Chapitre 4 : Limites

I – Différentes notions de limites

1. Limite infinie à l'infini
2. Limite finie à l'infini
3. Limite infinie en un point fini
4. Limite finie en un point fini
5. Limites à droite ou à gauche

I.1 – Limite infinie à l'infini

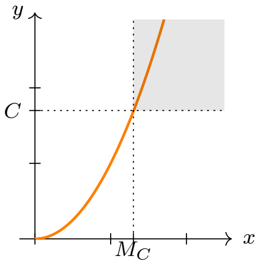
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a; +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition (limite $+\infty$ en $+\infty$)

On note $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ lorsque :

pour tout $C \in \mathbb{R}$, il existe $M_C \geqslant a$ t.q. si $x \geqslant M_C$ alors $f(x) \geqslant C$.

On dit alors que $f(x)$ **tend vers** $+\infty$ **quand** x **tend vers** $+\infty$.



I.1 – Limite infinie à l'infini

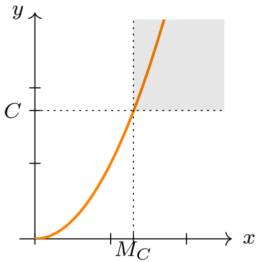
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a; +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition (limite $+\infty$ en $+\infty$)

On note $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ lorsque :
pour tout $C \in \mathbb{R}$, il existe $M_C \geqslant a$ t.q. si $x \geqslant M_C$ alors $f(x) \geqslant C$.

On dit alors que $f(x)$ **tend vers** $+\infty$ **quand** x **tend vers** $+\infty$.

Les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues arbitrairement grandes en choisissant x assez grand.



Exemple

$x^2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$

I.1 – Limite infinie à l'infini

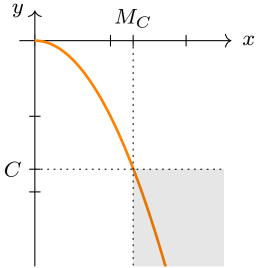
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a; +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition (limite $-\infty$ en $+\infty$)

On note $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ ou $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ lorsque :
pour tout $C \in \mathbb{R}$, il existe $M_C \geqslant a$ t.q. si $x \geqslant M_C$ alors $f(x) \leqslant C$.

On dit alors que $f(x)$ **tend vers** $-\infty$ **quand** x **tend vers** $+\infty$.

Les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues arbitrairement petites en choisissant x assez grand.



Exemple

$-x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.

I.1 – Limite infinie à l'infini

Similairement, soient $b \in \mathbb{R}$ et $f :]-\infty; b] \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition (limite infinie en $-\infty$)

On note $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty/+\infty$ lorsque : pour tout $C \in \mathbb{R}$, il existe $M_C \leqslant b$ tel que si $x \leqslant M_C$ alors $f(x) \leqslant C$ / $f(x) \geqslant C$.

On dit que $f(x)$ **tend vers** $-\infty/+\infty$ **quand** x **tend vers** $-\infty$.

Les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues arbitrairement petites/grandes pourvu qu'on choisisse x assez petit.

I.2 – Limite finie à l'infini

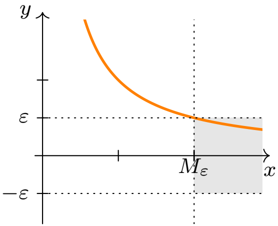
Soient $f : [a; +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{R}$.

Définition (limite finie en $+\infty$)

On note $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ lorsque : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M_\varepsilon \geqslant a$ tel que si $x \geqslant M_\varepsilon$ alors $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

On dit alors que $f(x)$ **tend vers** ℓ **quand** x **tend vers** $+\infty$.

Les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues arbitrairement proches de ℓ pour x assez grand.



Exemple

Pour $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, on a $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

I.2 – Limite finie à l'infini

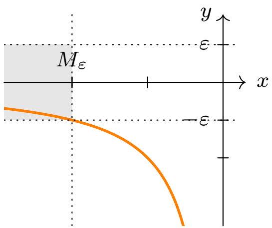
Soient $f :]-\infty; b] \to \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{R}$.

Définition (limite finie en $-\infty$)

On note $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \ell$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ lorsque : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M_\varepsilon \leqslant b$ tel que si $x \leqslant M_\varepsilon$ alors $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

On dit alors que $f(x)$ **tend vers** ℓ **quand** x **tend vers** $-\infty$.

Les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues arbitrairement proches de ℓ pour x assez petit.



Exemple

Pour $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, on a $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.

I.3 – Limite infinie en un point fini

Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition (limite infinie en un point fini)

On note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty / +\infty$ lorsque : pour tout $C \in \mathbb{R}$, il existe $\delta_C > 0$ tel que si $|x - x_0| \leqslant \delta_C$ alors $f(x) \leqslant C$ / $f(x) \geqslant C$.

