# Chapitre 3 : Incertitudes

# I – Notions d'incertitudes

1. Incertitude absolue
2. Incertitude relative

# I.1 – Incertitude absolue

Mesurer une grandeur physique, c'est lui associer un nombre réel, qui la représente sur une certaine échelle de mesure.

**Exemple**

Mesurer une longueur, c'est lui associer un nombre de mètres.

On ne mesure pas les grandeurs physiques avec une précision absolue. La précision des appareils de mesure est limitée.

**Exemple**

Si on mesure une longueur avec une règle graduée en $mm$, on ne connait le résultat qu'à $1\,mm$ près.

# I.1 – Incertitude absolue

Si on mesure une grandeur génériquement notée $x$, on notera :

- $x_v \in \mathbb{R}$ la *vraie* valeur, celle que l'on cherche à mesurer mais qu'on ne connaitra jamais parfaitement ;
- $x_m \in \mathbb{R}$ la valeur *mesurée*, renvoyée par notre appareil de mesure ;
- $\Delta x \in \mathbb{R}_+$ une estimation de l'erreur de mesure.

## Définition (incertitude absolue)

Le réel $\Delta x \geqslant 0$ est appelé **incertitude (absolue)** sur la **mesure** $x_m$.

# I.1 – Incertitude absolue

## Notation

Avec les notations précédentes, on note $x_v = x_m \pm \Delta x$. Cela signifie qu'on estime que $|x_v - x_m| \leqslant \Delta x$, c.-à-d. que $x_v \in [x_m - \Delta x; x_m + \Delta x]$.

## Exemples

- On mesure le diamètre $d$ d'un stylo avec une règle graduée en $mm$. On obtient $d_m = 8\,mm$, $\Delta d = 1\,mm$ et donc $d_v = 8 \pm 1\,mm$.

# I.1 – Incertitude absolue

## Notation

Avec les notations précédentes, on note $x_v = x_m \pm \Delta x$. Cela signifie qu'on estime que $|x_v - x_m| \leqslant \Delta x$, c.-à-d. que $x_v \in [x_m - \Delta x; x_m + \Delta x]$.

## Exemples

- On mesure le diamètre $d$ d'un stylo avec une règle graduée en $mm$. On obtient $d_m = 8\,mm$, $\Delta d = 1\,mm$ et donc $d_v = 8 \pm 1\,mm$.
- Avec la même règle, on mesure la hauteur $h$ d'un tableau. On obtient $h_m = 1204\,mm$, $\Delta h = 1\,mm$ et donc $h_v = 1204 \pm 1\,mm$.

Sur ces exemples, les incertitudes absolues sont les mêmes $\Delta d = \Delta h$. Cependant, l'erreur sur $d_m$ semble plus significative que celle sur $h_m$.

# I.2 – Incertitude relative

Selon les cas, il peut être plus pertinent de considérer la fraction de la valeur mesurée que représente l'incertitude absolue.

## Définition (incertitude relative)

Si $\Delta x$ est l'incertitude absolue sur une mesure $x_m \neq 0$, on appelle **incertitude relative** sur $x_m$ le nombre $\frac{\Delta x}{|x_m|} \in \mathbb{R}_+$.

# I.2 – Incertitude relative

Selon les cas, il peut être plus pertinent de considérer la fraction de la valeur mesurée que représente l'incertitude absolue.

## Définition (incertitude relative)

Si $\Delta x$ est l'incertitude absolue sur une mesure $x_m \neq 0$, on appelle **incertitude relative** sur $x_m$ le nombre $\frac{\Delta x}{|x_m|} \in \mathbb{R}_+$.

## Exemples

En revenant aux exemples précédents :

- l'incertitude relative sur le diamètre du stylo est $\frac{\Delta d}{|d_m|} = \frac{1}{8} = 12,5\%$.
- celle sur la hauteur du tableau est $\frac{\Delta h}{|h_m|} = \frac{1}{1204} \simeq 0,0008 = 0,08\%$.

# II – Propagation des incertitudes

# II.1 – Un exemple idiot

Supposons qu'on ait obtenu une mesure $x_m$, avec une incertitude $\Delta x$. On estime donc que la vraie valeur vérifie $x_m - \Delta x \leqslant x_v \leqslant x_m + \Delta x$.

Si on veut connaître $y_v = \exp(x_v)$, notre mesure en donne une valeur approchée $y_m = \exp(x_m)$.

# II.1 – Un exemple idiot

Supposons qu'on ait obtenu une mesure $x_m$, avec une incertitude $\Delta x$. On estime donc que la vraie valeur vérifie $x_m - \Delta x \leqslant x_v \leqslant x_m + \Delta x$.

Si on veut connaître $y_v = \exp(x_v)$, notre mesure en donne une valeur approchée $y_m = \exp(x_m)$.

