# Chapitre 5 : Intégration

# I – Primitive d'une fonction

1. Motivation
2. Définition et premiers exemples
3. Non-unicité des primitives

# I.1 – Motivation

Si la fonction $x : [0; T] \to \mathbb{R}$ modélise une position en fonction du temps, alors la fonction $x'$ représente la vitesse en fonction du temps.

**Question**

Si on connait la vitesse d'un mouvement en fonction du temps, peut-on reconstruire la position en fonction du temps ?

# I.1 – Motivation

Si la fonction $x : [0; T] \to \mathbb{R}$ modélise une position en fonction du temps, alors la fonction $x'$ représente la vitesse en fonction du temps.

**Question**

Si on connait la vitesse d'un mouvement en fonction du temps, peut-on reconstruire la position en fonction du temps ?

Si la fonction $v : [0; T] \to [0; V]$ modélise un volume en fonction du temps, alors la fonction $v'$ représente le débit en fonction du temps.

**Question**

Si on connait le débit d'un fluide en fonction du temps, peut-on reconstruire le volume écoulé en fonction du temps ?

# I.2 – Définition et premiers exemples

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

### Définition (primitive)

On appelle **primitive de** $f$ **sur** $I$ toute fonction dérivable $F : I \to \mathbb{R}$ telle que $F' = f$, c'est-à-dire telle que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

### Stratégie élémentaire pour déterminer une primitive

Reconnaitre la fonction $f$ comme étant la dérivée d'une fonction $F$.

Pour cela, on utilise les tableaux de dérivées vus au chapitre 2, en les lisant de droite à gauche. Il faut les connaitre par coeur. . .

# I.2 – Définition et premiers exemples

## Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se dérive en $x \mapsto x^n$.
Donc, une primitive de $f : x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

# I.2 – Définition et premiers exemples

## Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se dérive en $x \mapsto x^n$.
Donc, une primitive de $f : x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Cela permet d'obtenir des primitives de n'importe quel polynôme.

## Exemple

Soit $p : x \mapsto 2x^2 - 5x + 2$, une primitive $P$ de $p$ sur $\mathbb{R}$ est définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 2 \times \frac{x^3}{3} - 5 \times \frac{x^2}{2} + 2 \times x = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x$.

# I.2 – Définition et premiers exemples

## Exemples

- $\ln$ est une primitive de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$.
- Soit $F : x \mapsto \ln(-x)$ de $]-\infty;0[$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x < 0$ on a $F'(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$. Donc $F$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]-\infty;0[$.

# I.2 – Définition et premiers exemples

## Exemples

- $\ln$ est une primitive de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.
- Soit $F : x \mapsto \ln(-x)$ de $]-\infty; 0[$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x < 0$ on a $F'(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$. Donc $F$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]-\infty; 0[$.
- Une primitive de $g : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ est $G : x \mapsto \ln(1 + x^2)$.
- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $\arctan$.

Plus généralement, les fractions rationnelles admettent des primitives, qui s'expriment à l'aide des fonctions $\ln$ et $\arctan$.

# I.3 – Non-unicité des primitives

Soient $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

**Lemme (non-unicité des primitives)**

*Si $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de $f$ sur $I$, alors, pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction $F + C : x \mapsto F(x) + C$ est aussi une primitive de $f$ sur $I$.*

# I.3 – Non-unicité des primitives

Soient $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

**Lemme (non-unicité des primitives)**

*Si $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de $f$ sur $I$, alors, pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction $F + C : x \mapsto F(x) + C$ est aussi une primitive de $f$ sur $I$.*

**Lemme (unicité à une constante près)**

*Si $F_1$ et $F_2$ sont deux primitives de $f$ sur $I$, alors il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $F_2 = F_1 + C$, c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, $F_2(x) = F_1(x) + C$.*

Preuve : Si $x \in I$, on a $(F_2 - F_1)'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Comme $I$ est un intervalle, la fonction $F_2 - F_1$ est constante.

# I.3 – Non-unicité des primitives

Soient $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

## Ensemble des primitives

Si $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de $f$, alors les primitives de $f$ sur $I$ sont exactement toutes les fonctions de la forme $F + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

# I.3 – Non-unicité des primitives

Soient $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

**Ensemble des primitives**

Si $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de $f$, alors les primitives de $f$ sur $I$ sont exactement toutes les fonctions de la forme $F + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

**Lemme (unicité de la primitive s'annulant en $x_0$)**

*Soient $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de $f$ et $x_0 \in I$. Alors la fonction $x \mapsto F(x) - F(x_0)$ est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $x_0$.*

Preuve : Cette fonction est une primitive de $f$, qui s'annule en $x_0$. Soit $G$ une primitive de $f$, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $G = F + C$. Si $0 = G(x_0) = F(x_0) + C$ alors $C = -F(x_0)$ et $G : x \mapsto F(x) - F(x_0)$.