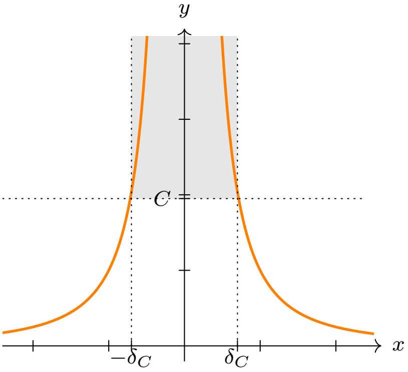
On dit alors que $f(x)$ **tend vers** $-\infty/+\infty$ **quand** x **tend vers** x_0.

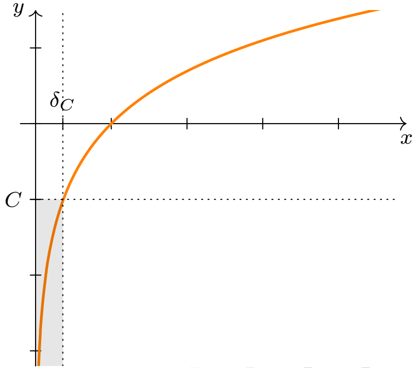
Les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues arbitrairement petites/grandes pourvu qu'on choisisse x assez proche de x_0.

I.3 – Limite infinie en un point fini

Exemples

- Pour $I = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ et $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$, on obtient $\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$.
- Pour $I = [0; +\infty[$, $x_0 = 0$ et $f = \ln$, on obtient $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty$.





I.4 – Limite finie en un point fini

Soient I un intervalle, $x_0 \in I$, une fonction $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Définition (limite finie en x_0)

On note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ lorsque : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que si $x \in I \setminus \{x_0\}$ et $|x - x_0| \leqslant \delta_\varepsilon$ alors $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

On dit que $f(x)$ **tend vers** ℓ **quand** x **tend vers** x_0 (ou **en** x_0).

Les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues arbitrairement proches de ℓ en choisissant x assez proche de x_0.

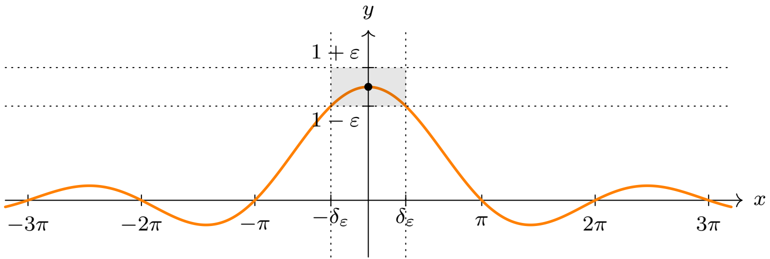
I.4 – Limite finie en un point fini

Exemple

On considère $I = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ et $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$.

Comme on sait que $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\cos$, on a

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$



I.5 – Limites à droite ou à gauche

Même parmi les fonctions usuelles, certaines n'ont pas de limites (finies ou infinies) aux bornes de leur domaine de définition.

Exemples

- $\sin(x)$ lorsque $x \to \pm\infty$.
- $\frac{1}{x}$ lorsque $x \to 0$.

I.5 – Limites à droite ou à gauche

Même parmi les fonctions usuelles, certaines n'ont pas de limites (finies ou infinies) aux bornes de leur domaine de définition.

Exemples

- $\sin(x)$ lorsque $x \to \pm\infty$.
- $\frac{1}{x}$ lorsque $x \to 0$.

Les propriétés qualitatives d'une fonction permettent parfois d'établir l'existence d'une limite sans savoir dire quelle est cette limite.

Exemple

Si $f :]a; b[\to \mathbb{R}$ est croissante, alors $f(x)$ a des limites (finies ou infinies) en a et en b. De même si f est décroissante.

I.5 – Limites à droite ou à gauche

Soient $f :]a; c[\cup]c; b[\to \mathbb{R}$ une fonction, ℓ_1 et $\ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Définition (limite à droite ou à gauche)

- Si la restriction $f_{|]c;b[} :]c; b[\to \mathbb{R}$ est t.q. $f_{|]c;b[}(x) \xrightarrow[x \to c]{} \ell_1$, on dit que f admet une **limite à droite** en c, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to c^+]{} \ell_1$.
- Si $f_{|]a;c[} :]a; c[\to \mathbb{R}$ est t.q. $f_{|]a;c[}(x) \xrightarrow[x \to c]{} \ell_2$, on dit que f admet une **limite à gauche** en c, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to c^-]{} \ell_2$.

I.5 – Limites à droite ou à gauche

Soient $f :]a;c[\cup]c;b[\to \mathbb{R}$ une fonction, ℓ_1 et $\ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$.

