvert. On note aussi souvent a et b deux réels avec $a < b$.

3.1 Inégalité des accroissements finis

On commence avec une version forte qui sera utile pour prouver la formule de Taylor–Lagrange.

Théorème 3.1 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soient $f : [a, b] \to F$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues, dérivables sur $]a, b[$ et telles que $\forall x \in]a, b[$, $\|f'(x)\| \leqslant g'(x)$. Alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a)$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, on note $\varphi_\varepsilon : x \mapsto \|f(x) - f(a)\| - (g(x) - g(a)) - \varepsilon(x - a)$ qui est continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $I_\varepsilon = \varphi_\varepsilon^{-1}(] - \infty, \varepsilon]) = \big\{x \in [a, b] \;\big|\; \|f(x) - f(a)\| \leqslant (g(x) - g(a)) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon\big\}$, on va montrer que $b \in I_\varepsilon$.

On a $a \in I_\varepsilon \subset [a,b]$, donc I_ε admet une borne supérieure $x \in [a,b]$. Comme $]-\infty,\varepsilon]$ est fermé et φ_ε est continue, I_ε est fermé dans $[a,b]$ et donc $x \in I_\varepsilon$. On va prouver que $x = b$.

Comme $\varphi_\varepsilon(a) = 0$ et φ_ε est continue, pour $\delta > 0$ assez petit $\varphi_\varepsilon(a+\delta) \leqslant \varepsilon$. Donc $a < a+\delta \leqslant x$. Par l'absurde on suppose que $x < b$, de sorte que $x \in]a,b[$. Pour $h > 0$ assez petit on a alors

$$\begin{aligned}\frac{\|f(x+h)-f(x)\|}{h} - \frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \left\|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\| - \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &\xrightarrow[h\to 0]{} \|f'(x)\| - g'(x) \leqslant 0.\end{aligned}$$

Il existe donc $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in [0,\delta]$, $\frac{\|f(x+h)-f(x)\|}{h} - \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leqslant \varepsilon$. Donc

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon(x+h) &= \|f(x+h)-f(a)\| - (g(x+h)-g(a)) - \varepsilon(x+h-a) \\ &\leqslant \underbrace{\|f(x)-f(a)\| - (g(x)-g(a)) - \varepsilon(x-a)}_{=\varphi_\varepsilon(x)\leqslant\varepsilon} + \underbrace{\|f(x+h)-f(x)\| - (g(x+h)-g(x)) - \varepsilon h}_{\leqslant 0}.\end{aligned}$$

Donc $[x, x+\delta] \subset I_\varepsilon$, ce qui contredit la définition de x. Donc $x = b$, et $b \in I_\varepsilon$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a montré que $\|f(b)-f(a)\| \leqslant (g(b)-g(a)) + \varepsilon(b-a) + \varepsilon$. En faisant $\varepsilon \to 0$, on obtient donc $\|f(b)-f(a)\| \leqslant g(b)-g(a)$. $\square$

Corollaire 3.2 (Inégalité des accroissements finis classique)**.** *Soit $f : [a,b] \to F$ continue, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $\forall x \in]a,b[$, $\|f'(x)\| \leqslant M$. Alors $\|f(b)-f(a)\| \leqslant M(b-a)$.*

Démonstration. On applique le thm. 3.1 avec $g : x \mapsto Mx$. $\square$

Corollaire 3.3. *Soient $U \subset E$ un ouvert et $f : U \to F$ différentiable. Soient x et $y \in U$ tels que $[x,y] \subset U$ et $\|D_z f\| \leqslant M$ pour tout $z \in [x,y]$. Alors $\|f(y)-f(x)\| \leqslant M\|y-x\|$.*

Démonstration. On note $\gamma : t \mapsto x + t(y-x)$ de $[0,1]$ dans U. La fonction $f \circ \gamma : [0,1] \to F$ est continue, dérivable sur $]0,1[$ et, pour tout $t \in]0,1[$ on a $\gamma(t) \in [x,y]$, donc

$$\|(f\circ\gamma)'(t)\| = \|D_{\gamma(t)} f(\gamma'(t))\| \leqslant \|D_{\gamma(t)} f\|\|\gamma'(t)\| \leqslant M\|y-x\|.$$

D'après le cor. 3.2 on a donc $\|f(y)-f(x)\| = \|f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))\| \leqslant M\|y-x\|$. $\square$

Si on interprète f comme une position en fonction du temps et f' comme la vitesse associée, le cor. 3.3 correspond à l'intuition physique suivante : si on marche pendant 1h à moins de 5 km/h, on parcourt moins de 5km.

Corollaire 3.4. *Soient $U \subset E$ un ouvert connexe et $f : U \to F$ différentiable telle que $Df = 0$, alors f est constante.*

Démonstration. Soit $x \in U$, il existe $R > 0$ tel que $B(x,R) \subset U$. Le cor. 3.3 appliqué à l'ouvert convexe $B(x,R)$, montre que f est constante sur $B(x,R)$. Ainsi, f est localement constante sur le connexe Ω, donc constante (exercice de topologie). $\square$

3.2 Théorème fondamental de l'analyse

Dans cette section, on veut intégrer des fonctions continues sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans un Banach F. Si F est de dimension finie, on peut utiliser au choix l'intégrale de Lebesgue ou celle de Riemann en intégrant composante par composante. Si F est de dimension infinie, on sait définir l'intégrale de Riemann, mais pas celle de Lebesgue. La construction utilise évidemment la complétude de F. Elle est détaillée dans [1, chap. 3], voir aussi [5, sect. IX.7].

Lemme 3.5. *Soient $\varphi \in \mathcal{C}^0([a,b],F)$ et $\Phi : x \mapsto \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction Φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\Phi' = \varphi$.*

Démonstration. En exercice, voir [5, sect. IX.7]. □

Théorème 3.6 (Fondamental de l'analyse)**.** *Si $f : [a,b] \to F$ est $\mathcal{C}^1$ alors $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$.*

Démonstration. D'après le lem. 3.5 la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(a) - \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ de dérivée nulle. Par l'inégalité des accroissement finis, g est constante. Donc $g(b) = g(a) = 0$. □

Remarque 3.7. On déduit le théorème fondamental de l'analyse de l'inégalité des accroissements finis, pas l'inverse ! D'ailleurs les hypothèses du thm. 3.6 sont plus restrictives que celles du cor. 3.2.