# I.3 – Non-unicité des primitives

## Interprétation

Si $f : [0;T] \to \mathbb{R}$ modélise une vitesse en fonction du temps, alors elle admet une primitive (la position $x$ en fonction du temps).

- On peut reconstruire la fonction $x$, à une constante additive près.
- Si on sait que $x(0) = 0$ alors, on peut reconstruire $x$ exactement.
- Plus généralement, si on connait la valeur de $x(t_0)$ pour un temps $t_0 \in [0;T]$, alors on peut reconstruire la fonction $x : [0;T] \to \mathbb{R}$.

# II – Intégrale d'une fonction

1. Exemple introductif
2. Définition de l'intégrale
3. Interprétation graphique

# II.1 – Exemple introductif

On considère un fil métallique de longueur $L$ (en $m$), chauffé de façon homogène à une température $T$ (en $^\circ K$).

Les lois de la physique nous disent que l'énergie thermique $E$ (en $J$) emmagasinée par ce fil est $E = c \times L \times T$, où $c$ (en $J \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$) est la capacité thermique linéique du matériau.

# II.1 – Exemple introductif

On considère un fil métallique de longueur $L$ (en $m$), chauffé de façon homogène à une température $T$ (en $^\circ K$).

Les lois de la physique nous disent que l'énergie thermique $E$ (en $J$) emmagasinée par ce fil est $E = c \times L \times T$, où $c$ (en $J \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$) est la capacité thermique linéique du matériau.

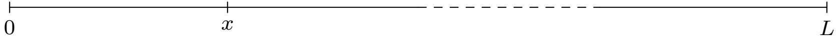
### Problème

Si la température du fil n'est plus homogène mais est fonction de la position, quelle est l'énergie thermique emmagasinée par le fil ?

# II.1 – Exemple introductif

On représente la position d'un point du fil par un nombre $x \in [0; L]$.

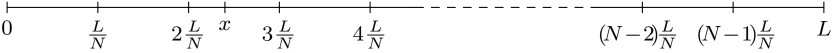
La fonction $T : [0; L] \to \mathbb{R}$ associe à chaque $x \in [0; L]$ la température $T(x)$ au point correspondant.



# II.1 – Exemple introductif

On représente la position d'un point du fil par un nombre $x \in [0; L]$.

La fonction $T : [0; L] \to \mathbb{R}$ associe à chaque $x \in [0; L]$ la température $T(x)$ au point correspondant.



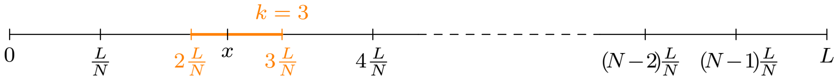

Fixons $N \in \mathbb{N}^*$, pensé comme très grand.

- On découpe le fil en $N$ portions de même longueur $\frac{L}{N}$ très petite.

# II.1 – Exemple introductif

On représente la position d'un point du fil par un nombre $x \in [0; L]$.

La fonction $T : [0; L] \to \mathbb{R}$ associe à chaque $x \in [0; L]$ la température $T(x)$ au point correspondant.




Fixons $N \in \mathbb{N}^*$, pensé comme très grand.

- On découpe le fil en $N$ portions de même longueur $\frac{L}{N}$ très petite.
- La température est presque constante sur chaque portion :
  si $1 \leqslant k \leqslant N$, pour tout $x \in \left[(k-1)\frac{L}{N} ; k\frac{L}{N}\right]$ on a $T(x) \simeq T\left(k\frac{L}{N}\right)$.

# II.1 – Exemple introductif

Si $1 \leqslant k \leqslant N$, la température sur la $k$-ième portion est $\simeq T\left(k\frac{L}{N}\right)$.

L'énergie emmagasinée par cette portion est donc $E_k \simeq c \times \frac{L}{N} \times T\left(k\frac{L}{N}\right)$.

L'énergie totale emmagasinée par le fil est donc :

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 + \cdots + E_N \\ &\simeq c \times \frac{L}{N} \times \left(T\left(\frac{L}{N}\right) + T\left(2\frac{L}{N}\right) + \cdots + T\left(N\frac{L}{N}\right)\right). \end{aligned}$$

# II.1 – Exemple introductif

Si $1 \leqslant k \leqslant N$, la température sur la $k$-ième portion est $\simeq T\left(k\frac{L}{N}\right)$.