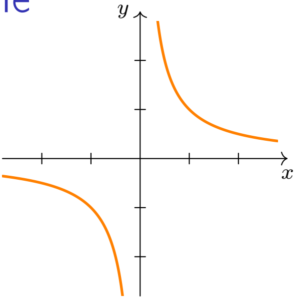
Définition (limite à droite ou à gauche)

- Si la restriction $f_{|]c;b[} :]c;b[\to \mathbb{R}$ est t.q. $f_{|]c;b[}(x) \xrightarrow[x\to c]{} \ell_1$, on dit que f admet une **limite à droite** en c, et on note $f(x) \xrightarrow[x\to c^+]{} \ell_1$.
- Si $f_{|]a;c[} :]a;c[\to \mathbb{R}$ est t.q. $f_{|]a;c[}(x) \xrightarrow[x\to c]{} \ell_2$, on dit que f admet une **limite à gauche** en c, et on note $f(x) \xrightarrow[x\to c^-]{} \ell_2$.

Lemme

- *Si* $f(x) \xrightarrow[x\to c]{} \ell$, *alors* $f(x) \xrightarrow[x\to c^-]{} \ell$ *et* $f(x) \xrightarrow[x\to c^+]{} \ell$.
- *Si* $f(x) \xrightarrow[x\to c^-]{} \ell_1$, $f(x) \xrightarrow[x\to c^+]{} \ell_2$ *et* $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ *alors* $f(x) \xrightarrow[x\to c]{} \ell$.

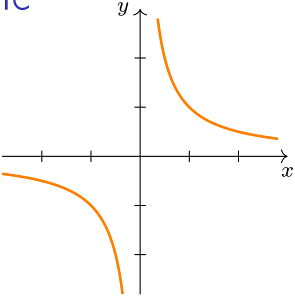
I.5 – Limites à droite ou à gauche



Exemple

$\frac{1}{x}$ n'a pas de limite quand $x \to 0$, mais
$\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} -\infty$ et $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$.

I.5 – Limites à droite ou à gauche



Exemple

$\frac{1}{x}$ n'a pas de limite quand $x \to 0$, mais
$\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$ et $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$.

- On note $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell^+$ si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$ et $f(x) \geqslant \ell$ proche de x_0.
- On note $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell^-$ si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$ et $f(x) \leqslant \ell$ proche de x_0.

Exemple

$\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0^+$ et $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to -\infty]{} 0^-$.

II – Calculs de limites

II.1 – Stratégie

- Si f est une fonction usuelle, les mathématicien·ne·s ont travaillé : on connait les limites de $f(x)$ aux endroits pertinents.
  Il faut les apprendre par coeur.

II.1 – Stratégie

- Si f est une fonction usuelle, les mathématicien·ne·s ont travaillé : on connait les limites de $f(x)$ aux endroits pertinents.
  Il faut les apprendre par coeur.

- Si f est somme, produit, composée, etc., de fonctions usuelles, on va voir comment les limites interagissent avec ces opérations.
  - On décompose f en fonctions usuelles.
  - On calcule la limite de chacun des morceaux.
  - On les recombine pour obtenir la limite de $f(x)$.

II.1 – Stratégie

- Si f est une fonction usuelle, les mathématicien·ne·s ont travaillé : on connait les limites de $f(x)$ aux endroits pertinents.
  Il faut les apprendre par coeur.

- Si f est somme, produit, composée, etc., de fonctions usuelles, on va voir comment les limites interagissent avec ces opérations.
  - On décompose f en fonctions usuelles.
  - On calcule la limite de chacun des morceaux.
  - On les recombine pour obtenir la limite de $f(x)$.

- Sinon, c'est pénible. On ne vous demande pas de savoir le faire.

II.2 – Limites des fonctions usuelles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors on a les résultats suivants.

$$x^n \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad x^n \xrightarrow[x\to-\infty]{} \begin{cases} +\infty, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^n} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+ \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^n} \xrightarrow[x\to-\infty]{} \begin{cases} 0^+, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0^-, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^n} \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^n} \xrightarrow[x\to0^-]{} \begin{cases} +\infty, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

II.2 – Limites des fonctions usuelles

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors on a les résultats suivants.

$$x^a \xrightarrow[x \to 0^+]{} \begin{cases} 0^+ & \text{si } a > 0, \\ +\infty & \text{si } a < 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad x^a \xrightarrow[x \to +\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0, \\ 0^+ & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

En particulier,

$$\sqrt{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0^+ \qquad \text{et} \qquad \sqrt{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0^+.$$

II.2 – Limites des fonctions usuelles

$$e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0^+ \quad \text{et} \quad e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

$$\ln(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} -\infty \quad \text{et} \quad \ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

$$\arctan(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \arctan(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

II.3 – Opérations dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

On utilise les conventions suivantes pour manipuler $+$ et $\times$ avec $\pm\infty$.

Conventions pour l'addition

Pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, on pose $\ell + \infty = +\infty$ et $\ell - \infty = -\infty$.

On pose aussi $+\infty + \infty = +\infty$ et $-\infty - \infty = -\infty$.