Corollaire 3.8 (Intégration par parties)**.** *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, alors*

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. En exercice. □

3.3 Le retour des dérivées partielles

L'inégalité des accroissements finis permet de prouver un critère de différentiabilité très utile en pratique, qui porte sur les dérivées partielles.

Proposition 3.9. *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $x \in U$ et $f : U \to F$. Si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ la fonction $\partial_i f$ est bien définie sur U et continue en x, alors f est différentiable en x.*

Démonstration. Notons $L : h \mapsto \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(x)$ qui est linéaire. Si f est différentiable en x, alors $D_x f = L$. On connait donc l'unique candidat pour être $D_x f$. On va vérifier qu'il convient.

On note $\overline{B}_R$ la boule fermée de centre 0 et rayon R dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Pour tout $R > 0$ assez petit, $x + \overline{B}_R \subset U$. Soit $\varepsilon > 0$, par continuité des $(\partial_i f)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ en x, il existe $\delta > 0$ tel que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall u \in \overline{B}_\delta$, $\|\partial_i f(x+u) - \partial_i f(x)\| \leqslant \varepsilon$. En particulier, $x + \overline{B}_\delta \subset U$. Soit $h \in \overline{B}_\delta$, on a :

$$\begin{aligned}
\|f(x+h) - f(x) - L(h)\| &= \left\| f(x_1+h_1,\dots,x_n+h_n) - f(x_1,\dots,x_n) - \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(x) \right\| \\
&\leqslant \big\| f(x_1+h_1, x_2+h_2,\dots,x_n+h_n) - f(x_1, x_2+h_2,\dots,x_n+h_n) - h_1\partial_1 f(x) \big\| \\
&\quad + \big\| f(x_1, x_2+h_2, x_3+h_3,\dots,x_n+h_n) - f(x_1,x_2,x_3+h_3,\dots,x_n+h_n) - h_2\partial_2 f(x) \big\| \\
&\quad + \dots + \big\| f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n+h_n) - f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n) - h_n\partial_n f(x) \big\|,
\end{aligned}$$

où tous les points intermédiaires sont dans $x + \overline{B}_\delta \subset U$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$, on note $g_i : t \mapsto f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+t,x_{i+1}+h_{i+1},\dots,x_n+h_n) - t\partial_i f(x)$. Le i-ème terme de la somme ci-dessus est alors $\|g_i(h_i) - g_i(0)\|$. Par hypothèse, g_i est dérivable sur un voisinage de $[-\delta,\delta]$. De plus, $g_i' : t \mapsto \partial_i f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+t,y_{i+1},\dots,y_n) - \partial_i f(x)$ est borné par ε sur $[-\delta,\delta]$, par définition de δ. Comme $|h_i| \leqslant \delta$, on a $\|g_i(h_i) - g_i(0)\| \leqslant \varepsilon |h_i|$ par l'inégalité des accroissements finis. Donc $\|f(x+h) - f(x) - L(h)\| \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^n |h_i| \leqslant n\varepsilon \|h\|_\infty$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : $\forall h \in \overline{B}_\delta$, $\|f(x+h) - f(x) - L(h)\| \leqslant \varepsilon \|h\|_\infty$. Donc $f(x+h) - f(x) - L(h) \underset{h \to 0}{=} o(h)$ et f est différentiable en x. □

Corollaire 3.10. *On a $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la dérivée partielle $\partial_i f$ est bien définie et continue sur U.*

Démonstration. En exercice. □

3.4 Égalité des accroissements finis

On conclut cette section avec l'égalité des accroissements finis, qui concerne uniquement les fonctions réelles d'une variable réelle. Elle a quelques conséquences élémentaires mais fondamentales.

Lemme 3.11 (Condition nécessaire d'extremum)**.** *Soient $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ et $x \in]a,b[$. Si f est dérivable en x et y atteint un extremum local, alors $f'(x) = 0$.*

Démonstration. Supposons que f atteint un maximum en x, le cas d'un minimum étant symétrique. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]a,b[$ et $\forall h \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $f(x+h) \leqslant f(x)$. Pour tout $h \in]0,\varepsilon[$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant 0$, d'où $f'(x) \leqslant 0$. De même, pour tout $h \in]-\varepsilon, 0[$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant 0$, d'où $f'(x) \geqslant 0$. □

Théorème 3.12 (Rolle)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(b) = f(a)$. Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Comme f est continue sur $[a,b]$ compact, elle y atteint un maximum et un minimum. Si les deux sont atteints aux bornes, comme $f(b) = f(a)$, la fonction f est constante et $f' = 0$. Sinon f atteint un extremum en un point $c \in]a,b[$. Par le lem. 3.11, on a $f'(c) = 0$. □

Corollaire 3.13 (Égalité des accroissements finis)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a,b[$. Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Démonstration. La fonction $g : x \mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $g(b) = f(a) = g(a)$. Par le thm. 3.12, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. □

Corollaire 3.14 (Monotonie et dérivée)**.** *Si $f' > 0$ (resp. $f' \geqslant 0$, resp. $f' < 0$, resp. $f' \leqslant 0$) sur $]a,b[$, f est strictement croissante (resp. croissante, resp. strictement décroissante, resp. décroissante).*

Démonstration. Supposons $f' > 0$ sur $]a,b[$. Soient x et y tels que $a \leqslant x < y \leqslant b$, il existe $z \in]x,y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(z)(y-x) > 0$. Donc f croit strictement. Les autres cas sont similaires. □

Remarque 3.15. Si on ne sait pas que les segments sont compacts, pas de tableaux de variations.

4 Différentielles d'ordres supérieurs

Dans cette section, on s'intéresse aux différentielles d'ordres supérieurs d'une fonction, et aux formules de Taylor qu'elles permettent de formuler.

