Chapitre 2 : Dérivation

I – Notion de dérivée

I.1 – Limite finie en un point fini

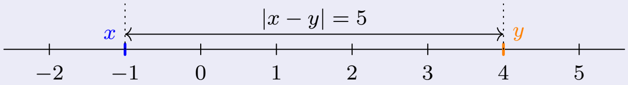
La valeur absolue définit une notion de distance sur $\mathbb{R}$.

Définition (distance)

Soient x et $y \in \mathbb{R}$, la **distance** entre x et y est $|y - x| = |x - y|$.

Exemple

La distance entre $x = -1$ et $y = 4$ est $|x - y| = |-1 - 4| = |-5| = 5$.



I.1 – Limite finie en un point fini

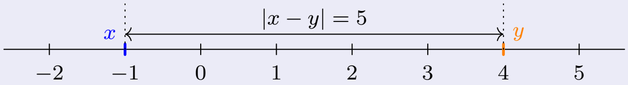
La valeur absolue définit une notion de distance sur $\mathbb{R}$.

Définition (distance)

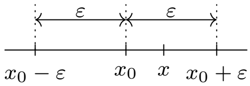
Soient x et $y \in \mathbb{R}$, la **distance** entre x et y est $|y - x| = |x - y|$.

Exemple

La distance entre $x = -1$ et $y = 4$ est $|x - y| = |-1 - 4| = |-5| = 5$.



Soit $\varepsilon > 0$, les réels x et x_0 sont à une distance inférieure à ε lorsque $|x - x_0| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire si $x \in [x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon]$.



I.1 – Limite finie en un point fini

Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

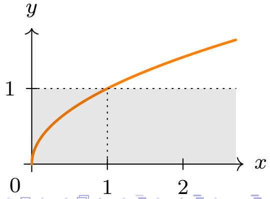
Définition (informelle)

Soit $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que $f(x)$ **tend vers** ℓ **lorsque** x **tend vers** x_0 si : les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues aussi proches de ℓ que voulu si on choisit x assez proche de x_0.

Dans ce cas, on dit que ℓ est la **limite** de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Exemple

Si $I = [0; +\infty[$, $x_0 = 0$ et $f : x \mapsto \sqrt{x}$, on a $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.



I.1 – Limite finie en un point fini

Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

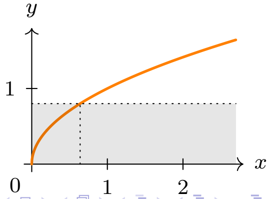
Définition (informelle)

Soit $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que $f(x)$ **tend vers** ℓ **lorsque** x **tend vers** x_0 si : les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues aussi proches de ℓ que voulu si on choisit x assez proche de x_0.

Dans ce cas, on dit que ℓ est la **limite** de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Exemple

Si $I = [0; +\infty[$, $x_0 = 0$ et $f : x \mapsto \sqrt{x}$, on a $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.



I.1 – Limite finie en un point fini

Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

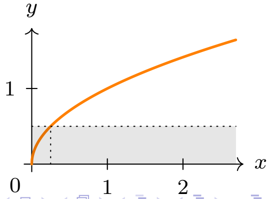
Définition (informelle)

Soit $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que $f(x)$ **tend vers** ℓ **lorsque** x **tend vers** x_0 si : les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues aussi proches de ℓ que voulu si on choisit x assez proche de x_0.

Dans ce cas, on dit que ℓ est la **limite** de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Exemple

Si $I = [0; +\infty[$, $x_0 = 0$ et $f : x \mapsto \sqrt{x}$, on a $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.



I.1 – Limite finie en un point fini

Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

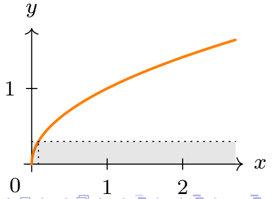
Définition (informelle)

Soit $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que $f(x)$ **tend vers** ℓ **lorsque** x **tend vers** x_0 si : les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues aussi proches de ℓ que voulu si on choisit x assez proche de x_0.

Dans ce cas, on dit que ℓ est la **limite** de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Exemple

Si $I = [0; +\infty[$, $x_0 = 0$ et $f : x \mapsto \sqrt{x}$, on a $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.

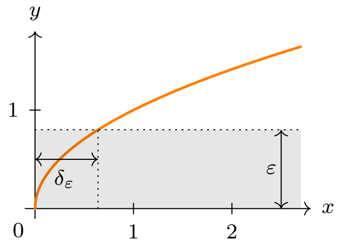


I.1 – Limite finie en un point fini

Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition (formelle, hors-programme)

Soit $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que si $x \in I \setminus \{x_0\}$ et $|x - x_0| \leqslant \delta_\varepsilon$ alors $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.



I.1 – Limite finie en un point fini

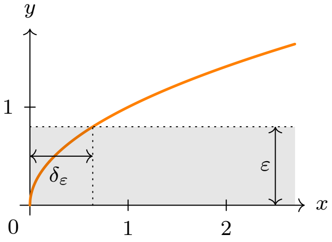
Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition (formelle, hors-programme)

Soit $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que si $x \in I \setminus \{x_0\}$ et $|x - x_0| \leqslant \delta_\varepsilon$ alors $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Exemple

Pour $I = [0; +\infty[$, $x_0 = 0$ et $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
Fixons un réel $\varepsilon > 0$. On définit $\delta_\varepsilon = \varepsilon^2$.
Si $x \in I \setminus \{x_0\}$ et $|x - x_0| \leqslant \delta_\varepsilon = \varepsilon^2$,
alors $0 < x \leqslant \varepsilon^2$ et $|f(x) - 0| = \sqrt{x} \leqslant \varepsilon$.
Donc $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.



I.1 – Limite finie en un point fini

- Calculer des limites comme au slide précédent est pénible.
- On ne vous demande pas de savoir le faire.
- On reviendra sur les limites et comment les calculer au chapitre 4.

I.2 – Premiers exemples de dérivées

Exemple 1

La position en fonction du temps.

Soit $x : [0;T] \to \mathbb{R}$ modélisant une position en fonction du temps.

- Soient t_0 et $t \in [0;T]$ tels que $t_0 < t$. La distance algébrique parcourue entre les instants t_0 et t est $x(t) - x(t_0)$.
- La vitesse moyenne sur l'intervalle de temps $[t_0;t]$ est $\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$, positive si déplacement vers la droite, et négative sinon.

I.2 – Premiers exemples de dérivées

Exemple 1

La position en fonction du temps.

Soit $x : [0; T] \to \mathbb{R}$ modélisant une position en fonction du temps.

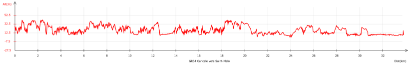
- Soient t_0 et $t \in [0; T]$ tels que $t_0 < t$. La distance algébrique parcourue entre les instants t_0 et t est $x(t) - x(t_0)$.
- La vitesse moyenne sur l'intervalle de temps $[t_0; t]$ est $\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$, positive si déplacement vers la droite, et négative sinon.
- Plus t est proche de t_0, plus on veut penser à $\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ comme la vitesse à l'instant t_0.

Cela suggère de définir la vitesse à l'instant t_0 comme $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$.

I.2 – Premiers exemples de dérivées

Exemple 2

L'altitude en fonction de la position.



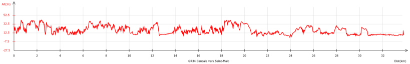
Soit $z : [0; L] \to \mathbb{R}_+$ modélisant une altitude en fonction de la position.

- Soient x_0 et $x \in [0; L]$ tels que $x_0 < x$. La différence d'altitude entre x_0 et x est $z(x) - z(x_0)$, positive si on monte, négative sinon.
- La pente moyenne entre les positions x_0 et x est $\frac{z(x)-z(x_0)}{x-x_0}$.