II.3 – Opérations dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

On utilise les conventions suivantes pour manipuler $+$ et $\times$ avec $\pm\infty$.

Conventions pour l'addition

Pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, on pose $\ell + \infty = +\infty$ et $\ell - \infty = -\infty$.

On pose aussi $+\infty + \infty = +\infty$ et $-\infty - \infty = -\infty$.

Conventions pour la multiplication

Pour tout $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\ell \times (+\infty) = +\infty$ et $\ell \times (-\infty) = -\infty$.

Pour tout $\ell \in \mathbb{R}_-^*$, on pose $\ell \times (+\infty) = -\infty$ et $\ell \times (-\infty) = +\infty$.

Enfin, $(+\infty)\times(+\infty) = +\infty = (-\infty)\times(-\infty)$ et $(-\infty)\times(+\infty) = -\infty$.

II.3 – Opérations dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

On a aussi des conventions pour manipuler $\pm\infty$ dans les quotients.

Conventions pour le quotient

$$\frac{1}{+\infty} = 0^+; \qquad \frac{1}{-\infty} = 0^-; \qquad \frac{1}{0^+} = +\infty; \qquad \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

II.3 – Opérations dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

On a aussi des conventions pour manipuler $\pm\infty$ dans les quotients.

Conventions pour le quotient

$$\frac{1}{+\infty} = 0^+; \qquad \frac{1}{-\infty} = 0^-; \qquad \frac{1}{0^+} = +\infty; \qquad \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Formes indéterminées

On ne sait pas donner de sens raisonnable aux expressions de l'une des formes suivantes :

$$+\infty - \infty; \qquad \pm\infty \times 0; \qquad \frac{0}{0}; \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

II.4 – Opérations sur les limites

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f_1 et f_2 deux fonctions de $[a;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f_1(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell_1$ et $f_2(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell_2$, avec ℓ_1 et $\ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$.

Lemme (linéarité de la limite)

- *Si* $\ell_1 + \ell_2$ *n'est pas une forme indéterminée, alors*
$$f_1(x) + f_2(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell_1 + \ell_2.$$
- *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\lambda \times \ell_1$ *n'est pas une forme indéterminée, alors*
$$\lambda \times f_1(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \lambda \times \ell_1.$$

II.4 – Opérations sur les limites

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f_1 et f_2 deux fonctions de $[a;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f_1(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell_1$ et $f_2(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell_2$, avec ℓ_1 et $\ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$.

Lemme (linéarité de la limite)

- *Si $\ell_1 + \ell_2$ n'est pas une forme indéterminée, alors*
$$f_1(x) + f_2(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell_1 + \ell_2.$$
- *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \times \ell_1$ n'est pas une forme indéterminée, alors*
$$\lambda \times f_1(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \lambda \times \ell_1.$$

Exemples

$\arctan(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$ et $2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$, donc $2\arctan(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pi$.
Par ailleurs, $x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Donc $x^2 + 2\arctan(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

II.4 – Opérations sur les limites

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f_1 et f_2 deux fonctions de $[a; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f_1(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell_1$ et $f_2(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell_2$, avec ℓ_1 et $\ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Lemme (limites de produits et de quotients)

- *Si* $\ell_1 \times \ell_2$ *n'est pas une forme indéterminée, alors*
$$f_1(x) \times f_2(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell_1 \times \ell_2.$$
- *Si* $\frac{f_1}{f_2}$ *est bien définie et* $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ *n'est pas une forme indéterminée, alors*
$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

II.4 – Opérations sur les limites

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f_1 et f_2 deux fonctions de $[a; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f_1(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell_1$ et $f_2(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell_2$, avec ℓ_1 et $\ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Lemme (limites de produits et de quotients)

- *Si $\ell_1 \times \ell_2$ n'est pas une forme indéterminée, alors*
$$f_1(x) \times f_2(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell_1 \times \ell_2.$$
- *Si $\frac{f_1}{f_2}$ est bien définie et $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ n'est pas une forme indéterminée, alors*
$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

Exemple

$\frac{1}{x} - 2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} -2$ et $e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, donc $\left(\frac{1}{x} - 2\right) \times e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$.

II.4 – Opérations sur les limites

On vient d'énoncer des résultats concernant la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions lorsque $x \to +\infty$.

Les résultats analogues sont également valables dans les cas suivants :

- lorsque $x \to -\infty$;
- lorsque $x \to x_0$, avec $x_0 \in \mathbb{R}$;
- pour les limites à gauche ou à droite en un point $x_0 \in \mathbb{R}$.

II.4 – Opérations sur les limites

Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions t.q. $g \circ f$ est définie.

Soit x_0 tel que $x_0 \in I$ ou x_0 est une borne de I.

Soit y_0 tel que $y_0 \in J$ ou y_0 est une borne de J.