4.1 Applications multilinéaires continues

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces normés et $k \in \mathbb{N}^*$. On munit E^k de la norme $\|\cdot\|_\infty$, définie par $\forall x = (x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \|x_i\|_E$.

Lemme 4.1 (Continuité)**.** *Une application k-linéaire $M : E^k \to F$ est continue si et seulement si il existe $C \geqslant 0$ tel que, pour tout $x = (x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $\|M(x)\|_F \leqslant C\|x_1\|_E \dots \|x_k\|_E$.*

Démonstration. En exercice, voir [5, chap. VII.6] dans le cas $k = 2$. □

Définition 4.2. On note $\mathcal{L}_k(E,F)$ l'espace des applications k-linéaires continues de E^k dans F. On définit sur cet espace la *norme subordonnée* à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ par : pour tout $M \in \mathcal{L}_k(E,F)$,

$$\|M\| = \sup\left\{ \frac{\|M(x)\|_F}{\|x_1\|_E \dots \|x_k\|_E} \;\middle|\; \forall i \in [\![1,k]\!], x_i \neq 0 \right\} = \sup\left\{ \|M(x)\|_F \;\middle|\; \forall i \in [\![1,k]\!], \|x_i\|_E = 1 \right\}.$$

Soient $M \in \mathcal{L}_{k+1}(E,F)$ et $x \in E$, alors $M(\cdot,\dots,\cdot,x)$ est k-linéaire de E^k dans F et continue. Notons $\Phi(M) : x \mapsto M(\cdot,\dots,\cdot,x)$ qui est linéaire de E dans $\mathcal{L}_k(E,F)$. Pour tout $x \in E$, on a $\|\Phi(M)(x)\| = \|M(\cdot,\dots,\cdot,x)\| \leqslant \|M\|\|x\|$. Donc $\Phi(M)$ est continue et $\|\Phi(M)\| \leqslant \|M\|$. On définit ainsi $\Phi : \mathcal{L}_{k+1}(E,F) \to \mathcal{L}(E,\mathcal{L}_k(E,F))$ qui est linéaire continue.

Soit $\mu \in \mathcal{L}(E,\mathcal{L}_k(E,F))$, alors l'application $\Psi(\mu) : (x_1,\dots,x_{k+1}) \mapsto \mu(x_{k+1})(x_1,\dots,x_k)$ est $(k+1)$-linéaire de E^{k+1} dans F. Pour tout $x_1,\dots,x_{k+1} \in E$,

$$\|\Psi(\mu)(x_1,\dots,x_{k+1})\| = \|\mu(x_{k+1})(x_1,\dots,x_k)\| \leqslant \|\mu(x_{k+1})\|\|x_1\|\dots\|x_k\| \leqslant \|\mu\|\|x_1\|\dots\|x_{k+1}\|,$$

donc $\Psi(\mu)$ est continue et $\|\Psi(\mu)\| \leqslant \|\mu\|$. On définit ainsi $\Psi : \mathcal{L}(E,\mathcal{L}_k(E,F)) \to \mathcal{L}_{k+1}(E,F)$ qui est linéaire continue.

Lemme 4.3. *Les applications Φ et Ψ définies ci-dessus sont des isomorphismes isométriques.*

Démonstration. On vérifie directement que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}$ et $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}$. Pour tout $M \in \mathcal{L}_{k+1}(E,F)$, par ce qui précède $\|M\| = \|\Psi(\Phi(M))\| \leqslant \|\Phi(M)\| \leqslant \|M\|$. Donc $\|\Phi(M)\| = \|M\|$. Donc Φ est une isométrie. De même, on montre que Ψ est une isométrie. □

On obtient ainsi un isomorphisme isométrique $\mathcal{L}_{k+1}(E,F) \simeq \mathcal{L}(E,\mathcal{L}_k(E,F))$, dont on déduit par récurrence un isomorphisme isométrique naturel $\mathcal{L}_k(E,F) \simeq \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,\dots\mathcal{L}(E,F)\dots))$. En particulier, si E et F sont des Banachs alors $\mathcal{L}_k(E,F)$ aussi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Le même genre d'argument montre que, si E est de dimension finie, toute application k-linéaire sur E est continue.

4.2 Différentielle k-ième

Soient E et F deux Banachs, $U \subset E$ un ouvert et $f : U \to F$. Par convention on note $D^0 f = f$, $D^1 f = Df$, et $\mathcal{L}_0(E,F) = F$.

Définition 4.4 (Différentielle k-ième)**.**

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est *k-différentiable* en $x \in U$ si $D^{k-1}f$ est définie au voisinage de x et est différentiable en x. La *différentielle k-ième* de f en x est alors $D_x^k f : (v_1,\dots,v_k) \mapsto \big(D_x\big(D^{(k-1)}f\big)(v_k)\big)(v_1,\dots,v_{k-1})$.
- On dit que f est *k-différentiable* sur U si f est k-différentiable en tout point $x \in U$, sa *différentielle k-ième* est alors $D^k f : x \mapsto D_x^k f$, de U dans $\mathcal{L}_k(E,F)$.
- On dit que f est $\mathcal{C}^k$ et on note $f \in \mathcal{C}^k(U,F)$ si $D^k f$ est bien définie et continue sur U.
- On dit que f est $\mathcal{C}^\infty$ et on note $f \in \mathcal{C}^\infty(U,F)$ si f est $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque 4.5.

- On a $Df : U \mapsto \mathcal{L}(E,F)$. Donc si $x \in U$, on a $D_x(Df) \in \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F))$. La différentielle seconde $D_x f \in \mathcal{L}_2(E,F)$ est l'application bilinéaire correspondante via l'isomorphisme du lem. 4.3. De même, $D_x(D^{k-1}f) \in \mathcal{L}(E,\mathcal{L}_{k-1}(E,F))$ correspond à $D_x^k f \in \mathcal{L}_k(E,F)$.
- L'ensemble des fonctions k-différentiables en x est un espace vectoriel sur lequel D_x^k est linéaire.
- Si $F = F_1 \times \dots \times F_p$ la k-différentiabilité se vérifie composante par composante.