L'énergie emmagasinée par cette portion est donc $E_k \simeq c \times \frac{L}{N} \times T\left(k\frac{L}{N}\right)$.

L'énergie totale emmagasinée par le fil est donc :

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 + \cdots + E_N \\ &\simeq c \times \frac{L}{N} \times \left(T\left(\frac{L}{N}\right) + T\left(2\frac{L}{N}\right) + \cdots + T\left(N\frac{L}{N}\right)\right). \end{aligned}$$

Plus $N$ est grand, plus on s'attend à ce que l'erreur soit petite.

Cela suggère que :

$$E = c \times \lim_{N \to +\infty} \frac{L}{N} \times \left(T\left(\frac{L}{N}\right) + T\left(2\frac{L}{N}\right) + \cdots + T\left(N\frac{L}{N}\right)\right).$$

# II.2 – Définition de l'intégrale

Soient $a$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction.

## Définition (intégrale d'une fonction continue)

Si $f$ est continue sur $[a;b]$, alors le nombre réel suivant est bien défini :

$$\lim_{N \to +\infty} \tfrac{b-a}{N} \times \left( f\left(a + \tfrac{b-a}{N}\right) + f\left(a + 2\tfrac{b-a}{N}\right) + \cdots + f\left(a + N\tfrac{b-a}{N}\right) \right).$$

Ce nombre est appelé **intégrale de $f$ de $a$ à $b$** et est noté $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Par convention, on définit $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

# II.2 – Définition de l'intégrale

Soient $a$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction.

## Définition (intégrale d'une fonction continue)

Si $f$ est continue sur $[a;b]$, alors le nombre réel suivant est bien défini :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{b-a}{N} \times \left( f\left(a + \frac{b-a}{N}\right) + f\left(a + 2\frac{b-a}{N}\right) + \cdots + f\left(a + N\frac{b-a}{N}\right)\right).$$

Ce nombre est appelé **intégrale de $f$ de $a$ à $b$** et est noté $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Par convention, on définit $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

- Le $\mathrm{d}t$ est un symbole formel pour indiquer par rapport à quelle variable on intègre. Il n'est pas optionnel.
- Heureusement, on ne calcule pas les intégrales via cette définition.

# II.2 – Définition de l'intégrale

## Retour sur l'exemple introductif

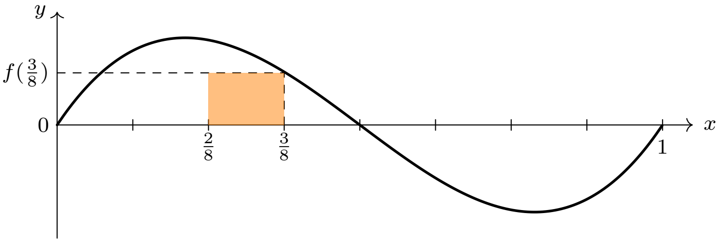
Quitte à supposer que la température $T : [0; L] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue de la position, l'énergie thermique emmagasinée par le fil est :

$$E = c \times \lim_{N \to +\infty} \frac{L}{N} \times \left( T\left(\frac{L}{N}\right) + T\left(2\frac{L}{N}\right) + \cdots + T\left(N\frac{L}{N}\right) \right)$$

$$= c \int_0^L T(x)\,\mathrm{d}x.$$

# II.3 – Interprétation graphique

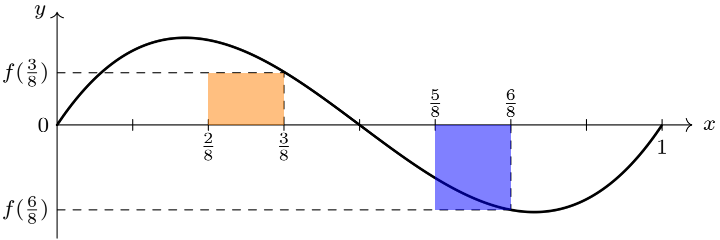
Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.