I.2 – Premiers exemples de dérivées

Exemple 2

L'altitude en fonction de la position.



Soit $z : [0; L] \to \mathbb{R}_+$ modélisant une altitude en fonction de la position.

- Soient x_0 et $x \in [0; L]$ tels que $x_0 < x$. La différence d'altitude entre x_0 et x est $z(x) - z(x_0)$, positive si on monte, négative sinon.
- La pente moyenne entre les positions x_0 et x est $\frac{z(x)-z(x_0)}{x-x_0}$.
- Plus x est proche de x_0, plus on veut penser à $\frac{z(x)-z(x_0)}{x-x_0}$ comme la pente à la position x_0.

Cela suggère de définir la pente en x_0 comme $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{z(x)-z(x_0)}{x-x_0}$.

I.2 – Premiers exemples de dérivées

Exemple 3

Le volume en fonction du temps.

Soit $v : [0; T] \to [0; V]$ modélisant un volume en fonction du temps.

- Soient t_0 et $t \in [0; T]$ tels que $t_0 < t$. Le volume ajouté dans la baignoire entre les instants t_0 et t est $v(t) - v(t_0)$.
- Le débit moyen sur l'intervalle de temps $[t_0; t]$ est $\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$.

I.2 – Premiers exemples de dérivées

Exemple 3

Le volume en fonction du temps.

Soit $v : [0; T] \to [0; V]$ modélisant un volume en fonction du temps.

- Soient t_0 et $t \in [0; T]$ tels que $t_0 < t$. Le volume ajouté dans la baignoire entre les instants t_0 et t est $v(t) - v(t_0)$.
- Le débit moyen sur l'intervalle de temps $[t_0; t]$ est $\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$.
- Plus t est proche de t_0, plus on veut penser à $\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$ comme le débit à l'instant t_0.

Cela suggère de définir le débit à l'instant t_0 comme $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$.

I.2 – Premiers exemples de dérivées

- Les trois situations précédentes sont de natures différentes, mais on a effectué le même type d'opération sur la fonction étudiée.
- Sur ces exemples, on ne sait pas prouver mathématiquement que les limites évoquées ont bien du sens.
- Comme ces limites ont une interprétation naturelle dans le modèle, on suppose qu'elles existent.
  C'est une hypothèse de modélisation, pas un résultat formel.

I.3 – Dérivée

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition (dérivée en x_0)

On dit que f est **dérivable en** x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0.

Dans ce cas, on appelle **dérivée de** f **en** x_0 le nombre défini par

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

L'existence et la valeur de $f'(x_0)$ ne dépendent que de la fonction f au voisinage de x_0. On dit que la dérivabilité est une propriété locale.

I.3 – Dérivée

On considère l'exemple de $f : x \mapsto |x|$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Si $x_0 > 0$, pour x assez proche de x_0 on a $x > 0$ et donc

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \xrightarrow[x \to x_0]{} 1.$$

  Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 1$.

I.3 – Dérivée

On considère l'exemple de $f : x \mapsto |x|$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Si $x_0 > 0$, pour x assez proche de x_0 on a $x > 0$ et donc
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \xrightarrow[x \to x_0]{} 1.$$
Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 1$.
- Si $x_0 < 0$, pour x assez proche de x_0 on a $x < 0$ et donc
$$\frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{-x - (-x_0)}{x - x_0} = \frac{-(x - x_0)}{x - x_0} = -1 \xrightarrow[x \to x_0]{} -1.$$
Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = -1$.

I.3 – Dérivée

- Si $x_0 = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Cette quantité n'a pas de limite lorsque x tend vers 0, donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

I.3 – Dérivée

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

Définition (dérivée)

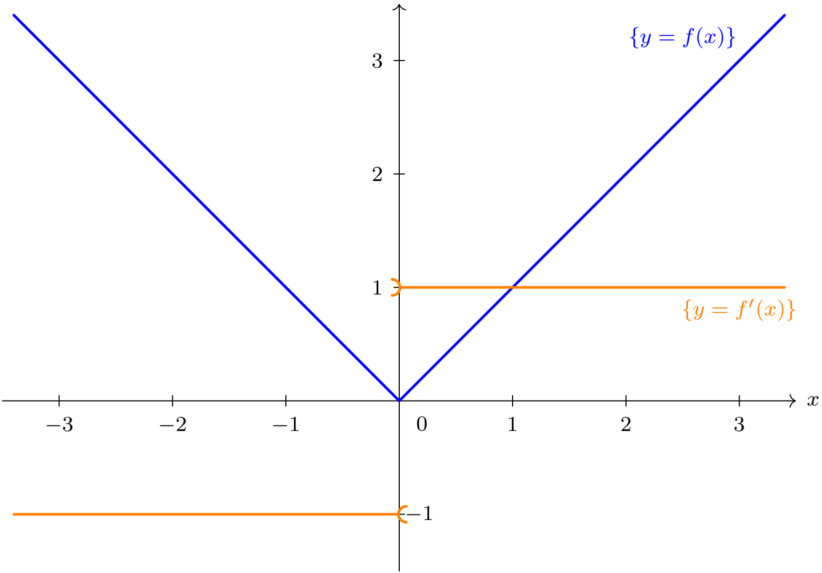
On dit que f est **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout $x \in I$. Dans ce cas, la **dérivée** de f est la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$f' : x \longmapsto f'(x).$$

Exemple

La fonction $f : x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais dérivable seulement sur $\mathbb{R}^*$. On a $f' : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$.

I.3 – Dérivée



I.4 – Pourquoi dériver ?

Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ modélise un phénomène du monde réel, sa dérivée f' peut avoir une interprétation naturelle dans le modèle.

On peut alors vouloir étudier ou calculer f'.

Exemples

variable	fonction initiale	fonction dérivée
temps	position	vitesse
position	altitude	pente
temps	volume	débit
temps	vitesse	accélération
temps	énergie	puissance
position	énergie potentielle	force

I.4 – Pourquoi dériver ?

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Définition (dérivées successives)

- Si f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, on dit que f est 2 **fois dérivable**.
  On note alors $f^{(2)} = f'' = (f')'$ la **dérivée seconde** de f.
- Si $f^{(2)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, on dit que f est 3 **fois dérivable**.
  On note alors $f^{(3)} = (f^{(2)})'$ la **dérivée troisième** de f.
- $\dots$
- Si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, on dit que f est n **fois dérivable**.
  On note alors $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ la **dérivée n-ième** de f.

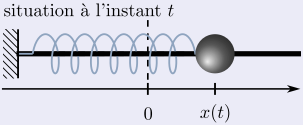
Plus f admet de dérivées successives, plus elle est dite régulière.

I.4 – Pourquoi dériver ?

Dans les modèles scientifiques, les "lois" sont souvent formulées sous forme d'une équation différentielle, c'est-à-dire une équation dont l'inconnue est une fonction, et qui relie cette fonction à ses dérivées.

Exemple (bille attachée à un ressort)

- $x(t)$ allongement du ressort à l'instant t,
- $\omega > 0$ la pulsation du système.



Les lois de la physique disent que la fonction $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $x'' + \omega^2 x = 0$, c'est-à-dire :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \qquad x''(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

I.4 – Pourquoi dériver ?

~~Par sadisme, les enseignant·e·s aiment voir les étudiant·e·s souffrir.~~

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable, étudier f' donne des informations sur f.

Par exemple :

- le signe de f' est lié aux variations de f ;
- les maxima et minima de f sont des points où f' s'annule.