Lemme 4.6. *Soient E, F et G des Banachs et $U \subset E$ et $V \subset F$ des ouverts. Si $f : U \to V$ et $g : V \to G$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ alors $g \circ f$ aussi.*

Démonstration. En exercice. □

Exemple 4.7.

1. Les fonctions linéaires ou multilinéaires continues sont $\mathcal{C}^\infty$.
2. Les fonctions polynomiales sont $\mathcal{C}^\infty$, par exemple $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
3. Si E est un Banach, alors $\mathrm{Inv} : L \mapsto L^{-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $GL(E)$. C'est un exercice pas facile.

4.3 Dérivées directionnelles et partielles itérées

Lemme 4.8. *Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $f : U \to F$ et $x \in U$. Si f est k-différentiable en x, alors pour tout $v_1, \dots, v_k \in E$ on a $D^k_x f(v_1, \dots, v_k) = \partial_{v_k}(\cdots \partial_{v_2}(\partial_{v_1} f) \cdots)(x)$.*

Démonstration. On travaille par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $k = 1$, c'est le résultat du lem. 2.14.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons que f est $(k+1)$-différentiable en x. Soient $v_1, \dots, v_{k+1} \in E$, on définit $\mathrm{ev}_v : M \mapsto M(v_1, \dots, v_k)$ qui est linéaire continue de $\mathcal{L}_k(E, F)$ dans F, en particulier ev_v est $\mathcal{C}^\infty$. Donc $\mathrm{ev}_v \circ D^k f = D^k f(v_1, \dots, v_k)$ est bien définie au voisinage de x et différentiable en x. On calcule, par le lem. 2.14 et à la règle de la chaine :

$$\begin{aligned}
\partial_{v_{k+1}}\Big(D^k f(v_1, \dots, v_k)\Big)(x) &= D_x\Big(\mathrm{ev}_v \circ D^k f\Big)(v_{k+1}) = \Big(\mathrm{ev}_v \circ D_x(D^k f)\Big)(v_{k+1}) \\
&= \mathrm{ev}_v\Big(D_x(D^k f)(v_{k+1})\Big) = \Big(D_x(D^k f)(v_{k+1})\Big)(v_1, \dots, v_k) \\
&= D^{k+1}_x f(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}).
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, au voisinage de x on a $D^k f(v_1, \dots v_k) = \partial_{v_k}(\cdots \partial_{v_2}(\partial_{v_1} f) \cdots)$. On a donc bien $D^{k+1}_x f(v_1, \dots, v_{k+1}) = \partial_{v_{k+1}}\big(D^k f(v_1, \dots, v_k)\big)(x) = \partial_{v_{k+1}}(\cdots \partial_{v_2}(\partial_{v_1} f) \cdots)(x)$. □

Théorème 4.9 (Schwarz)**.** *Si $f : U \to F$ est 2-différentiable en $x \in U$, alors pour tout $u, v \in E$, on a $D^2_x f(u, v) = D^2_x f(v, u)$.*

Démonstration. On pose $S : (u, v) \mapsto f(x + u + v) - f(x + u) - f(x + v) + f(x)$, qui est symétrique. Le point essentiel est de prouver que $S(u, v) - D^2_x f(u, v) = o\big(\|(u, v)\|^2_\infty\big)$ lorsque $(u, v) \to 0$. On en déduit alors que $D^2_x f(u, v) - D^2_x f(v, u) = o\big(\|(u, v)\|^2_\infty\big)$. Donc si $(u, v) \neq 0$

$$\frac{D^2_x f(u, v) - D^2_x f(v, u)}{\|(u, v)\|^2_\infty} = \frac{D^2_x f(tu, tv) - D^2_x f(tv, tu)}{\|(tu, tv)\|^2_\infty} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

et donc $D^2_x f(u, v) = D^2_x f(v, u)$.

Soit $\alpha > 0$ tel que f soit différentiable sur $B(x, 2\alpha) \subset U$. Comme Df est différentiable en x, il existe $\eta : B(0, 2\alpha) \to \mathbb{R}$ telle que $\eta(v) \xrightarrow[v \to 0]{} 0$ et $\|D_{x+v} f - D_x f - D_x(Df)(v)\| = \|v\| \eta(v)$. Soient u et $v \in B(0, \alpha)$, on a :

$$\|S(u, v) - D^2_x f(u, v)\| \leqslant \underbrace{\|S(u, v) - D_{x+v} f(u) + D_x f(u)\|}_{=A} + \underbrace{\|D_{x+v} f(u) - D_x f(u) - D^2_x f(u, v)\|}_{=B}.$$

D'une part,

$$\begin{aligned}
B &= \|D_{x+v} f(u) - D_x f(u) - (D_x(Df)(v))(u)\| \leqslant \|u\| \|D_{x+v} f - D_x f - D_x(Df)(v)\| \\
&\leqslant \|u\| \|v\| \eta(v) \leqslant \|(u, v)\|^2_\infty \eta(v) = o\big(\|(u, v)\|^2_\infty\big)
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$A = \|f(x + u + v) - f(x + u) - f(x + v) + f(x) - D_{x+v} f(u) + D_x f(u)\| = \|\alpha(u) - \alpha(0)\|$$

où $\alpha : h \mapsto f(x + v + h) - f(x + h) - D_{x+v} f(h) + D_x f(h)$ est différentiable sur $B(0, \alpha)$. On va appliquer l'inégalité des accroissements finis à α. Pour tout $h \in B(0, \alpha)$,

$$\begin{aligned}
\|D_h \alpha\| &= \|D_{x+v+h} f - D_{x+h} f - D_{x+v} f + D_x f\| \\
&\leqslant \|D_{x+v+h} f - D_x f - D_x(Df)(v + h)\| \\
&\quad + \|-D_{x+h} f + D_x f + D_x(Df)(h)\| + \|-D_{x+v} f + D_x f + D_x(Df)(v)\| \\
&\leqslant \|v + h\| \eta(v + h) + \|v\| \eta v + \|h\| \eta(h).
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ il existe $\delta \in]0, \alpha[$ tel que si $\|w\| < 2\delta$ alors $\eta(w) < \varepsilon$. Si $\|(u,v)\|_\infty < \delta$, alors $u, v \in B(0,\delta) \subset B(0,\alpha)$. Donc $\forall h \in [0,u]$, on a $\|D_h\alpha\| \leqslant \varepsilon(\|v+h\| + \|v\| + \|h\|) \leqslant 4\varepsilon\|(u,v)\|_\infty$. L'inégalité des accroissements finies (cor. 3.3) montre alors que

$$A = \|\alpha(u) - \alpha(0)\| \leqslant 4\varepsilon\|(u,v)\|_\infty\|u\| \leqslant 4\varepsilon\|(u,v)\|_\infty^2.$$