Lemme (limite de composées)

Si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} y_0$ *et* $g(y) \xrightarrow[y \to y_0]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *alors* $g(f(x)) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$.

II.4 – Opérations sur les limites

Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions t.q. $g \circ f$ est définie.

Soit x_0 tel que $x_0 \in I$ ou x_0 est une borne de I.

Soit y_0 tel que $y_0 \in J$ ou y_0 est une borne de J.

Lemme (limite de composées)

Si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} y_0$ *et* $g(y) \xrightarrow[y \to y_0]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *alors* $g(f(x)) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$.

Exemple

Pour $f : x \mapsto -7x$ et $g = \exp$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec $x_0 = +\infty$.

On a $f(x) = -7x \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty = y_0$ et $g(y) = e^y \xrightarrow[y \to -\infty]{} 0$.

Donc $g(f(x)) = e^{-7x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

II.5 – Théorèmes des gendarmes

Soient a et $\ell \in \mathbb{R}$ et trois fonctions f, g et h de $[a;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème (des gendarmes)

On suppose que $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$*, que* $h(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ *et que, pour tout* $x \in [a;+\infty[$*, on a* $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$*. Alors on a* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$*.*

Le résultat analogue lorsque x tend vers $-\infty$ ou $x_0 \in \mathbb{R}$ est aussi vrai.

II.5 – Théorèmes des gendarmes

Soient a et $\ell \in \mathbb{R}$ et trois fonctions f, g et h de $[a; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème (des gendarmes)

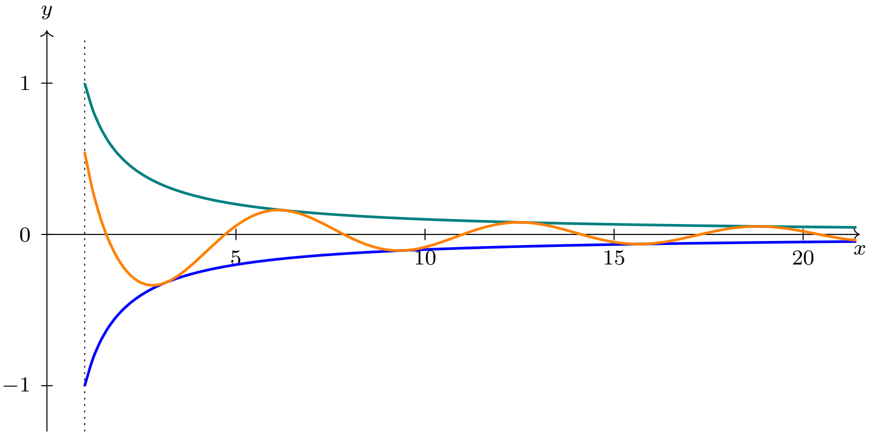
On suppose que $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$, *que* $h(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$ *et que, pour tout* $x \in [a; +\infty[$, *on a* $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$. *Alors on a* $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$.

Le résultat analogue lorsque x tend vers $-\infty$ ou $x_0 \in \mathbb{R}$ est aussi vrai.

Exemple

Pour $g : x \mapsto -\frac{1}{x}$, $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{x}$ de $[1; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \geqslant 1$, on a $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\cos(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}$.
Comme $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et $-\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, on a $\frac{\cos(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

II.5 – Théorèmes des gendarmes



Les graphes de $g : x \mapsto -\frac{1}{x}$, $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{x}$ sur $[1; +\infty[$.

II.5 – Théorèmes des gendarmes

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions de $[a; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème (du gros gendarme)

Si $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ *et, pour tout* $x \in [a; +\infty[$ *, on a* $g(x) \leqslant f(x)$*,*
alors $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$*.*
Si $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$ *et, pour tout* $x \in [a; +\infty[$ *, on a* $f(x) \leqslant g(x)$*,*
alors $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$*.*

Le résultat analogue lorsque x tend vers $-\infty$ ou $x_0 \in \mathbb{R}$ est aussi vrai.

II.5 – Théorèmes des gendarmes

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions de $[a; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème (du gros gendarme)

Si $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ *et, pour tout* $x \in [a; +\infty[$, *on a* $g(x) \leqslant f(x)$, *alors* $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Si $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$ *et, pour tout* $x \in [a; +\infty[$, *on a* $f(x) \leqslant g(x)$, *alors* $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$.

Le résultat analogue lorsque x tend vers $-\infty$ ou $x_0 \in \mathbb{R}$ est aussi vrai.

Exemple

Pour $g : x \mapsto x - 1$ et $f : x \mapsto x + \cos(x)$, on a $x - 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x + \cos(x) \geqslant x - 1$, donc $x + \cos(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

II.6 – Retour sur les formes indéterminées

Une forme indéterminée ne signifie pas qu'il n'y a pas de limite. Ça signifie juste qu'on n'a pas assez d'information pour conclure.