Comme $f(\frac{3}{8}) \geqslant 0$, on a $\frac{1}{8} \times f(\frac{3}{8}) = \left(\frac{3}{8} - \frac{2}{8}\right) \times f(\frac{3}{8}) = \mathrm{Aire}(\blacksquare)$

# II.3 – Interprétation graphique

Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

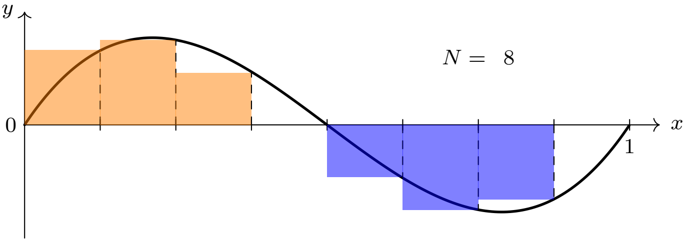



Comme $f(\frac{3}{8}) \geqslant 0$, on a $\frac{1}{8} \times f(\frac{3}{8}) = \left(\frac{3}{8} - \frac{2}{8}\right) \times f(\frac{3}{8}) = \mathrm{Aire}(\blacksquare)$

Comme $f(\frac{6}{8}) \leqslant 0$, on a $\frac{1}{8} \times f(\frac{6}{8}) = -\frac{1}{8} \times \left|f(\frac{6}{8})\right| = -\,\mathrm{Aire}(\blacksquare)$.

# II.3 – Interprétation graphique

Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

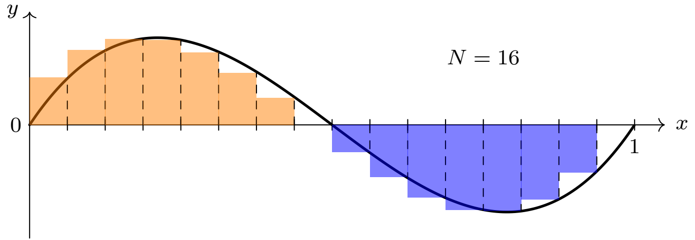



Si $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{N}\Big(f\big(\tfrac{1}{N}\big) + f\big(\tfrac{2}{N}\big) + \cdots + f\big(\tfrac{N-1}{N}\big) + f\big(\tfrac{N}{N}\big)\Big) = \mathrm{Aire}(\blacksquare) - \mathrm{Aire}(\blacksquare).$$

# II.3 – Interprétation graphique

Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

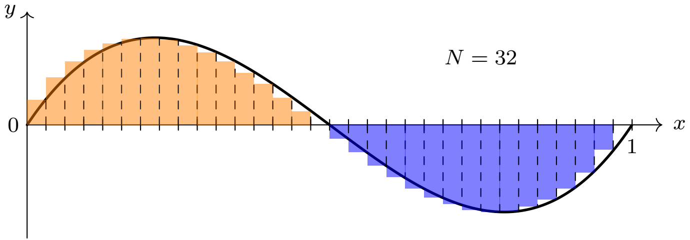



Si $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{N}\Big(f\big(\tfrac{1}{N}\big) + f\big(\tfrac{2}{N}\big) + \cdots + f\big(\tfrac{N-1}{N}\big) + f\big(\tfrac{N}{N}\big)\Big) = \mathrm{Aire}({\color{orange}\blacksquare}) - \mathrm{Aire}({\color{blue}\blacksquare}).$$

# II.3 – Interprétation graphique

Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

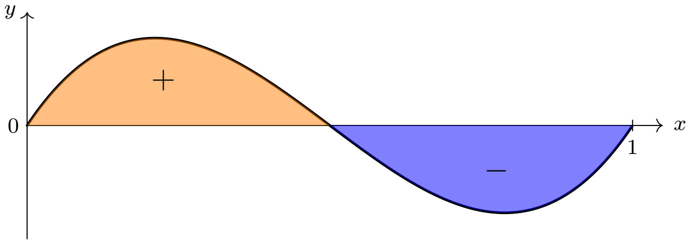



Si $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{N}\Big(f\big(\tfrac{1}{N}\big) + f\big(\tfrac{2}{N}\big) + \cdots + f\big(\tfrac{N-1}{N}\big) + f\big(\tfrac{N}{N}\big)\Big) = \mathrm{Aire}(\blacksquare) - \mathrm{Aire}(\blacksquare).$$

# II.3 – Interprétation graphique

Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.




À la limite $N \to +\infty$, on interprète l'intégrale comme :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Aire}(\blacksquare) - \mathrm{Aire}(\blacksquare).$$

L'intégrale est l'*aire signée* entre le graphe de $f$ et l'axe des abscisses, comptée positivement au-dessus de l'axe et négativement en-dessous.