Donc $A = o\big(\|(u,v)\|_\infty^2\big)$, donc $S(u,v) - D_x^2 f(u,v) = o\big(\|(u,v)\|_\infty^2\big)$. □

Corollaire 4.10 (Symétrie des différentielles)**.** *Si $f : U \to F$ est k-différentiable en x alors $D_x^k f$ est symétrique, au sens où $\forall v_1, \ldots, v_k \in E$, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$, $D_x^k f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = D_x^k f(v_1, \ldots, v_k)$.*

Démonstration. Soient $v_1, \ldots, v_k \in E$. Par le lem. 4.8, il s'agit de montrer que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$,

$$\partial_{v_{\sigma(k)}}\Big(\cdots \partial_{v_{\sigma(2)}}\Big(\partial_{v_{\sigma(1)}} f\Big)\cdots\Big)(x) = \partial_{v_k}(\cdots\partial_{v_2}(\partial_{v_1} f)\cdots)(x).$$

Il suffit de le montrer pour une transposition du type $(i, i+1)$ puisqu'elles engendrent $\mathfrak{S}_k$. On est alors ramené au cas $k = 2$, qui est le thm. 4.9. □

Le cor. 4.10 dit que $D_x^k f$ est symétrique dès qu'elle est bien définie. Si f est k-différentiable, alors cela montre que les dérivées directionnelles commutent. Lorsque $E = \mathbb{R}^n$, on a en particulier que les dérivées partielles d'ordre au plus k existent et commutent. Cela justifie les notations du type $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$ avec $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leqslant k$, puisque l'ordre dans lequel on calcule les dérivées partielles n'est pas important.

Proposition 4.11. *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $f : U \to F$. On a $f \in \mathcal{C}^k(U,F)$ si et seulement si, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leqslant k$, la dérivée partielle $\partial^\alpha f$ est bien définie et continue sur U.*

Démonstration. En exercice. □

Définition 4.12 (Hessienne)**.** Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, si $f : U \to \mathbb{R}$ est 2-différentiable en $x \in U$, sa *hessienne* est la matrice $\big(\partial_i\partial_j f(x)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de la forme bilinéaire symétrique $D_x^2 f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

4.4 Les formules de Taylor

Soient E et F deux espaces de Banach et soit $f : U \to F$ où $U \subset E$ est ouvert.

Définition 4.13. Si est f est k-différentiable en $x \in U$, on note $T_x^k f : E \to F$ l'application

$$T_x^k f : h \longmapsto \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{p!} D_x^p f(h, h, \ldots, h) = f(x) + D_x f(h) + \frac{1}{2} D_x^2 f(h,h) + \cdots + \frac{1}{k!} D_x^k f(h, \ldots, h).$$

On dit que $T_x^k f$ est le terme principal dans le développement de Taylor de f en x à l'ordre k.

Si $E = \mathbb{R}^n$ et f est p-différentiable en x, alors $\forall h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{p!} D_x^p f(h, \ldots, h) = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n = p} \frac{1}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f(x) h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=p} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha.$$

Donc $T_x^k f : h \mapsto \sum_{|\alpha|\leqslant k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha$. En particulier, si $F = \mathbb{R}$ alors $T_x^k f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un polynôme en n variables, appelé *polynôme de Taylor* d'ordre k de f en x.

Les formules de Taylor estiment l'écart entre f et $T_x^k f$ sous différentes hypothèses de régularité.

Théorème 4.14 (Taylor–Young)**.** *Si f est k-différentiable en x, alors* $f(x+h) \underset{h\to 0}{=} T_x^k f(h) + o(\|h\|^k)$.

Démonstration. On fait une preuve par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $k=1$, c'est la définition de la différentiabilité : $f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + D_x f(h) + o(\|h\|)$.

Soit $k \geqslant 2$, supposons le résultat vrai à l'ordre $k-1$. Soit $f : U \to F$ une application k-différentiable en x. On note $\varphi : h \mapsto f(x+h) - T_x^k f(h)$, qui est k-différentiable en 0. En particulier, φ est différentiable au voisinage de 0, disons sur $B(0,\alpha)$. Pour tout $h \in B(0,\alpha)$ et $v \in E$, on a

$$D_h\varphi(v) = D_{x+h}f(v) - \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{(p-1)!} D_x^p f(v, h, \ldots, h),$$

en différentiant les applications multilinéaires $h \mapsto D_x^p f(h, \ldots, h)$. Pour tout $p \in [\![1,k]\!]$, on a alors

$$D_x^p f(v,h,\ldots,h) = \partial_h(\cdots\partial_h(\partial_v f)\cdots)(x) = \partial_h(\cdots\partial_h(\mathrm{ev}_v \circ Df)\cdots)(x),$$

où $\mathrm{ev}_v : L \mapsto L(v)$ est linéaire continue de $\mathcal{L}(E,F)$ dans F. On a $\partial_h(\mathrm{ev}_v \circ Df) = \mathrm{ev}_v \circ \partial_h(Df)$. En effet, $\forall y \in B(0,\alpha)$, $\partial_h(\mathrm{ev}_v \circ Df)(y) = D_y(\mathrm{ev}_v \circ Df)(h) = \mathrm{ev}_v(D_y(Df)(h)) = \mathrm{ev}_v(\partial_h(Df)(y))$. Par récurrence, $\partial_h(\cdots\partial_h(\mathrm{ev}_v \circ Df)\cdots) = \mathrm{ev}_v \circ \partial_h(\cdots\partial_h(Df)\cdots)$, donc

$$D_x^p f(v,h,\ldots,h) = \mathrm{ev}_v(\partial_h(\cdots\partial_h(Df)\cdots)(x)) = \mathrm{ev}_v\big(D_x^{p-1}(Df)(h,\ldots,h)\big).$$