II – Calculs de dérivées

1. Stratégie pour dériver une fonction f
2. Dérivation des fonctions usuelles
3. Opérations sur les fonctions et dérivation

II.1 – Stratégie pour dériver une fonction f

- Si f est une fonction usuelle, les mathématicien·ne·s ont travaillé : on connait le domaine de dérivabilité de f et l'expression de f'. Il faut apprendre les formules par coeur.

II.1 – Stratégie pour dériver une fonction f

- Si f est une fonction usuelle, les mathématicien·ne·s ont travaillé : on connait le domaine de dérivabilité de f et l'expression de f'. Il faut apprendre les formules par coeur.

- Si f est somme, produit, composée, etc., de fonctions usuelles, on va voir comment la dérivation interagit avec ces opérations.
  - On décompose f en fonctions usuelles.
  - On dérive chacun des morceaux.
  - On les recombine pour obtenir f'.

II.1 – Stratégie pour dériver une fonction f

- Si f est une fonction usuelle, les mathématicien·ne·s ont travaillé : on connait le domaine de dérivabilité de f et l'expression de f'. Il faut apprendre les formules par coeur.

- Si f est somme, produit, composée, etc., de fonctions usuelles, on va voir comment la dérivation interagit avec ces opérations.
  - On décompose f en fonctions usuelles.
  - On dérive chacun des morceaux.
  - On les recombine pour obtenir f'.

- Sinon il faut revenir à la définition de la dérivée comme une limite. C'est pénible. On ne vous demande pas de savoir le faire.

II.2 – Dérivation des fonctions usuelles

domaine de définition	$f : x \mapsto \dots$	paramètres	domaine de dérivabilité	$f' : x \mapsto \dots$
$\mathbb{R}$	c	$c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	ax	$a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
$\mathbb{R}$	$ax + b$	a et $b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
$\mathbb{R}$	x^2		$\mathbb{R}$	$2x$
$\mathbb{R}$	x^3		$\mathbb{R}$	$3x^2$
$\mathbb{R}$	x^n	$n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}$	$a_d x^d + \dots$ $+a_1 x + a_0$	$d \in \mathbb{N}$ et $a_d, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$d a_d x^{d-1}$ $+ \dots + a_1$

Dérivées des fonctions polynomiales

II.2 – Dérivation des fonctions usuelles

domaine de définition	$f : x \mapsto \dots$	paramètre	domaine de dérivabilité	$f' : x \mapsto \dots$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$		$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^2}$		$\mathbb{R}^*$	$-\frac{2}{x^3}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$
$[0; +\infty[$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$		$]0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
dépend de a	x^a	$a \in \mathbb{R}$	dépend de a	ax^{a-1}

Dérivées des fonctions puissances

II.2 – Dérivation des fonctions usuelles

domaine de définition	$f : x \mapsto \ldots$	paramètre	domaine de dérivabilité	$f' : x \mapsto \ldots$
$\mathbb{R}$	e^x		$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}$	e^{bx}	$b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	be^{bx}
$\mathbb{R}$	$a^x = e^{x\ln(a)}$	$a > 0$	$\mathbb{R}$	$\ln(a)a^x$
$]0;+\infty[$	$\ln(x)$		$]0;+\infty[$	$\frac{1}{x}$
$]0;+\infty[$	$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$	$a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$]0;+\infty[$	$\frac{1}{x\ln(a)}$

Dérivées des fonctions exponentielles et logarithmes

II.2 – Dérivation des fonctions usuelles

domaine de définition	$f : x \mapsto \ldots$	domaine de dérivabilité	$f' : x \mapsto \ldots$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\tan(x)$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$
$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$[-1;1]$	$\arccos(x)$	$]-1;1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$[-1;1]$	$\arcsin(x)$	$]-1;1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Dérivées des fonctions trigonométriques et leurs réciproques

II.3 – Opérations sur les fonctions et dérivation

Lemme (linéarité de la dérivation)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soient u et v deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

- *La fonction $u + v : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$, c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, $(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.*
- *La fonction $au : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I et $(au)' = au'$, c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, $(au)'(x) = au'(x)$.*

II.3 – Opérations sur les fonctions et dérivation

Lemme (linéarité de la dérivation)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soient u et v deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

- *La fonction $u + v : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$, c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.*
- *La fonction $au : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I et $(au)' = au'$, c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, $(au)'(x) = au'(x)$.*

Exemple

Soit $f : x \mapsto 3x^2 + e^{2x}$. On a $f = 3u + v$, où $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto e^{2x}$. u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f aussi et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (3u+v)'(x) = (3u)'(x) + v'(x) = 3u'(x) + v'(x) = 6x + 2e^{2x}.$$

II.3 – Opérations sur les fonctions et dérivation

Lemme (règle de Leibniz)

Soient I un intervalle et u et v deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$. Alors, la fonction $uv : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$, c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

II.3 – Opérations sur les fonctions et dérivation

Lemme (règle de Leibniz)

Soient I un intervalle et u et v deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$. Alors, la fonction $uv : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$, c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Exemple

Pour $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto e^{-x}$, on obtient que $f : x \mapsto xe^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) = (uv)'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) \\ &= (1-x)e^{-x}. \end{aligned}$$

II.3 – Opérations sur les fonctions et dérivation

Lemme (dérivée d'un quotient)

Soient I un intervalle et u et v deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que, pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$. Alors $\frac{u}{v} : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$.

II.3 – Opérations sur les fonctions et dérivation

Lemme (dérivée d'un quotient)

Soient I un intervalle et u et v deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que, pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$. Alors $\frac{u}{v} : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$.

Exemple

Pour $u = \sin$ et $v = \cos$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on retrouve que $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est dérivable sur I et que, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$,

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2}.$$

II.3 – Opérations sur les fonctions et dérivation

Lemme (règle de la chaine)

Soient I et J deux intervalles. Soient $u : I \to J$ et $v : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.

Alors $v \circ u : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$, c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$.

II.3 – Opérations sur les fonctions et dérivation

Lemme (règle de la chaine)

Soient I et J deux intervalles. Soient $u : I \to J$ et $v : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.

Alors $v \circ u : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$, c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$.

Exemple

La fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est composée des fonctions dérivables $u : x \mapsto x^2 + 1$ de $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$ et $v = \ln$ de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Donc f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \ln'(u(x)) \times u'(x) = \frac{1}{u(x)} u'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

II.3 – Opérations sur les fonctions et dérivation

Soient I un intervalle et $u\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si v est une fonction usuelle, on omet parfois le symbole $\circ$ dans la notation $v \circ u$.

Par exemple, on note :

- u^n pour la fonction composée de u et $v : x \mapsto x^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$;
- e^u pour la fonction composée $\exp \circ u$;
- $\ln(u)$ pour la fonction composée $\ln \circ u$, si u est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$;
- $\cos(u)$ pour la fonction composée $\cos \circ u$;
- $\ldots$

II.3 – Opérations sur les fonctions et dérivation

Soient I un intervalle et $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

v	$f = v \circ u$	$f' = (v' \circ u) \times u'$
$x \mapsto x^2$	u^2	$2u \times u'$
$x \mapsto x^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$	u^n	$nu^{n-1} \times u'$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\exp$	e^u	$e^u \times u'$
$\ln$	$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\cos$	$\cos(u)$	$-\sin(u) \times u'$
$\sin$	$\sin(u)$	$\cos(u) \times u'$
$\arctan$	$\arctan(u)$	$\frac{u'}{1+u^2}$

Si f est bien définie, alors elle est dérivable sur I, avec la dérivée indiquée.

II.3 – Opérations sur les fonctions et dérivation

Lemme (dérivée d'une réciproque)

Soit $f : I \to J$ *une fonction entre deux intervalles. Supposons que :*

- f *admet une réciproque* $g : J \to I$ *;*
- f *est dérivable sur* I *;*
- *pour tout* $x \in I$, $f'(x) \neq 0$.