Exemples (de levées d'indétermination)

Soit $g : x \mapsto -x$, on a $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$. Dans les cas suivants, on a $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ mais on comprend $f(x) + g(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

II.6 – Retour sur les formes indéterminées

Une forme indéterminée ne signifie pas qu'il n'y a pas de limite. Ça signifie juste qu'on n'a pas assez d'information pour conclure.

Exemples (de levées d'indétermination)

Soit $g : x \mapsto -x$, on a $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$. Dans les cas suivants, on a $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ mais on comprend $f(x)+g(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

- $f : x \mapsto x+3$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)+g(x) = 3 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 3$.

II.6 – Retour sur les formes indéterminées

Une forme indéterminée ne signifie pas qu'il n'y a pas de limite. Ça signifie juste qu'on n'a pas assez d'information pour conclure.

Exemples (de levées d'indétermination)

Soit $g : x \mapsto -x$, on a $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$. Dans les cas suivants, on a $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ mais on comprend $f(x) + g(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

- $f : x \mapsto x + 3$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + g(x) = 3 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 3$.
- $f : x \mapsto x^2 + x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + g(x) = x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

II.6 – Retour sur les formes indéterminées

Une forme indéterminée ne signifie pas qu'il n'y a pas de limite. Ça signifie juste qu'on n'a pas assez d'information pour conclure.

Exemples (de levées d'indétermination)

Soit $g : x \mapsto -x$, on a $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$. Dans les cas suivants, on a $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ mais on comprend $f(x)+g(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

- $f : x \mapsto x+3$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)+g(x) = 3 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 3$.
- $f : x \mapsto x^2+x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)+g(x) = x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
- $f : x \mapsto x+\cos(x)$. On a $f+g = \cos$, qui n'a pas de limite en $+\infty$.

II.6 – Retour sur les formes indéterminées

Exemple

Pour $x > 0$, on a :

$$\underbrace{2x^2 - 6x + 4}_{\text{forme indéterminée en } +\infty} = 2x^2 \times \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) .$$

II.6 – Retour sur les formes indéterminées

Exemple

Pour $x > 0$, on a :

$$\underbrace{2x^2 - 6x + 4}_{\text{forme indéterminée en } +\infty} = \underbrace{2x^2}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty} \times \underbrace{\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

II.6 – Retour sur les formes indéterminées

Exemple

Pour $x > 0$, on a :

$$\underbrace{2x^2 - 6x + 4}_{\text{forme indéterminée en } +\infty} = \underbrace{2x^2}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty} \times \underbrace{\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Lemme (limites des polynômes à l'infini)

Soient $d \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ avec $a_d \neq 0$.

Le polynôme $P : x \mapsto a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ vérifie :

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_d x^d \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} a_d x^d.$$

II.6 – Retour sur les formes indéterminées

Lemme (limites des fractions rationnelles à l'infini)

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ *et* $a_0, \dots, a_p, b_0, \dots, b_q \in \mathbb{R}$ *avec* $a_p \neq 0$ *et* $b_q \neq 0$.

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{a_p x^p + \cdots + a_1 x + a_0}{b_q x^q + \cdots + b_1 x + b_0}$ *est bien définie sur* $\mathbb{R}$ *privé d'un nombre fini de points. De plus,*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_p x^p}{b_q x^q} \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{a_p x^p}{b_q x^q}.$$

Exemple

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 2}{2x^3 - 6} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{2x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{2x^2} = 0.$$

II.6 – Retour sur les formes indéterminées

Lemme (comparaison des puissances à l'exponentielle)

Pour tout $a > 0$*, on a* $x^a e^{-x} = \frac{x^a}{e^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

L'exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances.

Lemme (comparaison des puissances au logarithme)

Pour tout $a > 0$*, on a* $\frac{x^a}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ *et* $x^a \ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0^-$.

Les fonctions puissances l'emportent sur le logarithme.

III – Études de fonctions

1. To do list de l'étude de fonction
2. Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$

III.1 – To do list de l'étude de fonction

Considérons une fonction $f : x \mapsto f(x)$, définie par une formule sans précision du domaine de définition. Faire l'étude de f c'est :

1. déterminer le domaine de définition de f, c'est-à-dire l'ensemble D_f des $x \in \mathbb{R}$ tels que la formule $f(x)$ a du sens ;

III.1 – To do list de l'étude de fonction

Considérons une fonction $f : x \mapsto f(x)$, définie par une formule sans précision du domaine de définition. Faire l'étude de f c'est :

1. déterminer le domaine de définition de f, c'est-à-dire l'ensemble D_f des $x \in \mathbb{R}$ tels que la formule $f(x)$ a du sens ;
2. déterminer le domaine de dérivabilité de f (penser à $x \mapsto |x|$) ;
3. calculer f' et dresser son tableau de signes ;

III.1 – To do list de l'étude de fonction

Considérons une fonction $f : x \mapsto f(x)$, définie par une formule sans précision du domaine de définition. Faire l'étude de f c'est :

1. déterminer le domaine de définition de f, c'est-à-dire l'ensemble D_f des $x \in \mathbb{R}$ tels que la formule $f(x)$ a du sens ;
2. déterminer le domaine de dérivabilité de f (penser à $x \mapsto |x|$) ;
3. calculer f' et dresser son tableau de signes ;
4. en déduire le tableau de variations de f et le compléter avec les éventuelles valeurs remarquables et limites aux bornes de $f(x)$;
5. dessiner l'allure du graphe de f.