Ainsi

$$D_h\varphi(v) = D_{x+h}f(v) - \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{(p-1)!}\big(D_x^{p-1}(Df)(h,\ldots,h)\big)(v) = \Big(D_{x+h}f - T_x^{k-1}(Df)(h)\Big)(v).$$

Par hypothèse de récurrence appliquée à Df, on a $\|D_h\varphi\| = \big\|D_{x+h}f - T_x^{k-1}(Df)(h)\big\| = o\big(\|h\|^{k-1}\big)$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $u \in B(0,\delta)$ on a $\|D_u\varphi\| \leqslant \varepsilon\|u\|^{k-1}$. Soit $h \in B(0,\delta)$, on applique l'inégalité des accroissements finis (cor. 3.3) à φ entre 0 et h :

$$\|\varphi(h)\| = \|\varphi(h) - \varphi(0)\| \leqslant \|h\| \sup_{u\in[0,h]} \|D_u\varphi\| \leqslant \varepsilon\|h\| \sup_{u\in[0,h]} \|u\|^{k-1} \leqslant \varepsilon\|h\|^k.$$

Donc $\varphi(h) = f(x+h) - T_x^k f(h) = o\big(\|h\|^k\big)$. □

Théorème 4.15 (Taylor–Lagrange)**.** *Si f est $(k+1)$-différentiable sur U et $\|D_y^{k+1}f\| \leqslant M$ pour tout $y \in U$. Soient x et h tels que $[x, x+h] \subset U$, alors* $\|f(x+h) - T_x^k f(h)\| \leqslant \frac{M}{(k+1)!}\|h\|^{k+1}$.

Démonstration. Commençons par le cas $E = \mathbb{R}$, $x = 0$ et $h = 1$. Dans ce cas, $D_y^p f(h,\ldots,h) = f^{(p)}(y)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $y \in U$. On a alors

$$\Big\|f(x+h) - T_x^k f(h)\Big\| = \left\|f(1) - \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{p!} f^{(p)}(0)\right\| = \|\Phi(1) - \Phi(0)\|,$$

où $\Phi : t \mapsto \sum_{p=0}^{k} \frac{(1-t)^p}{p!} f^{(p)}(t)$. La fonction Φ est dérivable et, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\Phi'(t) = \sum_{p=0}^{k} \frac{(1-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) - \sum_{p=1}^{k} \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(t) = \frac{(1-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t),$$

de sorte que $\|\Phi'(t)\| \leqslant \frac{(1-t)^k}{k!}M$ pour tout $t \in [0,1]$. Le majorant est la dérivée de $g : t \mapsto -\frac{(1-t)^{k+1}}{(k+1)!}M$, donc $\|\Phi(1) - \Phi(0)\| \leqslant g(1) - g(0) = \frac{1}{(k+1)!}M$ par l'inégalité des accroissements finis version forte, voir thm. 3.1. Cela conclut la preuve du cas particulier.

Pour le cas général, on applique le cas précédent à $\varphi : t \mapsto f(x+th)$. □

Théorème 4.16 (Taylor avec reste intégral)**.** *Si f est $\mathcal{C}^{k+1}$ sur U, soient x et h tels que $[x, x+h] \subset U$ alors $f(x+h) = T_x^k f(h) + \int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} D_{x+sh}^{k+1} f(h, \dots, h) \,\mathrm{d}s$.*

Démonstration. Commençons par le cas $E = \mathbb{R}$, $x = 0$ et $h = 1$. On va montrer par récurrence que, pour tout $j \in [\![0, k]\!]$,

$$f(1) = \sum_{p=0}^{j} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} + \int_0^1 \frac{(1-s)^j}{j!} f^{(j+1)}(s) \,\mathrm{d}s.$$

Pour $j = 0$, c'est le théorème fondamental de l'analyse, qui nous dit que $f(1) = f(0) + \int_0^1 f'(s) \,\mathrm{d}s$. Soit $j \in [\![1, k]\!]$, supposons le résultat vrai pour $j - 1$. Par intégration par parties,

$$\int_0^1 \frac{(1-s)^{j-1}}{(j-1)!} f^{(j)}(s) \,\mathrm{d}s = \frac{1}{j!} f^{(j)}(0) + \int_0^1 \frac{(1-s)^j}{(j)!} f^{(j+1)}(s) \,\mathrm{d}s,$$

ce qui prouve le résultat pour j, en conclut la récurrence. Pour $j = k$ on obtient exactement la formule souhaitée dans notre cas particulier.

Pour le cas général, on applique le cas précédent à $\varphi : t \mapsto f(x + th)$. □

5 Inversion locale

Dans cette section, E et F sont des Banachs, $U \subset E$ et $V \subset F$ sont ouverts, et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

5.1 Homéomorphismes et difféomorphismes

Définition 5.1 (Difféomorphisme)**.** Soit $f : U \to V$ bijective on dit que f est un *difféomorphisme* (resp. un $\mathcal{C}^k$-*difféomorphisme*) si f et f^{-1} sont différentiables (resp. $\mathcal{C}^k$).