Alors g *est dérivable sur* J *et, pour tout* $y \in J$, $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$.

II.3 – Opérations sur les fonctions et dérivation

Lemme (dérivée d'une réciproque)

Soit $f : I \to J$ une fonction entre deux intervalles. Supposons que :

- *f admet une réciproque $g : J \to I$;*
- *f est dérivable sur I ;*
- *pour tout $x \in I$, $f'(x) \neq 0$.*

Alors g est dérivable sur J et, pour tout $y \in J$, $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$.

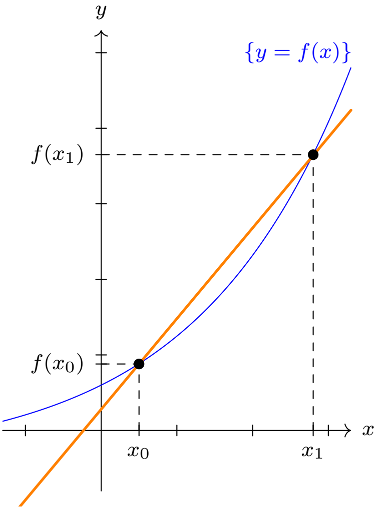
Exemple

Pour $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, on retrouve que $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est dérivable et, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln y)} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}$.

III – Interprétation graphique de la dérivée

III.1 – La dérivée comme pente du graphe

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Soient x_0 et $x_1 \in I$ distincts.

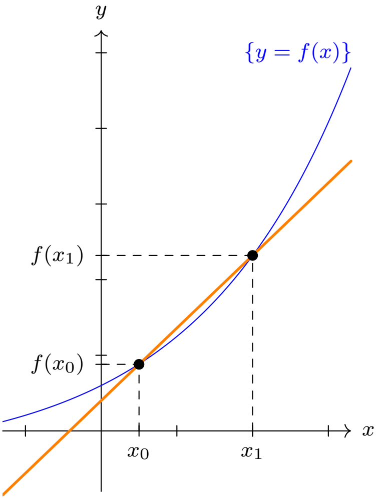


Il existe une unique droite passant par les points $(x_0; f(x_0))$ et $(x_1; f(x_1))$.

Par définition, sa pente est $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

III.1 – La dérivée comme pente du graphe

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Soient x_0 et $x_1 \in I$ distincts.



Il existe une unique droite passant par les points $(x_0; f(x_0))$ et $(x_1; f(x_1))$.

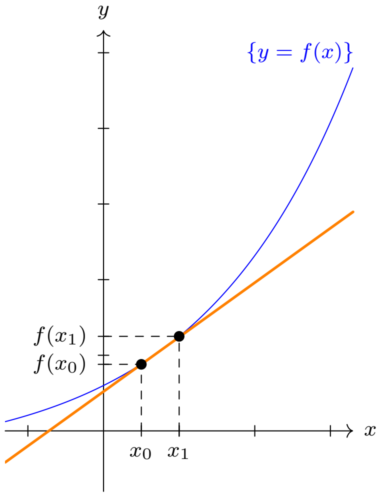
Par définition, sa pente est $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

Lorsque x_1 tend vers x_0, cette pente a une limite finie si et seulement si f est dérivable en x_0.

Dans ce cas, $f'(x_0) = \lim\limits_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ s'interprète comme la pente du graphe de f au point $(x_0; f(x_0))$.

III.1 – La dérivée comme pente du graphe

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Soient x_0 et $x_1 \in I$ distincts.



Il existe une unique droite passant par les points $(x_0; f(x_0))$ et $(x_1; f(x_1))$.

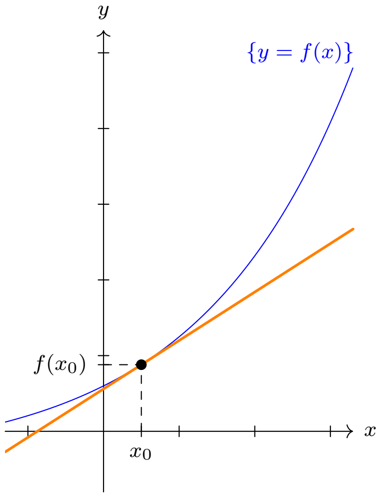
Par définition, sa pente est $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

Lorsque x_1 tend vers x_0, cette pente a une limite finie si et seulement si f est dérivable en x_0.

Dans ce cas, $f'(x_0) = \lim\limits_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ s'interprète comme la pente du graphe de f au point $(x_0; f(x_0))$.

III.1 – La dérivée comme pente du graphe

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Soient x_0 et $x_1 \in I$ distincts.



Il existe une unique droite passant par les points $(x_0; f(x_0))$ et $(x_1; f(x_1))$.

Par définition, sa pente est $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

Lorsque x_1 tend vers x_0, cette pente a une limite finie si et seulement si f est dérivable en x_0.

Dans ce cas, $f'(x_0) = \lim\limits_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ s'interprète comme la pente du graphe de f au point $(x_0; f(x_0))$.

III.2 – Droite tangente à un graphe

Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en x_0.

Soient a et $b \in \mathbb{R}$, et $g : x \mapsto ax + b$. On a les équivalences :

$$\begin{cases} g(x_0) = f(x_0), \\ g'(x_0) = f'(x_0), \end{cases} \iff \begin{cases} ax_0 + b = f(x_0), \\ a = f'(x_0), \end{cases} \iff \begin{cases} b = f(x_0) - f'(x_0)x_0, \\ a = f'(x_0). \end{cases}$$

III.2 – Droite tangente à un graphe

Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en x_0.

Soient a et $b \in \mathbb{R}$, et $g : x \mapsto ax + b$. On a les équivalences :

$$\begin{cases} g(x_0) = f(x_0), \\ g'(x_0) = f'(x_0), \end{cases} \iff \begin{cases} ax_0 + b = f(x_0), \\ a = f'(x_0), \end{cases} \iff \begin{cases} b = f(x_0) - f'(x_0)x_0, \\ a = f'(x_0). \end{cases}$$

Lemme

Il existe une unique fonction affine g telle que $\begin{cases} g(x_0) = f(x_0), \\ g'(x_0) = f'(x_0). \end{cases}$

Elle est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f'(x_0)x + \Big(f(x_0) - f'(x_0)x_0\Big) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

C'est la fonction affine qui approxime le mieux f au voisinage de x_0.

III.2 – Droite tangente à un graphe

Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en x_0.

Définition (droite tangente)

On appelle **droite tangente au graphe de f au point** $(x_0; f(x_0))$ la droite passant par $(x_0; f(x_0))$ et de pente $f'(x_0)$.

Cette droite tangente est le graphe de $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$:

$$\left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right\}.$$

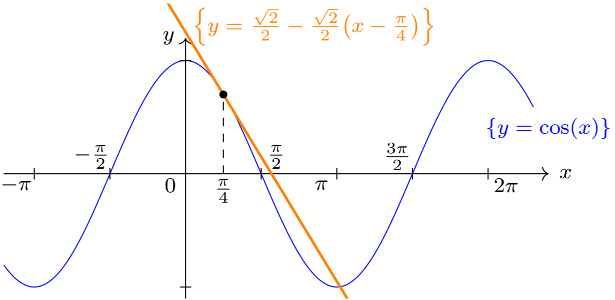
On dit aussi "la droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$".