# III – Propriétés de l'intégrale

1. Monotonie
2. Relation de Chasles
3. Linéarité

# III.1 – Monotonie

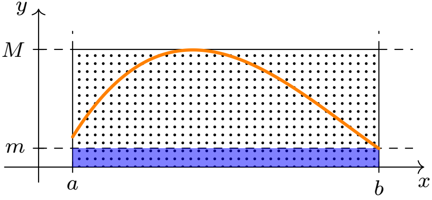
Soient $a$ et $b \in \mathbb{R}$ t.q. $a \leqslant b$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

## Lemme (monotonie de l'intégrale)

*Soient* $m$ *et* $M \in \mathbb{R}$ *t.q., pour tout* $t \in [a;b]$, $m \leqslant f(t) \leqslant M$. *On a*

$$m \times (b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M \times (b-a).$$

*En particulier,* $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. *Et si* $C \in \mathbb{R}$, $\int_a^b C\,\mathrm{d}t = C \times (b-a)$.



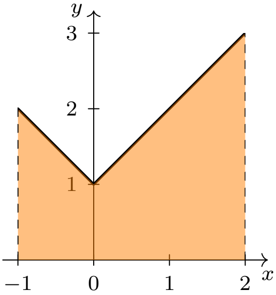

L'aire entre le graphe de $f$ et l'axe est supérieure à $\mathrm{Aire}(\blacksquare)$ et inférieure à $\mathrm{Aire}(\square)$.

# III.2 – Relation de Chasles

Soient $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

## Lemme (relation de Chasles)

*Pour tout* $a$, $b$ *et* $c \in I$, *on a* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t.$




## Exemple

Pour $f : t \mapsto 1+|t|$ avec $a=-1$, $b=0$ et $c=2$ :

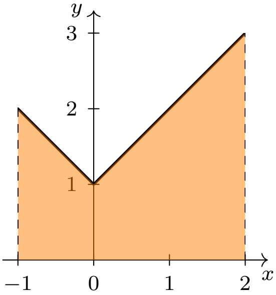
$$\int_{-1}^{2}(1+|t|)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0}(1+|t|)\mathrm{d}t + \int_{0}^{2}(1+|t|)\mathrm{d}t$$

# III.2 – Relation de Chasles

Soient $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

## Lemme (relation de Chasles)

*Pour tout* $a$, $b$ *et* $c \in I$, *on a* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t.$




## Exemple

Pour $f : t \mapsto 1+|t|$ avec $a=-1$, $b=0$ et $c=2$ :

$$\int_{-1}^{2}(1+|t|)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0}(1+|t|)\mathrm{d}t + \int_{0}^{2}(1+|t|)\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-1}^{0}(1-t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{2}(1+t)\mathrm{d}t.$$

## III.3 – Linéarité

Soient $a$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$.

**Lemme (linéarité de l'intégrale)**

*Soient $f$ et $g$ des fonctions continues de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :*

$$\int_a^b (f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

*et* $$\int_a^b (\lambda \times f(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \times \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

# III.3 – Linéarité

Soient $a$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$.

## Lemme (linéarité de l'intégrale)

*Soient $f$ et $g$ des fonctions continues de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :*

$$\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

*et*

$$\int_a^b (\lambda \times f(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \times \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

## Exemple

$$\int_0^1 (2t^2+3t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^1 3t\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t + 3\int_0^1 t\,\mathrm{d}t.$$

# IV – Intégrales et primitives

1. Existence de primitives
2. Théorème fondamental de l'analyse

# IV.1 – Existence de primitives

Soient $I$ un intervalle, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Pour tout $x \in I$, le nombre réel $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien défini.

On peut donc définir la fonction $F_a : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ de $I$ dans $\mathbb{R}$.

# IV.1 – Existence de primitives

Soient $I$ un intervalle, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Pour tout $x \in I$, le nombre réel $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien défini.

On peut donc définir la fonction $F_a : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ de $I$ dans $\mathbb{R}$.

**Lemme (existence de primitives)**

*La fonction $F_a : I \to \mathbb{R}$ est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$.*

- Calculer des intégrales permet de déterminer une primitive de $f$.
- Toute fonction continue admet une primitive, et donc une infinité.

# IV.1 – Existence de primitives

## Idée de preuve

On a $F_a(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. On va montrer que $F_a' = f$, alors $F_a$ sera une primitive de $f$ qui s'annule en $a$, et on sait qu'elle est unique.

# IV.1 – Existence de primitives

## Idée de preuve

On a $F_a(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. On va montrer que $F_a' = f$, alors $F_a$ sera une primitive de $f$ qui s'annule en $a$, et on sait qu'elle est unique.

Soient $x_0$ et $x \in I$ tels que $x \neq x_0$. Par Chasles, on a

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t = F_a(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

# IV.1 – Existence de primitives

## Idée de preuve

On a $F_a(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. On va montrer que $F_a' = f$, alors $F_a$ sera une primitive de $f$ qui s'annule en $a$, et on sait qu'elle est unique.