Lemme 5.2. *Soit $f : U \to V$ bijective. Si f est différentiable en $x \in U$ et f^{-1} est différentiable en $f(x) \in V$ alors $D_x f \in \mathrm{Iso}(E, F)$ et $(D_x f)^{-1} = D_{f(x)}(f^{-1})$.*

Démonstration. On applique la règle de la chaine à $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_U$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_V$, ce qui prouve que $D_{f(x)}(f^{-1}) \circ D_x f = \mathrm{Id}_E$ et $D_x f \circ D_{f(x)}(f^{-1}) = \mathrm{Id}_F$. □

Corollaire 5.3 (Régularité de l'inverse)**.** *Si f est $\mathcal{C}^k$ et f^{-1} est différentiable, alors f^{-1} est $\mathcal{C}^k$.*

Démonstration. D'après le lem. 5.2 on a $D(f^{-1}) : y \mapsto \left(D_{f^{-1}(y)} f\right)^{-1} = \mathrm{Inv} \circ Df \circ f^{-1}(y)$. On sait que $\mathrm{Inv} : \mathrm{Iso}(E, F) \to \mathrm{Iso}(F, E)$ est $\mathcal{C}^\infty$, voir ex. 4.7.3 pour le cas $E = F$, et on peut s'y ramener. Comme Df est $\mathcal{C}^{k-1}$ et f^{-1} est continue, on prouve par récurrence que $D(f^{-1})$ est $\mathcal{C}^r$ pour tout $r \in [\![0, k-1]\!]$. Donc f est $\mathcal{C}^k$. □

5.2 Le théorème d'inversion locale

Proposition 5.4 (Différentiabilité de l'inverse)**.** *Soit $f : U \to V$ un homéomorphisme.*

- *Si f est différentiable en $a \in U$ et $D_a f \in \mathrm{Iso}(E, F)$ alors f^{-1} est différentiable en $f(a)$.*
- *Si f est $\mathcal{C}^k$ sur U et $\forall x \in U$, $D_x f \in \mathrm{Iso}(E, F)$ alors f^{-1} est $\mathcal{C}^k$.*

Démonstration. Le cas $\mathcal{C}^k$ se déduit directement du cas différentiable et du cor. 5.3. Prouvons donc le cas différentiable. D'après le lem. 5.2, le seul candidat pour être la différentielle en $f(a)$ de f^{-1} est $(D_a f)^{-1}$, qui est continue par le théorème d'isomorphisme de Banach. On doit montrer qu'il convient, c'est-à-dire que $f^{-1}(f(a) + h) \underset{h \to 0}{=} a + (D_a f)^{-1}(h) + o(h)$.

Quitte à remplacer f par l'homéomorphisme $x \mapsto f(a+x)-f(a)$, d'inverse $y \mapsto f^{-1}(f(a)+y)-a$, on peut supposer que $a=0$ et $f(a)=0$. Quitte à remplacer ce nouveau f par $(D_0 f)^{-1} \circ f$, on peut supposer que $F=E$ et $D_0 f = \mathrm{Id}$. On se ramène ainsi à montrer que si f est un homéomorphisme différentiable en 0 tel que $f(0)=0$ et $D_0 f = \mathrm{Id}$ alors $f^{-1}(y) \underset{y\to 0}{=} y + o(y)$, i.e. $f^{-1}(y) \underset{y\to 0}{\sim} y$.

Par différentiabilité de f en 0, on a $\frac{f(x)-x}{\|x\|} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Par continuité de f^{-1} en 0, on a aussi $f^{-1}(y) \xrightarrow[y\to 0]{} 0$ et donc $\frac{f(f^{-1}(y))-f^{-1}(y)}{\|f^{-1}(y)\|} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$. D'où $y - f^{-1}(y) = o\big(f^{-1}(y)\big)$, i.e. $f^{-1}(y) \underset{y\to 0}{\sim} y$. □

Théorème 5.5 (Inversion locale)**.** *Soient $f : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^k$ et $a \in U$ tel que $D_a f \in \mathrm{Iso}(E,F)$. Il existe $W \subset U$ voisinage ouvert de a et $V \subset F$ voisinage ouvert de $f(a)$ tels que $f_{|W} : W \to V$ soit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.*

Remarque 5.6. Par le théorème d'isomorphisme de Banach, il suffit de vérifier que $D_a f$ est inversible. Lorsque $E = F = \mathbb{R}^n$, cela revient souvent à calculer le déterminant de la matrice jacobienne.

Démonstration. Comme dans la preuve de la prop 5.4, on peut se ramener au cas où $E = F$ avec $a = 0 = f(a)$ et $D_a f = \mathrm{Id}$. Comme Df est continue et $GL(E)$ est ouvert, on peut de plus supposer que $D_x f \in GL(E)$ pour tout $x \in U$.

Il suffit de prouver qu'il existe $W \subset U$ et V voisinages ouverts de 0 tels que $f_{|W} : W \to V$ soit un homéomorphisme. Si c'est la cas, f^{-1} est $\mathcal{C}^k$ sur V par la prop. 5.4. Le point essentiel est donc de montrer que f est un homéomorphisme local. C'est la bijectivité locale qui est difficile.

Bijectivité locale. Soit $y \in E$, on veut montrer que si $\|y\|$ est assez petit alors l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution proche de 0. Posons $T_y : x \mapsto y - f(x) + x$, on a $f(x) = y$ si et seulement si x est un point fixe de T_y. Notre but est de montrer que T_y est contractante pour appliquer le théorème du point fixe de Picard.

Par continuité de Df en 0, il existe $R > 0$ tel que $\forall x \in \overline{B(0,R)}$, $\|D_x T_y\| = \|D_x f - \mathrm{Id}\| \leqslant \frac{1}{2}$ et $\overline{B(0,R)} \subset U$. Par l'inégalité des accroissements finis appliquée à $f - \mathrm{Id}$, pour tout $x \in \overline{B(0,R)}$, $\|f(x) - x\| \leqslant \frac{1}{2}\|x\| \leqslant \frac{R}{2}$ et donc $\|T_y(x)\| \leqslant \|y\| + \frac{R}{2}$. Si on suppose que $\|y\| < \frac{R}{2}$, alors T_y envoie $\overline{B(0,R)}$ dans $B(0,R)$ et y est $\frac{1}{2}$-contractante, de nouveau par l'inégalité des accroissements finis.

La boule $\overline{B(0,R)}$ est fermée dans le Banach E, donc complète. Par le théorème de Picard, T_y admet sur cette boule un unique point fixe $g(y) = T_y(g(y)) \in B(0,R)$. En d'autres termes, $g(y)$ est l'unique antécédent de y dans $B(0,R)$. Notons $V = B(0, \frac{R}{2})$ et $W = B(0,R) \cap f^{-1}(V)$. Comme f est continue, $f^{-1}(V)$ est un voisinage ouvert de 0, et donc W aussi. L'application $f_{|W} : W \to V$ est alors bien définie et bijective, d'inverse g.