III.2 – Droite tangente à un graphe

Exemple

Pour $f = \cos$ et $x_0 = \frac{\pi}{4}$, on a $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos'(\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.
La tangente au graphe de $\cos$ en $\frac{\pi}{4}$ est donc la droite

$$\left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$



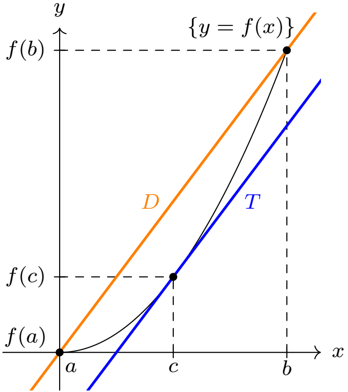
IV – Dérivée et variations

1. Signe de la dérivée et monotonie
2. Une première étude de fonction
3. Maxima et minima

IV.1 – Signe de la dérivée et monotonie

Théorème (des accroissements finis, hors-programme)

Soient a *et* $b \in \mathbb{R}$ *t.q.* $a < b$, *et* $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable.*
Alors, il existe $c \in]a; b[$ *tel que* $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Graphiquement : la droite D passant par les points $(a; f(a))$ et $(b; f(b))$ et la tangente T au graphe en $(c; f(c))$ ont la même pente.

Interprétation physique

Si on a marché $5\,km$ en $1\,h$ alors, à un moment, on a marché à $5\,km/h$.

IV.1 – Signe de la dérivée et monotonie

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Corollaire

Si, pour tout $x \in I$, on a $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante.

________________ $f'(x) \geqslant 0$ ________ *croissante.*

________________ $f'(x) = 0$ ________ *constante.*

________________ $f'(x) \leqslant 0$ ________ *décroissante.*

________________ $f'(x) < 0$ ________ *strictement décroissante.*

IV.1 – Signe de la dérivée et monotonie

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Corollaire

Si, pour tout $x \in I$, *on a* $f'(x) > 0$, *alors* f *est strictement croissante.*

______________ $f'(x) \geqslant 0$ ________ *croissante.*

______________ $f'(x) = 0$ ________ *constante.*

______________ $f'(x) \leqslant 0$ ________ *décroissante.*

______________ $f'(x) < 0$ ________ *strictement décroissante.*

Preuve du 1^{er} cas (les autres sont similaires)

Soient a et $b \in I$ t.q. $a < b$. Il existe $c \in]a;b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.
Comme $c \in I$, on a $f'(c) > 0$. Donc $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) > 0$.
Donc, pour tout a et $b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.

IV.2 – Une première étude de fonction

Soit $P : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$, qui est défini et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} P'(x) &= 2 \times (3x^2) - 3 \times (2x) - 12 \\ &= 6x^2 - 6x - 12 = 6\underbrace{\left(x^2 - x - 2\right)}_{=Q(x)}. \end{aligned}$$

IV.2 – Une première étude de fonction

Soit $P : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$, qui est défini et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} P'(x) &= 2 \times (3x^2) - 3 \times (2x) - 12 \\ &= 6x^2 - 6x - 12 = 6\underbrace{\left(x^2 - x - 2\right)}_{=Q(x)}. \end{aligned}$$

Pour étudier le signe de P', on le factorise

Q est un polynôme de degré 2, avec $\Delta = (-1)^2 - 4(-2) = 1 + 8 = 9$.

Ses racines sont

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 6(x - r_1)(x - r_2) = 6(x+1)(x-2)$.

IV.2 – Une première étude de fonction

On peut dresser le tableau de signes de $P'(x) = 6(x+1)(x-2)$ et le tableau de variations de P.

x	$-\infty$		$r_1 = -1$		$r_2 = 2$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
P		$\nearrow$	17	$\searrow$	-10	$\nearrow$	

Pour compléter le tableau, on a calculé $P(-1) = 17$ et $P(2) = -10$.

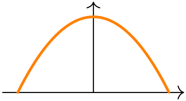
IV.3 – Maxima et minima

Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

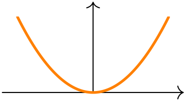
Définition (maximum, minimum)

On dit que f atteint :

- un **maximum** (max) en x_0 si, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leqslant f(x_0)$;
- un **minimum** (min) en x_0 si, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \geqslant f(x_0)$.



(a) f atteint un maximum en $x_0 = 0$



(b) f atteint un minimum en $x_0 = 0$

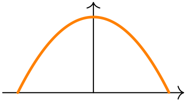
IV.3 – Maxima et minima

Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

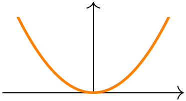
Lemme (localisation des maxima et minima)

Si f atteint un max en x_0, alors $f'(x_0) = 0$ ou x_0 est une borne de I.

Si f atteint un min en x_0, alors $f'(x_0) = 0$ ou x_0 est une borne de I.



(a) f atteint un maximum en $x_0 = 0$



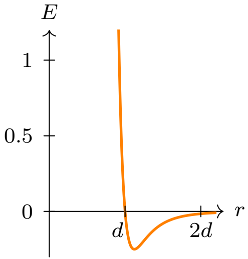
(b) f atteint un minimum en $x_0 = 0$

Ce lemme nous indique où chercher un éventuel max ou min de f.

IV.3 – Maxima et minima

Modèle de Lennard–Jones pour la molécule de dioxigène

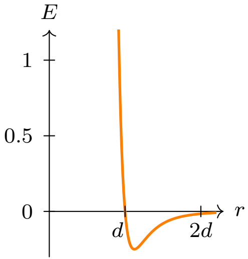
- On note $r \in]0; +\infty[$ la distance (en nm) entre les deux atomes.
- L'énergie potentielle est $E : r \mapsto \left(\frac{d}{r}\right)^{12} - \left(\frac{d}{r}\right)^{6}$, où $d = 0,346\,nm$.
- En l'absence de contraintes extérieures, la distance r_0 entre les deux atomes est telle que E atteint un minimum en $r_0 \in]0; +\infty[$.



IV.3 – Maxima et minima

Modèle de Lennard–Jones pour la molécule de dioxigène

- On note $r \in]0;+\infty[$ la distance (en nm) entre les deux atomes.
- L'énergie potentielle est $E : r \mapsto \left(\frac{d}{r}\right)^{12} - \left(\frac{d}{r}\right)^{6}$, où $d = 0,346\,nm$.
- En l'absence de contraintes extérieures, la distance r_0 entre les deux atomes est telle que E atteint un minimum en $r_0 \in]0;+\infty[$.



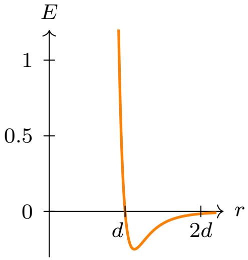
Comme $r_0 \in]0;+\infty[$, on a $E'(r_0) = 0$.

Après calcul, $E' : r \mapsto 6\frac{d^6}{r^7}\left(1 - 2\frac{d^6}{r^6}\right)$.

IV.3 – Maxima et minima

Modèle de Lennard–Jones pour la molécule de dioxigène

- On note $r \in]0;+\infty[$ la distance (en nm) entre les deux atomes.
- L'énergie potentielle est $E : r \mapsto \left(\frac{d}{r}\right)^{12} - \left(\frac{d}{r}\right)^{6}$, où $d = 0,346\,nm$.
- En l'absence de contraintes extérieures, la distance r_0 entre les deux atomes est telle que E atteint un minimum en $r_0 \in]0;+\infty[$.



Comme $r_0 \in]0;+\infty[$, on a $E'(r_0) = 0$.

Après calcul, $E' : r \mapsto 6\frac{d^6}{r^7}\left(1 - 2\frac{d^6}{r^6}\right)$.

$E'(r_0) = 0$ donc $1 - 2\frac{d^6}{r_0^6} = 0$ donc $r_0^6 = 2d^6$.

On a $r_0 > 0$ et $d > 0$, donc $r_0 = 2^{\frac{1}{6}} d \simeq 0,388nm$.