## Application numérique

Si $x_m = 10$ et $\Delta x = 1$, on obtient $y_m = e^{10} \simeq 22000$.

Par ailleurs $9 \leqslant x_v \leqslant 11$, donc $8100 \simeq e^9 \leqslant y_v = e^{x_v} \leqslant e^{11} \simeq 60000$.

On ne sait pas dire mieux que $|y_v - y_m| \lesssim 38000$, d'où $\Delta y = 38000$.

# II.1 – Un exemple idiot

Supposons qu'on ait obtenu une mesure $x_m$, avec une incertitude $\Delta x$. On estime donc que la vraie valeur vérifie $x_m - \Delta x \leqslant x_v \leqslant x_m + \Delta x$.

Si on veut connaître $y_v = \exp(x_v)$, notre mesure en donne une valeur approchée $y_m = \exp(x_m)$.

## Application numérique

Si $x_m = 10$ et $\Delta x = 1$, on obtient $y_m = e^{10} \simeq 22000$.

Par ailleurs $9 \leqslant x_v \leqslant 11$, donc $8100 \simeq e^9 \leqslant y_v = e^{x_v} \leqslant e^{11} \simeq 60000$.

On ne sait pas dire mieux que $|y_v - y_m| \lesssim 38000$, d'où $\Delta y = 38000$.

Ainsi $\Delta x = 1$ mais $\Delta y = 38000$ et $\frac{\Delta x}{|x_m|} = 10\%$ mais $\frac{\Delta y}{|y_m|} \simeq 173\%$.

# II.1 – Un exemple idiot

- Appliquer une fonction a un effet non évident, et potentiellement désastreux, sur l'incertitude (absolue ou relative).
- On veut estimer comment les incertitudes se propagent quand on applique une fonction.

# II.2 – Cas des fonctions d'une variable

Soit $x_m \in \mathbb{R}$ une valeur mesurée avec une incertitude absolue $\Delta x \geqslant 0$.
On estime donc que la vraie valeur $x_v$ est telle que $|x_m - x_v| \leqslant \Delta x$.

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, $y_v = f(x_v)$ et $y_m = f(x_m)$.
On cherche un nombre $\Delta y$ tel que $|y_v - y_m| \leqslant \Delta y$.

# II.2 – Cas des fonctions d'une variable

Soit $x_m \in \mathbb{R}$ une valeur mesurée avec une incertitude absolue $\Delta x \geqslant 0$.
On estime donc que la vraie valeur $x_v$ est telle que $|x_m - x_v| \leqslant \Delta x$.

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, $y_v = f(x_v)$ et $y_m = f(x_m)$.
On cherche un nombre $\Delta y$ tel que $|y_v - y_m| \leqslant \Delta y$.

## Rappel

Au voisinage de $x_m$, on a vu que $f$ ressemble à la fonction affine

$$x \longmapsto f(x_m) + f'(x_m)(x - x_m).$$

On peut donc espérer que $f(x_v) \simeq f(x_m) + f'(x_m)(x_v - x_m)$, et donc

$$|y_v - y_m| = |f(x_v) - f(x_m)| \simeq |f'(x_m)(x_v - x_m)| = |f'(x_m)|\underbrace{|x_v - x_m|}_{\leqslant \Delta x}.$$

# II.2 – Cas des fonctions d'une variable

## Première recette de propagation des incertitudes

Soient $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Si l'incertitude sur $x_m \in I$ est $\Delta x$, on estime l'incertitude sur $y_m = f(x_m)$ par $\Delta y = |f'(x_m)|\Delta x$.

# II.2 – Cas des fonctions d'une variable

## Première recette de propagation des incertitudes

Soient $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Si l'incertitude sur $x_m \in I$ est $\Delta x$, on estime l'incertitude sur $y_m = f(x_m)$ par $\Delta y = |f'(x_m)|\Delta x$.

- Ce n'est pas un résultat formel qui dirait que si $|x_v - x_m| \leqslant \Delta x$, alors $|f(x_v) - f(x_m)| \leqslant |f'(x_m)|\Delta x$.
- C'est une recette simple pour *estimer* l'incertitude absolue sur $y_m$ dans les cas favorables. Il faut savoir être critique du résultat.

## Exemple (de cas défavorable)

Si $f : x \mapsto x^2$ avec $x_m = 0$ ; $x_v = 1$ et $\Delta x = 2$ on a $f'(x_m) = 0$. La recette donne $\Delta y = 0$, mais $|y_v - y_m| = |f(x_v) - f(x_m)| = 1 > \Delta y$.

# II.2 – Cas des fonctions d'une variable

On s'intéresse à l'aire $A_v$ d'un disque de rayon $R_v = 10,0 \pm 0,1\,cm$, c'est-à-dire $R_m = 10,0\,cm$ et $\Delta R = 0,1\,cm$.