Soient $x_0$ et $x \in I$ tels que $x \neq x_0$. Par Chasles, on a

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t = F_a(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si $x$ est proche de $x_0$, pour tout $t \in [x_0; x]$, on a $f(t) \simeq f(x_0)$ donc

$$F_a(x) - F_a(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \simeq \int_{x_0}^x f(x_0)\,\mathrm{d}t = f(x_0) \times (x - x_0).$$

# IV.1 – Existence de primitives

## Idée de preuve

On a $F_a(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. On va montrer que $F_a' = f$, alors $F_a$ sera une primitive de $f$ qui s'annule en $a$, et on sait qu'elle est unique.

Soient $x_0$ et $x \in I$ tels que $x \neq x_0$. Par Chasles, on a

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t = F_a(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si $x$ est proche de $x_0$, pour tout $t \in [x_0; x]$, on a $f(t) \simeq f(x_0)$ donc

$$F_a(x) - F_a(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \simeq \int_{x_0}^x f(x_0)\,\mathrm{d}t = f(x_0) \times (x - x_0).$$

Rigoureusement, on prouve $F_a'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$.

# IV.2 – Théorème fondamental de l'analyse

Soient $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$, on connait deux descriptions de $F_a$, l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a \in I$ :

$$F_a : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad F_a : x \longmapsto F(x) - F(a).$$

# IV.2 – Théorème fondamental de l'analyse

Soient $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$, on connait deux descriptions de $F_a$, l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a \in I$ :

$$F_a : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad F_a : x \longmapsto F(x) - F(a).$$

## Théorème (lien entre intégrale et primitive)

*Soit $F$ une primitive quelconque de $f$ sur $I$. Pour tout $a$ et $b \in I$ on a :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b, \quad \text{où on a défini} \quad [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Preuve : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F_a(b) = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$.

# IV.2 – Théorème fondamental de l'analyse

Soient $a$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$.

## Corollaire (théorème fondamental de l'analyse)

*Si* $f$ *est dérivable sur* $[a;b]$ *et* $f'$ *est continue sur* $[a;b]$ *alors*

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

Preuve : La fonction $f$ est une primitive de $f'$ sur $[a;b]$, et on applique le théorème précédent.

# V – Méthodes de calculs d'intégrales

1. Calcul d'intégrales simples
2. Intégration par parties
3. Changement de variable

# V.1 – Calcul d'intégrales simples

Si $F$ est une primitive de $f$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b$.

## Exemples

- $\ln$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0,+\infty[$. Donc
$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$

# V.1 – Calcul d'intégrales simples

Si $F$ est une primitive de $f$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b$.

## Exemples

- $\ln$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0,+\infty[$. Donc
$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$
- $\exp$ est une primitive de $\exp$ sur $\mathbb{R}$. Donc
$$\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t = [e^t]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

# V.1 – Calcul d'intégrales simples

Si $F$ est une primitive de $f$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b$.

## Exemples

- $\ln$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0,+\infty[$. Donc
$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$
- $\exp$ est une primitive de $\exp$ sur $\mathbb{R}$. Donc
$$\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t = [e^t]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$
- $\arctan$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$. Donc
$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= [\arctan(t)]_{-1}^1 = \arctan(1) - \arctan(-1)\\ &= 2\arctan(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

# V.1 – Calcul d'intégrales simples

On peut utiliser la linéarité de l'intégrale pour découper le calcul.

## Exemple

Soit $f : t \mapsto 4\cos(t) - t^2$, qui est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2\,\mathrm{d}t.$$

# V.1 – Calcul d'intégrales simples

On peut utiliser la linéarité de l'intégrale pour découper le calcul.

## Exemple

Soit $f : t \mapsto 4\cos(t) - t^2$, qui est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2\,\mathrm{d}t.$$

- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t = [\sin(t)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2.$

# V.1 – Calcul d'intégrales simples

On peut utiliser la linéarité de l'intégrale pour découper le calcul.

## Exemple

Soit $f : t \mapsto 4\cos(t) - t^2$, qui est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2\,\mathrm{d}t.$$

- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t = [\sin(t)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2.$
- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{2}\right)^3 = \frac{2}{3}\frac{\pi^3}{8} = \frac{\pi^3}{12}.$

## V.1 – Calcul d'intégrales simples

On peut utiliser la linéarité de l'intégrale pour découper le calcul.