V – Dérivation des fonctions de deux variables

V.1 – Fonctions de deux variables

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et $x_0 \in \mathbb{R}$. On a vu que :

- le nombre $f'(x_0)$ mesure les variations de f au voisinage de x_0 ;
- il s'interprète comme la pente du graphe de f en $(x_0; f(x_0))$.

V.1 – Fonctions de deux variables

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et $x_0 \in \mathbb{R}$. On a vu que :

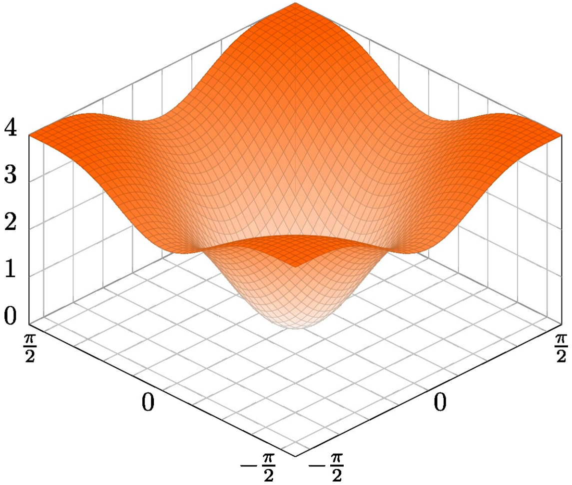
- le nombre $f'(x_0)$ mesure les variations de f au voisinage de x_0 ;
- il s'interprète comme la pente du graphe de f en $(x_0; f(x_0))$.

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, son graphe est $\left\{ \Big(x; y; F(x;y)\Big) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x;y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

- On représente le domaine de définition $\mathbb{R}^2$ par un plan horizontal.
- Pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, on représente $(x; y; F(x;y))$ comme le point à hauteur $F(x;y)$ au-dessus de $(x;y)$.

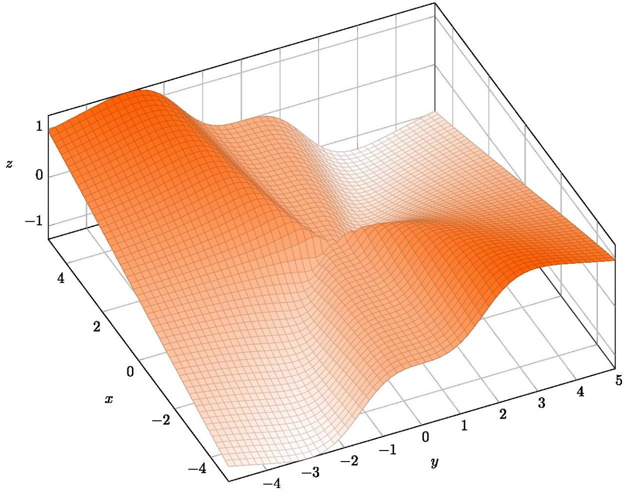
Si F modélise l'altitude en fonction de la position, son graphe dessine la topographie de la zone considérée.

V.1 – Fonctions de deux variables



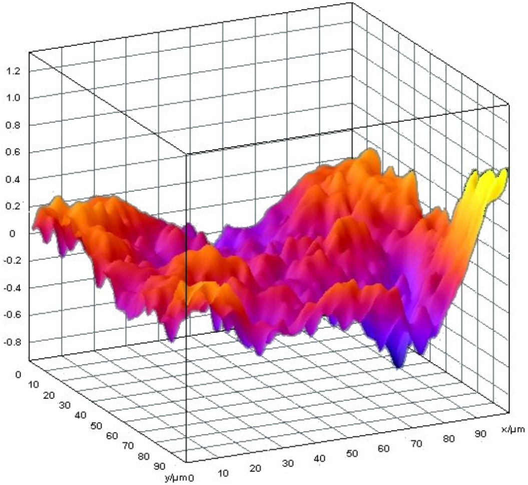
Graphe de $F : (x; y) \mapsto 4 - \left(\cos(x)^2 + \cos(y)^2\right)^2$ sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

V.1 – Fonctions de deux variables



Graphe de $F : (x;y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^4} & \text{si } (x;y)\neq(0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y)=(0;0) \end{cases}$ sur $[-5;5]\times[-5;5]$.

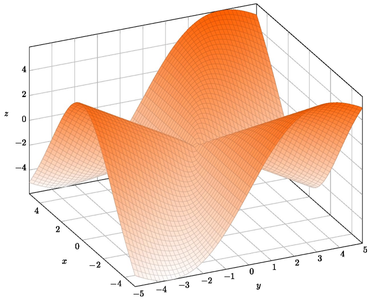
V.1 – Fonctions de deux variables



Surface d'une feuille de papier observée au microscope à force atomique.

V.1 – Fonctions de deux variables

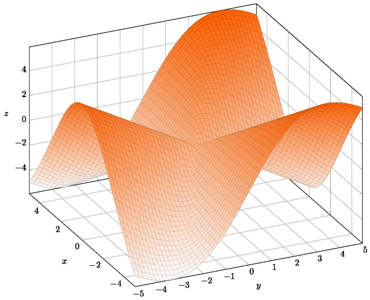
En un point du graphe de $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, il n'y a pas une seule pente, mais une pente dans chaque direction.



V.1 – Fonctions de deux variables

En un point du graphe de $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, il n'y a pas une seule pente, mais une pente dans chaque direction.

Autour de $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$, les variations de F ne sont pas décrites par un nombre, mais par une fonction $D_{(x_0;y_0)}F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, qui à chaque direction associe une pente.



Définition (différentielle)

La fonction $D_{(x_0;y_0)}F$ est appelée la **différentielle de F en** $(x_0; y_0)$.

On va voir comment expliciter et calculer $D_{(x_0;y_0)}F$.

V.1 – Fonctions de deux variables

De même qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'a pas forcément de dérivée, une fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ n'a pas forcément de différentielle.

Définition (différentiabilité)

On dit que F est **différentiable en** $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$ si sa différentielle $D_{(x_0;y_0)}F$ en ce point est bien définie.

On dit que F est **différentiable** si elle est différentiable en tout point $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

Dans ce cours, on supposera toujours les fonctions différentiables.

On ne vous demandera pas de prouver qu'elles le sont.

V.2 – Fonctions partielles et dérivées partielles

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition (fonctions partielles)

Pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, on définit $F_{1;y_0} : x \mapsto F(x;y_0)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit $F_{2;x_0} : y \mapsto F(x_0;y)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Les fonctions de ce type sont appelées les **fonctions partielles de** F.

V.2 – Fonctions partielles et dérivées partielles

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition (fonctions partielles)

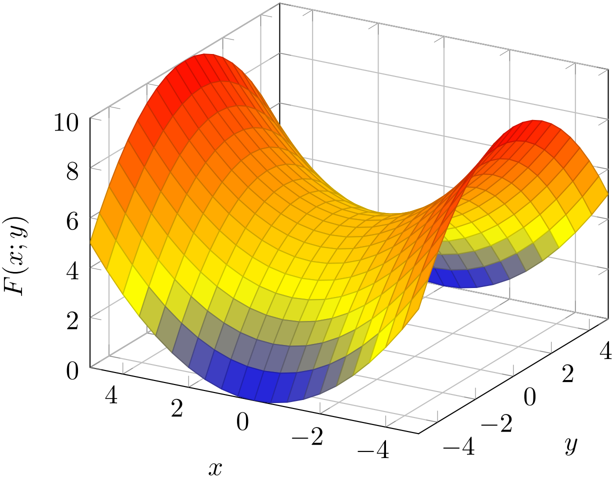
Pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, on définit $F_{1;y_0} : x \mapsto F(x; y_0)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit $F_{2;x_0} : y \mapsto F(x_0; y)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Les fonctions de ce type sont appelées les **fonctions partielles de** F.