Notons $A\colon R \mapsto \pi R^2$, de sorte que $A_v = A(R_v)$. On a $A'\colon R \mapsto 2\pi R$.

Notre recette permet d'estimer que $A_v = A_m \pm \Delta A$ où

- $A_m = A(R_m) = \pi \times (R_m)^2 \simeq 314\,cm^2$ ;
- $\Delta A = |A'(R_m)| \times \Delta R = |2\pi R_m| \times \Delta R \simeq 6\,cm^2$.

Donc $A_v = 314 \pm 6\,cm^2$.

# II.2 – Cas des fonctions d'une variable

## Incertitude relative sur une puissance

Soient $k \in \mathbb{Z}^*$ et $C \in \mathbb{R}^*$. Si l'incertitude sur $x_m \neq 0$ est $\Delta x$, alors l'incertitude relative sur $y_m = C \times (x_m)^k$ est $\frac{\Delta y}{|y_m|} = |k| \frac{\Delta x}{|x_m|}$.

Preuve : Soit $f : x \mapsto Cx^k$, on a $f' : x \mapsto Ckx^{k-1}$ et $y_m = f(x_m)$.

On applique la recette sur $]0;+\infty[$ si $x_m > 0$ et sur $]-\infty; 0[$ si $x_m < 0$ :

$$\Delta y = |f'(x_m)|\Delta x = |Ck \times (x_m)^{k-1}|\Delta x.$$

Donc $\frac{\Delta y}{|y_m|} = \frac{|Ck \times (x_m)^{k-1}|\Delta x}{|C \times (x_m)^k|} = \left|\frac{Ck \times (x_m)^{k-1}}{C \times (x_m)^k}\right|\Delta x = \left|\frac{k}{x_m}\right|\Delta x = |k|\frac{\Delta x}{|x_m|}$.

# II.2 – Cas des fonctions d'une variable

## Incertitude relative sur une puissance

Soient $k \in \mathbb{Z}^*$ et $C \in \mathbb{R}^*$. Si l'incertitude sur $x_m \neq 0$ est $\Delta x$, alors l'incertitude relative sur $y_m = C \times (x_m)^k$ est $\frac{\Delta y}{|y_m|} = |k| \frac{\Delta x}{|x_m|}$.

Preuve : Soit $f : x \mapsto Cx^k$, on a $f' : x \mapsto Ckx^{k-1}$ et $y_m = f(x_m)$.

On applique la recette sur $]0;+\infty[$ si $x_m > 0$ et sur $]-\infty;0[$ si $x_m < 0$ :

$$\Delta y = |f'(x_m)|\Delta x = |Ck \times (x_m)^{k-1}|\Delta x.$$

Donc $\frac{\Delta y}{|y_m|} = \frac{|Ck \times (x_m)^{k-1}|\Delta x}{|C \times (x_m)^k|} = \left|\frac{Ck \times (x_m)^{k-1}}{C \times (x_m)^k}\right| \Delta x = \left|\frac{k}{x_m}\right| \Delta x = |k| \frac{\Delta x}{|x_m|}$.

## Exemple (de l'aire du disque)

On avait $A_m = \pi \times (R_m)^2$. Donc $\frac{\Delta A}{|A_m|} = 2\frac{\Delta R}{|R_m|} = 2\frac{0,1}{10} = 0,02 = 2\%$.

# II.3 – Cas des fonctions de deux variables

Supposons qu'on a mesuré $x_v = x_m \pm \Delta x$ et $y_v = y_m \pm \Delta y$.

Soient $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable, $z_v = F(x_v; y_v)$ et $z_m = F(x_m; y_m)$.
On cherche un nombre $\Delta z$ tel que $|z_v - z_m| \leqslant \Delta z$.

# II.3 – Cas des fonctions de deux variables

Supposons qu'on a mesuré $x_v = x_m \pm \Delta x$ et $y_v = y_m \pm \Delta y$.

Soient $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable, $z_v = F(x_v; y_v)$ et $z_m = F(x_m; y_m)$.
On cherche un nombre $\Delta z$ tel que $|z_v - z_m| \leqslant \Delta z$.

Le même genre d'idée qu'en une variable donne la recette suivante.

## Seconde recette de propagation des incertitudes

On estime l'incertitude absolue sur $z_m = F(x_m; y_m)$ par

$$\Delta z = |\partial_1 F(x_m; y_m)| \times \Delta x + |\partial_2 F(x_m; y_m)| \times \Delta y.$$

# II.3 – Cas des fonctions de deux variables

**Incertitude absolue sur une somme**

Si l'incertitude sur $x_m$ est $\Delta x$ et l'incertitude sur $y_m$ est $\Delta y$, alors l'incertitude absolue sur $z_m = x_m + y_m$ est $\Delta z = \Delta x + \Delta y$.