### Exemple

Soit $f : t \mapsto 4\cos(t) - t^2$, qui est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2\,\mathrm{d}t.$$

- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t = [\sin(t)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2.$
- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{2}\right)^3 = \frac{2}{3}\frac{\pi^3}{8} = \frac{\pi^3}{12}.$

Donc, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = 4 \times 2 - \frac{\pi^3}{12} = 8 - \frac{\pi^3}{12}.$

# V.2 – Intégration par parties

Soient $u$ et $v$ deux fonctions de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$.

## Lemme (intégration par parties)

*Si $u$ et $v$ sont dérivables sur $[a;b]$ et $u'$ et $v'$ sont continues sur $[a;b]$, alors :*

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

# V.2 – Intégration par parties

Soient $u$ et $v$ deux fonctions de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$.

## Lemme (intégration par parties)

*Si $u$ et $v$ sont dérivables sur $[a;b]$ et $u'$ et $v'$ sont continues sur $[a;b]$, alors :*

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve : Par le théorème fondamental de l'analyse,

$$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b (uv)'(t)\,\mathrm{d}t$$

# V.2 – Intégration par parties

Soient $u$ et $v$ deux fonctions de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$.

### Lemme (intégration par parties)

*Si $u$ et $v$ sont dérivables sur $[a;b]$ et $u'$ et $v'$ sont continues sur $[a;b]$, alors :*

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve : Par le théorème fondamental de l'analyse,

$$\begin{aligned}
[u(t)v(t)]_a^b &= \int_a^b (uv)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On conclut en réagençant les termes.

# V.2 – Intégration par parties

## Exemple

Avec $u : t \mapsto t$ et $v = \sin$, on a $u' : t \mapsto 1$ et $v' = \cos$. Alors,

$$\int_0^3 \overbrace{t}^{u(t)} \overbrace{\cos(t)}^{v'(t)} \,\mathrm{d}t = [\overbrace{t}^{u(t)} \overbrace{\sin(t)}^{v(t)}]_0^3 - \int_0^3 \overbrace{1}^{u'(t)} \overbrace{\sin(t)}^{v(t)} \,\mathrm{d}t$$

# V.2 – Intégration par parties

## Exemple

Avec $u : t \mapsto t$ et $v = \sin$, on a $u' : t \mapsto 1$ et $v' = \cos$. Alors,

$$\int_0^3 \overbrace{t}^{u(t)} \overbrace{\cos(t)}^{v'(t)} \,\mathrm{d}t = \Big[ \overbrace{t}^{u(t)} \overbrace{\sin(t)}^{v(t)} \Big]_0^3 - \int_0^3 \overbrace{1}^{u'(t)} \overbrace{\sin(t)}^{v(t)} \,\mathrm{d}t$$

$$= 3\sin(3) - 0 + \int_0^3 (-\sin(t)) \,\mathrm{d}t = 3\sin(3) + [\cos(t)]_0^3$$

# V.2 – Intégration par parties

## Exemple

Avec $u : t \mapsto t$ et $v = \sin$, on a $u' : t \mapsto 1$ et $v' = \cos$. Alors,

$$\int_0^3 \overbrace{t}^{u(t)} \overbrace{\cos(t)}^{v'(t)} \,\mathrm{d}t = [\overbrace{t}^{u(t)} \overbrace{\sin(t)}^{v(t)}]_0^3 - \int_0^3 \overbrace{1}^{u'(t)} \overbrace{\sin(t)}^{v(t)} \,\mathrm{d}t$$

$$= 3\sin(3) - 0 + \int_0^3 (-\sin(t)) \,\mathrm{d}t = 3\sin(3) + [\cos(t)]_0^3$$

$$= 3\sin(3) + \cos(3) - \cos(0) = 3\sin(3) + \cos(3) - 1.$$

# V.2 – Intégration par parties

## Exemple

Avec $u : t \mapsto t$ et $v = \sin$, on a $u' : t \mapsto 1$ et $v' = \cos$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^3 \overbrace{t}^{u(t)} \overbrace{\cos(t)}^{v'(t)} \,\mathrm{d}t &= [\overbrace{t}^{u(t)} \overbrace{\sin(t)}^{v(t)}]_0^3 - \int_0^3 \overbrace{1}^{u'(t)} \overbrace{\sin(t)}^{v(t)} \,\mathrm{d}t \\ &= 3\sin(3) - 0 + \int_0^3 (-\sin(t)) \,\mathrm{d}t = 3\sin(3) + [\cos(t)]_0^3 \\ &= 3\sin(3) + \cos(3) - \cos(0) = 3\sin(3) + \cos(3) - 1.\end{aligned}$$

Intégrer par parties est utile pour intégrer le produit d'un polynôme avec l'une des fonctions $\sin$, $\cos$ ou $\exp$.