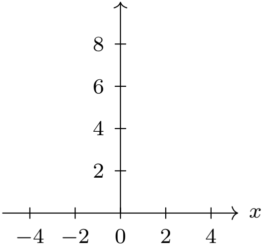
La fonction partielle $F_{1;y_0}$ est la composée de la fonction $x \mapsto (x; y_0)$, qui envoie $\mathbb{R}$ sur la droite d'ordonnée y_0 dans $\mathbb{R}^2$, et de F.

On y pense comme la restriction de F à cette droite d'ordonnée y_0 :

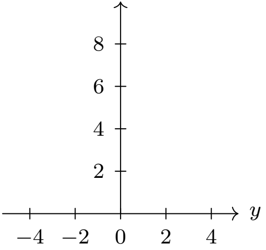
$$\{(x; y_0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

V.2 – Fonctions partielles et dérivées partielles



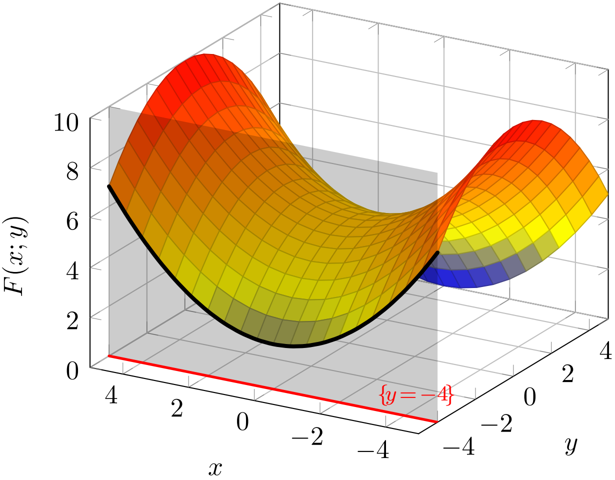


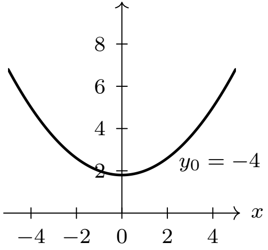
Graphe de $F_{1;y_0}$.



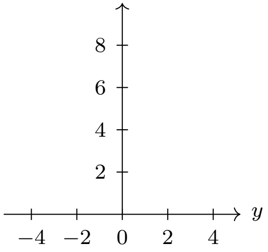
Graphe de $F_{2;x_0}$.

V.2 – Fonctions partielles et dérivées partielles



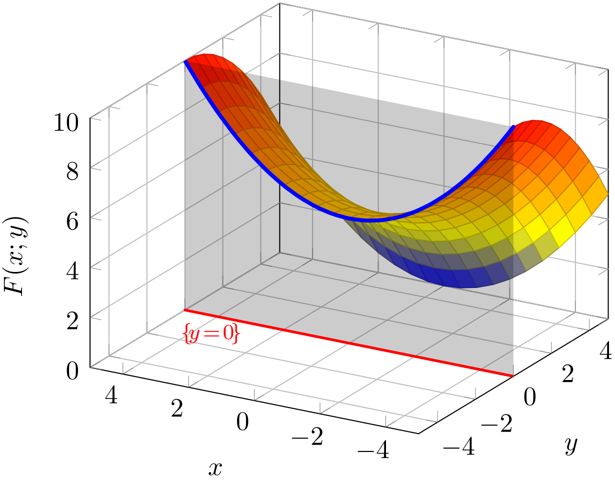


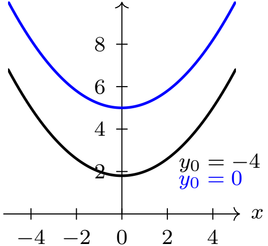
Graphe de $F_{1;y_0}$.



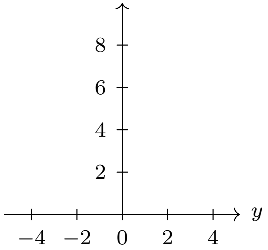
Graphe de $F_{2;x_0}$.

V.2 – Fonctions partielles et dérivées partielles



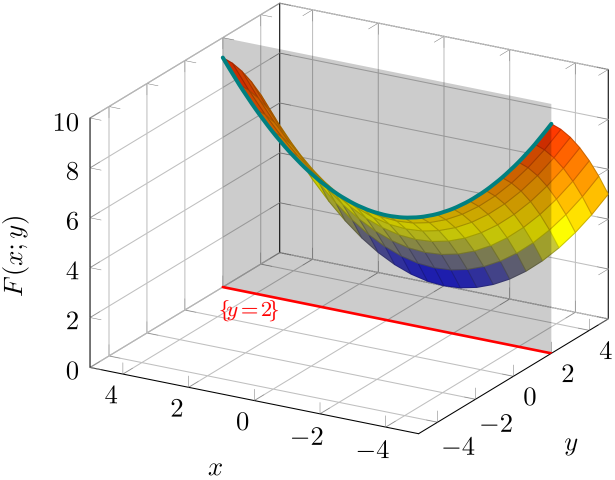


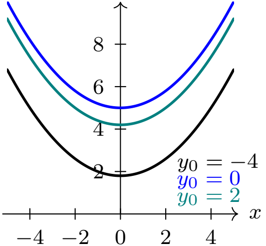
Graphe de $F_{1;y_0}$.



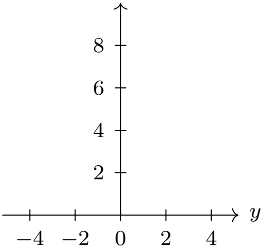
Graphe de $F_{2;x_0}$.

V.2 – Fonctions partielles et dérivées partielles



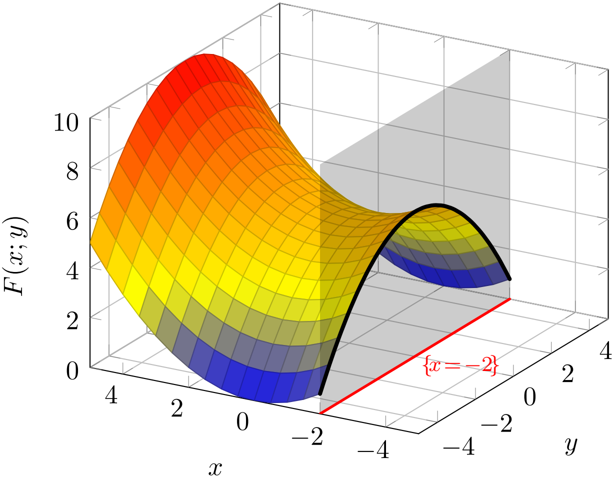


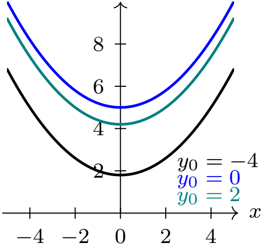
Graphe de $F_{1;y_0}$.



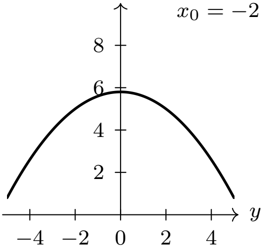
Graphe de $F_{2;x_0}$.