III.2 – Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$

Domaine de définition

$\ln$ n'est défini que sur $]0;+\infty[$. Si $x > 0$, on a $\ln(x) = 0 \iff x = 1$. Si $x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$ alors $\ln(x)$ est défini et non nul, donc $f(x)$ est bien défini. Sinon $f(x)$ n'a pas de sens. Donc $D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

III.2 – Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$

Domaine de définition

$\ln$ n'est défini que sur $]0; +\infty[$. Si $x > 0$, on a $\ln(x) = 0 \iff x = 1$. Si $x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$ alors $\ln(x)$ est défini et non nul, donc $f(x)$ est bien défini. Sinon $f(x)$ n'a pas de sens. Donc $D_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

Dérivée

$x \mapsto x$ et $\ln$ sont dérivables sur D_f, donc f aussi. Pour tout $x \in D_f$,

$$f'(x) = \frac{1 \times \ln(x) - x \times \ln'(x)}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - x \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}.$$

Comme $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $\ln(e) = 1$, on a $\ln(x) < 1$ si $x \in]0; e[$ et $\ln(x) > 1$ si $x > e$.

III.2 – Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln(x) - 1$	$\|$	$-$		$-$	0	$+$	
$(\ln(x))^2$	$\|$	$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$	$\|$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

Limites et valeurs particulières

III.2 – Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln(x) - 1$	$\|$	$-$		$-$	0	$+$	
$(\ln(x))^2$	$\|$	$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$	$\|$	0^- $\searrow$	$\|$	$\searrow$	e	$\nearrow$	

Limites et valeurs particulières

$f(e) = \frac{e}{\ln(e)} = e$. Par ailleurs, $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$, donc $\frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0^-$.

III.2 – Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln(x) - 1$	$\Vert$	$-$		$-$	0	$+$	
$(\ln(x))^2$	$\Vert$	$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$	$\Vert$	0^- $\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	e	$\nearrow$	

Limites et valeurs particulières

$f(e) = \frac{e}{\ln(e)} = e$. Par ailleurs, $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$, donc $\frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0^-$.

$\ln(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0^-$, donc $\frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to 1^-]{} -\infty$. De même, $\frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to 1^+]{} +\infty$.

III.2 – Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln(x) - 1$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$(\ln(x))^2$	‖	$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$	‖	0^- ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	e	↗	$+\infty$

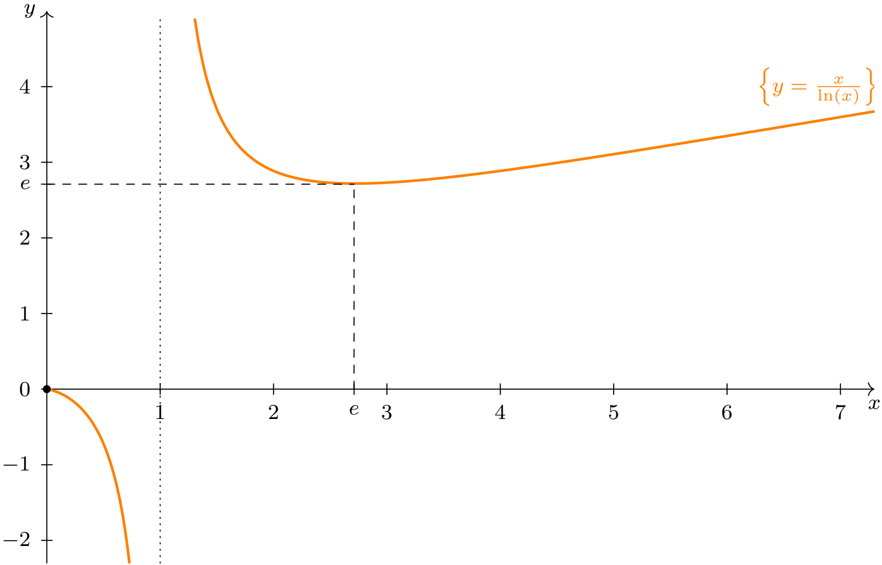
Limites et valeurs particulières

$f(e) = \frac{e}{\ln(e)} = e$. Par ailleurs, $\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$, donc $\frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^-$.

$\ln(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0^-$, donc $\frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to 1^-]{} -\infty$. De même, $\frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$.

Les fonctions puissances l'emportent sur $\ln$, donc $\frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$.