En dérivant le polynôme et en primitivant l'autre terme, on se ramène à une intégrale du même type avec un polynôme de degré inférieur.

# V.2 – Intégration par parties

La fonction $\ln$ étant continue sur $]0;+\infty[$, elle y admet une unique primitive s'annulant en $e$, qui est $L : x \mapsto \displaystyle\int_e^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

## Exemple (détermination de $L$, astucieux)

# V.2 – Intégration par parties

La fonction $\ln$ étant continue sur $]0;+\infty[$, elle y admet une unique primitive s'annulant en $e$, qui est $L : x \mapsto \displaystyle\int_e^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

## Exemple (détermination de $L$, astucieux)

Pour tout $x > 0$, on a $L(x) = \displaystyle\int_e^x \ln(t) \times 1\,\mathrm{d}t$. On intègre par parties :

$$L(x) = \int_e^x \overbrace{\ln(t)}^{u(t)} \times \overbrace{1}^{v'(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[\overbrace{\ln(t)}^{u(t)} \times \overbrace{t}^{v(t)}\Big]_e^x - \int_e^x \overbrace{\frac{1}{t}}^{u'(t)} \times \overbrace{t}^{v(t)}\,\mathrm{d}t$$

# V.2 – Intégration par parties

La fonction $\ln$ étant continue sur $]0;+\infty[$, elle y admet une unique primitive s'annulant en $e$, qui est $L : x \mapsto \displaystyle\int_e^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

## Exemple (détermination de $L$, astucieux)

Pour tout $x > 0$, on a $L(x) = \displaystyle\int_e^x \ln(t) \times 1\,\mathrm{d}t$. On intègre par parties :

$$L(x) = \int_e^x \overbrace{\ln(t)}^{u(t)} \times \overbrace{1}^{v'(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[\overbrace{\ln(t)}^{u(t)} \times \overbrace{t}^{v(t)}\Big]_e^x - \int_e^x \overbrace{\frac{1}{t}}^{u'(t)} \times \overbrace{t}^{v(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \ln(x) \times x - \ln(e) \times e - \int_e^x 1\,\mathrm{d}t$$

$$= x\ln(x) - e - (x - e) = x\ln(x) - x.$$

# V.3 – Changement de variable

Soient $I$ un intervalle et deux fonctions $u : [a;b] \to I$ et $g : I \to \mathbb{R}$.

## Lemme (changement de variable)

*Si $u$ est dérivable, et $u'$ et $g$ sont continues, alors*

$$\int_a^b g(u(t)) \times u'(t) \,\mathrm{d}t = \int_{u(a)}^{u(b)} g(y) \,\mathrm{d}y.$$

# V.3 – Changement de variable

Soient $I$ un intervalle et deux fonctions $u : [a;b] \to I$ et $g : I \to \mathbb{R}$.

## Lemme (changement de variable)

*Si $u$ est dérivable, et $u'$ et $g$ sont continues, alors*

$$\int_a^b g(u(t)) \times u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(a)}^{u(b)} g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Preuve : Soit $G$ n'importe quelle primitive de $g$. Alors, on reconnait $(G \circ u)' = (G' \circ u) \times u' = (g \circ u) \times u'$ dans le premier terme.

$$\int_a^b g(u(t)) \times u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (G \circ u)'(t)\,\mathrm{d}t = (G \circ u)(b) - (G \circ u)(a)$$

$$= G(u(b)) - G(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} g(y)\,\mathrm{d}y.$$

# V.3 – Changement de variable

## Exemple

On veut calculer $\mathcal{I} = \displaystyle\int_1^2 te^{(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$.

# V.3 – Changement de variable

## Exemple

On veut calculer $\mathcal{I} = \displaystyle\int_1^2 te^{(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$.

Soit $u : t \mapsto t^2 + 1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = 2t$. Donc

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\int_1^2 2t \times e^{(t^2+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^2 u'(t) \times e^{u(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{u(1)}^{u(2)} e^y\,\mathrm{d}y.$$

# V.3 – Changement de variable

## Exemple

On veut calculer $\mathcal{I} = \displaystyle\int_1^2 te^{(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$.

Soit $u : t \mapsto t^2 + 1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = 2t$. Donc

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\int_1^2 2t \times e^{(t^2+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^2 u'(t) \times e^{u(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{u(1)}^{u(2)} e^y\,\mathrm{d}y.$$

On a $u(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$ et $u(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$. Donc

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\int_2^5 e^y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}[e^y]_2^5 = \frac{1}{2}\left(e^5 - e^2\right).$$