Continuité de l'inverse. Soient y_1 et $y_2 \in V$, on note $x_1 = g(y_1)$ et $x_2 = g(y_2)$. On a alors

$$\|x_1 - x_2\| = \|T_{y_1}(x_1) - T_{y_2}(x_2)\| \leqslant \|T_{y_1}(x_1) - T_{y_1}(x_2)\| + \|T_{y_1}(x_2) - T_{y_2}(x_2)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|$$

puisque T_{y_1} est $\frac{1}{2}$-contractante. Donc $\frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| \leqslant \|y_1 - y_2\|$ et $\|g(y_1) - g(y_2)\| \leqslant 2\|y_1 - y_2\|$. □

Corollaire 5.7 (Inversion globale)**.** *Si $f : U \to F$ est $\mathcal{C}^k$ et $\forall x \in U$, $D_x f \in \mathrm{Iso}(E,F)$, alors f est une application ouverte. Si de plus f est injective, c'est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U vers $f(U)$.*

Démonstration. En exercice. □

5.3 Le théorème des fonctions implicites

Soient E_1, E_2 et F des espaces de Banach, et $U_1 \subset E_1$ et $U_2 \subset E_2$ des ouverts. Si $f : U_1 \times U_2 \to F$ est différentiable au point $(x, y) \in U_1 \times U_2$, on notera $\partial_1 f(x, y) = D_{(x,y)} f(\cdot, 0) \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $\partial_2 f(x, y) = D_{(x,y)} f(0, \cdot) \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Ces différentielles partielles déterminent la différentielle : pour tout $u \in E_1$ et $v \in E_2$, on a $D_{(x,y)} f(u, v) = \partial_1 f(x, y)(u) + \partial_2 f(x, y)(v)$.

Théorème 5.8 (Fonctions implicites)**.** *Soit $f : U_1 \times U_2 \to F$ de classe $\mathcal{C}^k$ et $(a, b) \in U_1 \times U_2$ tels que $f(a, b) = 0$ et $\partial_2 f(a, b) \in \mathrm{Iso}(E_2, F)$. Alors il existe un voisinage ouvert $V_1 \subset U_1$ de a, un voisinage ouvert $V_2 \subset U_2$ de b et $\psi : V_1 \to V_2$ de classe $\mathcal{C}^k$ tel que $\psi(a) = b$ et*

$$\forall (x, y) \in V_1 \times V_2, \qquad f(x, y) = 0 \iff y = \psi(x).$$

De plus, $D_a\psi = -\partial_2 f(a, b)^{-1} \circ \partial_1 f(a, b)$.

Démonstration. On définit $g : (x, y) \mapsto (x, f(x, y))$ de $U_1 \times U_2$ dans $U_1 \times F$. Alors g est $\mathcal{C}^k$ et on a $D_{(a,b)} g : (u, v) \mapsto \big(u, D_{(a,b)} f(u, v)\big) = (u, \partial_1 f(a, b)(u) + \partial_2 f(a, b)(v))$. Comme $\partial_2 f(a, b)$ est un isomorphisme, $D_{(a,b)} g$ est un isomorphisme d'inverse :

$$(u, h) \longmapsto \big(u, \partial_2 f(a, b)^{-1}\big(h - \partial_1 f(a, b)(u)\big)\big).$$

On applique le théorème d'inversion locale. Comme $g(a, b) = (a, 0)$, il existe un voisinage ouvert W de $(a, 0)$ et $R > 0$ tels que g induise un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de $B(a, R) \times B(b, R) \subset U_1 \times U_2$ vers W.

Soient $\Phi : W \to B(a, R)$ et $\Psi : W \to B(b, R)$ tels que $g^{-1} = (\Phi, \Psi)$. Pour tout $(x, z) \in W$, on a $(x, z) = g(\Phi(x, z), \Psi(x, z)) = \big(\Phi(x, z), f(\Phi(x, z), \Psi(x, z))\big)$. Donc $\Phi : (x, z) \mapsto x$.

Soit $V_1 = \{x \in B(a, R) \mid (x, 0) \in W\}$ et $V_2 = B(b, R)$. L'ensemble V_1 est ouvert comme image réciproque de W par l'application continue $x \mapsto (x, 0)$. On définit alors $\psi : x \mapsto \Psi(x, 0)$ qui est $\mathcal{C}^k$ de V_1 dans V_2. Comme $f(a, b) = 0$, on a $g(a, b) = (a, 0) \in W$. Donc $a \in V_1$ et $b = \Psi(a, 0) = \psi(a)$.

Enfin, pour tout $(x, y) \in V_1 \times V_2 \subset B(a, R) \times B(b, R)$, on a

$$f(x, y) = 0 \iff g(x, y) = (x, 0) \iff (x, y) = g^{-1}(x, 0) = (x, \Psi(x, 0)) \iff y = \psi(x).$$

L'application $\alpha : x \mapsto f(x, \psi(x))$ est nulle sur V_1 par définition. Pour tout $v \in E_1$,

$$0 = D_a\alpha(v) = D_{(a,\psi(a))} f(v, D_a\psi(v)) = \partial_1 f(a, b)(v) + \partial_2 f(a, b)(D_a\psi(v)).$$

Donc $\partial_1 f(a, b) + \partial_2 f(a, b) \circ D_a\psi = 0$. Comme la différentielle partielle $\partial_2 f(a, b)$ est inversible, on a $D_a\psi = -\partial_2 f(a, b)^{-1} \circ \partial_1 f(a, b)$, comme attendu. □

Références

[1] Xavier Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, Ellipses, 2008.

[2] Bertrand Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*, Ellipses, 2007.

[3] François Laudenbach, *Calcul différentiel et intégral*, Les éditons de l'École Polytechnique, 2011.

[4] François Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel*, Cassini, 2014.

[5] Jean Saint Raymond, *Topologie, calcul différentiel et variable complexe*, Calvage et Mounet, 2008.