Preuve : Soit $F : (x; y) \mapsto x + y$, de sorte que $z_m = F(x_m; y_m)$.

On a $\partial_1 F : (x; y) \mapsto 1$ et $\partial_2 F : (x; y) \mapsto 1$. Donc, d'après la recette,

$$\Delta z = |\partial_1 F(x_m; y_m)| \times \Delta x + |\partial_2 F(x_m; y_m)| \times \Delta y = \Delta x + \Delta y.$$

# II.3 – Cas des fonctions de deux variables

## Incertitude absolue sur une somme

Si l'incertitude sur $x_m$ est $\Delta x$ et l'incertitude sur $y_m$ est $\Delta y$, alors l'incertitude absolue sur $z_m = x_m + y_m$ est $\Delta z = \Delta x + \Delta y$.

Preuve : Soit $F : (x; y) \mapsto x + y$, de sorte que $z_m = F(x_m; y_m)$.

On a $\partial_1 F : (x; y) \mapsto 1$ et $\partial_2 F : (x; y) \mapsto 1$. Donc, d'après la recette,

$$\Delta z = |\partial_1 F(x_m; y_m)| \times \Delta x + |\partial_2 F(x_m; y_m)| \times \Delta y = \Delta x + \Delta y.$$

## Remarque

L'incertitude sur $w_m = x_m - y_m$ est $\Delta w = \Delta x + \Delta y$.

# II.3 – Cas des fonctions de deux variables

## Incertitude relative sur un produit

Si l'incertitude sur $x_m \neq 0$ est $\Delta x$ et l'incertitude sur $y_m \neq 0$ est $\Delta y$, alors l'incertitude relative sur $z_m = x_m \times y_m$ est $\frac{\Delta z}{|z_m|} = \frac{\Delta x}{|x_m|} + \frac{\Delta y}{|y_m|}$.

Preuve : Soit $F : (x; y) \mapsto x \times y$, de sorte que $z_m = F(x_m; y_m)$.

On a $\partial_1 F : (x; y) \mapsto y$ et $\partial_2 F : (x; y) \mapsto x$. Donc, d'après la recette,

$$\Delta z = |\partial_1 F(x_m; y_m)| \times \Delta x + |\partial_2 F(x_m; y_m)| \times \Delta y = |y_m|\Delta x + |x_m|\Delta y.$$

Donc $\frac{\Delta z}{|z_m|} = \frac{|y_m| \times \Delta x + |x_m| \times \Delta y}{|x_m \times y_m|} = \frac{|y_m| \times \Delta x}{|x_m| \times |y_m|} + \frac{|x_m| \times \Delta y}{|x_m| \times |y_m|} = \frac{\Delta x}{|x_m|} + \frac{\Delta y}{|y_m|}$.

# II.3 – Cas des fonctions de deux variables

Calculons le volume $V_v$ d'un cylindre de rayon $R_v = 3,0 \pm 0,1\,cm$ et de hauteur $h_v = 10,0 \pm 0,1\,cm$.

Soit $V : (R; h) \mapsto \pi R^2 h$, de sorte que $V_v = V(R_v; h_v)$. On a alors

$$\partial_1 V : (R; h) \mapsto 2\pi R h \qquad \text{et} \qquad \partial_2 V : (R; h) \mapsto \pi R^2.$$

# II.3 – Cas des fonctions de deux variables

Calculons le volume $V_v$ d'un cylindre de rayon $R_v = 3,0 \pm 0,1\,cm$ et de hauteur $h_v = 10,0 \pm 0,1\,cm$.

Soit $V : (R;h) \mapsto \pi R^2 h$, de sorte que $V_v = V(R_v;h_v)$. On a alors

$$\partial_1 V : (R;h) \mapsto 2\pi Rh \qquad \text{et} \qquad \partial_2 V : (R;h) \mapsto \pi R^2.$$

En notant $R_m = 3{,}0\,cm$ ; $\Delta R = 0{,}1\,cm$ ; $h_m = 10{,}0\,cm$ et $\Delta h = 0{,}1\,cm$, on a $V_m = V(R_m;h_m) = \pi \times (R_m)^2 \times h_m \simeq 283\,cm^3$, et

$$\begin{aligned}\Delta V &= |\partial_1 V(R_m;h_m)|\Delta R + |\partial_2 V(R_m;h_m)|\Delta h \\ &= 2\pi \times R_m \times h_m \times \Delta R + \pi \times (R_m)^2 \times \Delta h \simeq 22\,cm^3.\end{aligned}$$

Donc $V_v = 283 \pm 22\,cm^3$.