V.2 – Fonctions partielles et dérivées partielles



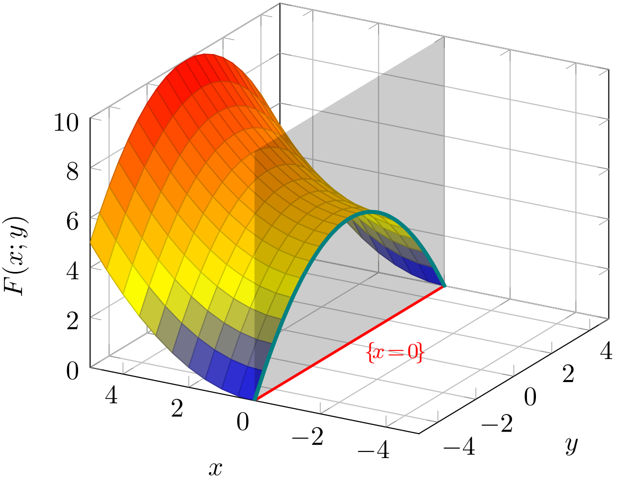


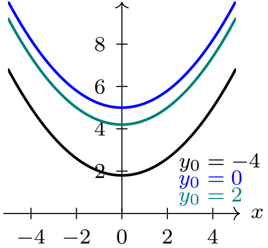
Graphe de $F_{1;y_0}$.



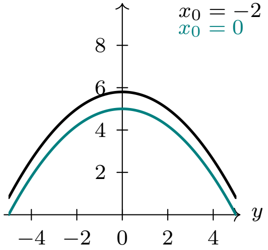
Graphe de $F_{2;x_0}$.

V.2 – Fonctions partielles et dérivées partielles



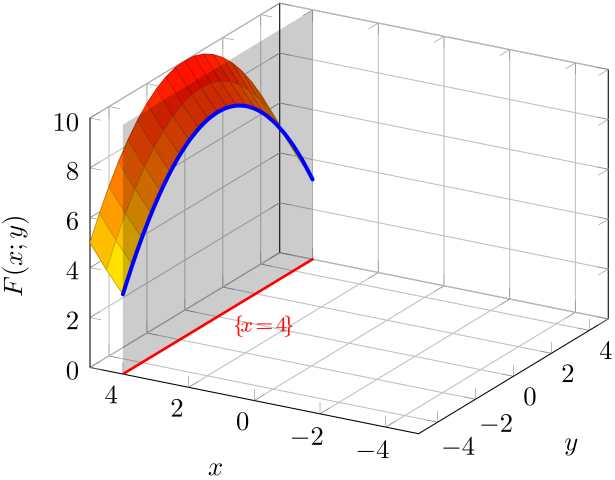


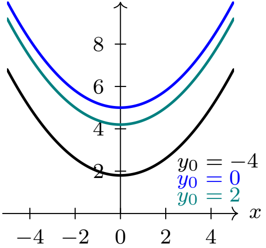
Graphe de $F_{1;y_0}$.



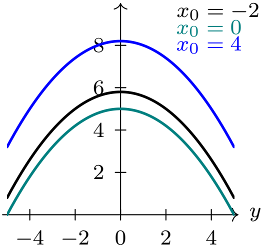
Graphe de $F_{2;x_0}$.

V.2 – Fonctions partielles et dérivées partielles





Graphe de $F_{1;y_0}$.



Graphe de $F_{2;x_0}$.

V.2 – Fonctions partielles et dérivées partielles

Si $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable en $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$ alors :

- $F_{1;y_0}$ est dérivable en x_0 ;
- $F_{2;x_0}$ est dérivable en y_0.

Définition (dérivées partielles en un point)

Dans ce cas, on définit les **dérivées partielles de F en** $(x_0; y_0)$ par :

- $\partial_1 F(x_0; y_0) = (F_{1;y_0})'(x_0)$ (par rapport à la $1^{\text{ère}}$ variable) ;
- $\partial_2 F(x_0; y_0) = (F_{2;x_0})'(y_0)$ (par rapport à la 2^{nde} variable).

Le réel $\partial_1 F(x_0; y_0)$ est la pente du graphe de F en $(x_0; y_0; F(x_0; y_0))$ dans la direction du premier axe de coordonnées.

De même, $\partial_2 F(x_0; y_0)$ est la pente dans la direction du second axe.

V.2 – Fonctions partielles et dérivées partielles

Définition (fonctions dérivées partielles)

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Ses **dérivées partielles** sont les fonctions $\partial_1 F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\partial_2 F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\partial_1 F : (x;y) \mapsto \partial_1 F(x;y) \qquad \text{et} \qquad \partial_2 F : (x;y) \mapsto \partial_2 F(x;y).$$

Notations alternatives

Pour $\partial_1 F$: $\frac{\partial F}{\partial x}$ ou $\partial_x F$ (dérivée partielle par rapport à x).

Pour $\partial_2 F$: $\frac{\partial F}{\partial y}$ ou $\partial_y F$ (dérivée partielle par rapport à y).

V.2 – Fonctions partielles et dérivées partielles

Lemme

Si $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est différentiable au point* $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$*, alors sa différentielle en ce point est la fonction :*

$$D_{(x_0;y_0)}F : (u;v) \longmapsto u \times \partial_1 F(x_0;y_0) + v \times \partial_2 F(x_0;y_0).$$

- Pour connaître les variations de F autour de $(x_0; y_0)$ dans toutes les directions, il suffit de les connaître dans les directions des axes.
- On vous demandera seulement de calculer les dérivées partielles de F, ce qui se fait en dérivant des fonctions d'une seule variable.

V.3 – Exemples de calculs

On considère $F : (x; y) \mapsto x^2 - y^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Calcul de $\partial_1 F(x_0; y_0)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F_{1;y_0}(x) = F(x; y_0) = x^2 - (y_0)^2$.

Donc $F_{1;y_0} : x \mapsto x^2 - (y_0)^2$ et $(F_{1;y_0})' : x \mapsto 2x$.

Donc $\partial_1 F(x_0; y_0) = (F_{1;y_0})'(x_0) = 2x_0$.

V.3 – Exemples de calculs

On considère $F : (x; y) \mapsto x^2 - y^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Calcul de $\partial_1 F(x_0; y_0)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F_{1;y_0}(x) = F(x; y_0) = x^2 - (y_0)^2$.

Donc $F_{1;y_0} : x \mapsto x^2 - (y_0)^2$ et $(F_{1;y_0})' : x \mapsto 2x$.

Donc $\partial_1 F(x_0; y_0) = (F_{1;y_0})'(x_0) = 2x_0$.

Calcul de $\partial_2 F(x_0; y_0)$

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $F_{2;x_0}(y) = F(x_0; y) = (x_0)^2 - y^2$.

Donc $F_{2;x_0} : y \mapsto (x_0)^2 - y^2$ et $(F_{2;x_0})' : y \mapsto -2y$.

Donc $\partial_2 F(x_0; y_0) = (F_{2;x_0})'(y_0) = -2y_0$.

V.3 – Exemples de calculs

On considère toujours $F : (x; y) \mapsto x^2 - y^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Pour calculer $\partial_1 F$ efficacement, on dérive l'expression de $F(x; y)$ par rapport à x en pensant y comme une constante.

Si $y \in \mathbb{R}$ est fixé et on dérive $x \mapsto x^2 - y^2$, on obtient que

$$\partial_1 F : (x; y) \longmapsto 2x.$$

De même, si $x \in \mathbb{R}$ est fixé et on dérive $y \mapsto x^2 - y^2$, on obtient que

$$\partial_2 F : (x; y) \longmapsto -2y.$$

V.3 – Exemples de calculs

Soit $F : (x;y) \mapsto y + e^{-x}y^5$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Si $y \in \mathbb{R}$ est fixé, en dérivant $x \mapsto y + e^{-x}y^5$, on obtient que

$$\partial_1 F : (x;y) \longmapsto -e^{-x}y^5.$$

Si $x \in \mathbb{R}$ est fixé, en dérivant $y \mapsto y + e^{-x}y^5$, on obtient que

$$\partial_2 F : (x;y) \longmapsto 1 + e^{-x} \times (5y^4).$$