III.2 – Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$



IV – Continuité

IV.1 – Fonctions continues

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition (continuité)

Soit $x_0 \in I$, on dit que f est **continue en** x_0 si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$.

On dit que f est **continue sur** I si elle est continue en tout $x_0 \in I$.

IV.1 – Fonctions continues

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition (continuité)

Soit $x_0 \in I$, on dit que f est **continue en** x_0 si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$.

On dit que f est **continue sur** I si elle est continue en tout $x_0 \in I$.

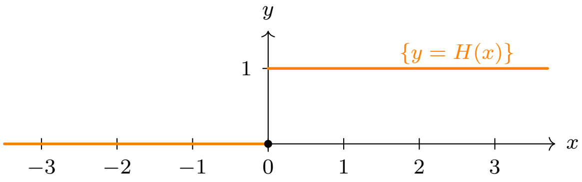
- Les fonctions usuelles (et toutes les fonctions rencontrées jusqu'ici) sont continues sur chaque intervalle de leur domaine de définition.
- Les sommes, produits, quotients, composées de fonctions continues sont continues partout où elles sont définies.

IV.1 – Fonctions continues

La fonction $H : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0, \end{cases}$ n'est pas continue en 0. En effet,

$$H(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0 \qquad \text{et} \qquad H(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1.$$

Donc $H(x)$ n'a pas de limite lorsque $x \to 0$.

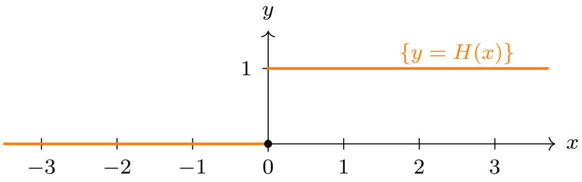


IV.1 – Fonctions continues

La fonction $H : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0, \end{cases}$ n'est pas continue en 0. En effet,

$$H(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0 \qquad \text{et} \qquad H(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1.$$

Donc $H(x)$ n'a pas de limite lorsque $x \to 0$.



Si I est un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, alors le graphe de f n'a qu'une seule composante : on peut le tracer sans lever le stylo.

IV.1 – Fonctions continues

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Lemme (dérivable implique continue)

Si f est dérivable en $x_0 \in I$, alors elle est continue en x_0.

Preuve : pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$ on a

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad .$$

IV.1 – Fonctions continues

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Lemme (dérivable implique continue)

Si f est dérivable en $x_0 \in I$, alors elle est continue en x_0.

Preuve : pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$ on a

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{(x - x_0)}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} 0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0)} \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0).$$

IV.1 – Fonctions continues

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Lemme (dérivable implique continue)

Si f est dérivable en $x_0 \in I$, alors elle est continue en x_0.

Preuve : pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$ on a

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{(x - x_0)}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} 0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0)} \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0).$$

La réciproque est fausse

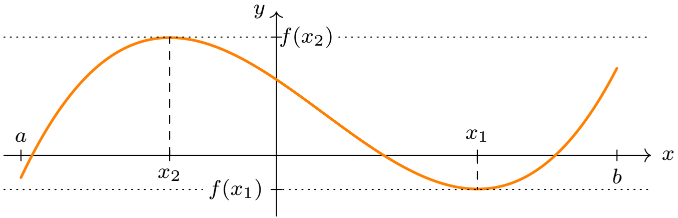
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue mais pas dérivable en 0 : si $x > 0$, on a $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$.

IV.2 – Quelques propriétés des fonctions continues

Soient a et $b \in \mathbb{R}$ t.q. $a \leqslant b$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Théorème (existence du maximum et du minimum)

La fonction f admet un min et un max sur $[a;b]$. C'est-à-dire, il existe x_1 et $x_2 \in [a;b]$ tels que, pour tout $x \in [a;b]$, $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$.

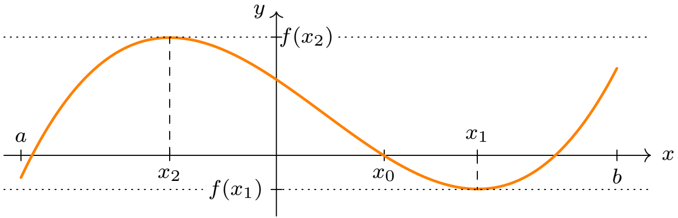


IV.2 – Quelques propriétés des fonctions continues

Soient a et $b \in \mathbb{R}$ t.q. $a \leqslant b$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Théorème (existence du maximum et du minimum)

La fonction f admet un min et un max sur $[a;b]$. C'est-à-dire, il existe x_1 et $x_2 \in [a;b]$ tels que, pour tout $x \in [a;b]$, $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$.



Théorème (des valeurs intermédiaires)

Si $f(a) < 0 < f(b)$ ou $f(a) > 0 > f(b)$, il existe $x_0 \in]a;b[$ t.q. $f(x_0) = 0$.