Mathématiques 1 – L1 BECV

Thomas Letendre

thomas.letendre@univ-rennes.fr

Université de Rennes – Automne 2025

Introduction pédagogique

- 6 CM et 10 TD (parfois 2 la même semaine), voir ADE.
- 2 contrôles continus (calculatrices et documents interdits) :
  - CC1, le 01/12 de 10h30 à 12h, sur les 4 premiers CM ;
  - CC2, le 13/01 de 14h à 16h, sur l'intégralité du cours.

$$\text{Note} = \max\left(\frac{\text{CC1} + \text{CC2}}{2} ; \text{CC2}\right).$$

- Contenu : les maths du lycée avec un point de vue du supérieur.
- Cours sur slides :
  - diaporama disponible en ligne sur la page Moodle du cours ;
  - trop rapide pour prendre des notes exhaustives.

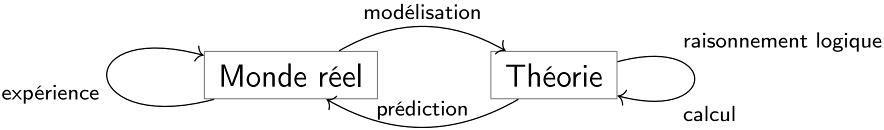
Attendus

On attend de vous que vous :

- connaissiez votre cours en arrivant en TD ;
- cherchiez les exercices qu'on vous donne d'un TD pour le suivant ;
- rédigiez vos réponses :
  - utiliser à bon escient le vocabulaire et les symboles mathématiques,
  - expliquer vos raisonnements par des phrases et des mots de liaison,
  - écrire et présenter vos copies de façon lisible.

Introduction scientifique

En science, on cherche à structurer les faits pour dégager du sens.



Les mathématiques fournissent un cadre abstrait pour ça :

- objets abstraits servant à modéliser le réel (nombre, fonction, etc.),
- syntaxe pour exprimer des faits complexes de façon concise,
- méthodes de démonstration et de calcul.

Objectifs

- Se familiariser avec les objets mathématiques de base.
- Savoir calculer avec, pas de démonstration.

Chapitre 1 : Fonctions usuelles

I – Ensembles

1. Ensembles de nombres
2. Ordre sur $\mathbb{R}$, valeur absolue, intervalles
3. Opérations sur les ensembles

I.1 – Ensembles de nombres

Définition (ensemble)

Un **ensemble** est une famille d'objets mathématiques du même type.

On décrit un ensemble en donnant la liste de ses éléments entre $\{\ \ \}$ (liste exhaustive, ou description, ou avec $\ldots$).

Exemples

- $\{0; 1\}$ est l'ensemble dont les deux seuls éléments sont 0 et 1.
- Ensemble des ingrédients des crêpes : $\{\text{farine}; \text{lait}; \text{oeuf}; \text{sucre}\}$.
- $\{\text{êtres humains}\}$ décrit un ensemble.

I.1 – Ensembles de nombres

Ensembles usuels de nombres

- Entiers **naturels** : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \ldots\}$.
- Entiers naturels non nuls : $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \ldots\} = \underbrace{\{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 0\}}$.

  "ensemble des entiers naturels n tels que n est différent de 0"
- Entiers **relatifs** : $\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.

I.1 – Ensembles de nombres

Ensembles usuels de nombres

- Entiers **naturels** : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$.
- Entiers naturels non nuls : $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\} = \underbrace{\{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 0\}}$.

  "ensemble des entiers naturels n tels que n est différent de 0"

- Entiers **relatifs** : $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$.
- Nombres **rationnels** : $\mathbb{Q} = \underbrace{\left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\}}$.

  "ensemble des nombres de la forme $\frac{m}{n}$ avec m dans $\mathbb{Z}$ et n dans $\mathbb{N}^*$"

- Nombres **réels** : $\mathbb{R} = \{$nombres ayant une écriture décimale$\}$.

Exemples : • $\frac{1}{3} = 0,33333\cdots \in \mathbb{Q}$; • $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

I.2 – Ordre sur $\mathbb{R}$, valeur absolue, intervalles

L'ensemble $\mathbb{R}$ est ordonné : on sait comparer deux nombres entre eux.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on note :

- $x \leqslant y$, si x est **inférieur ou égal** à y ;
- $x < y$, si x est **strictement inférieur** à y ;
- $x \geqslant y$, si x est **supérieur ou égal** à y ;
- $x > y$, si x est **strictement supérieur** à y.

I.2 – Ordre sur $\mathbb{R}$, valeur absolue, intervalles

L'ensemble $\mathbb{R}$ est ordonné : on sait comparer deux nombres entre eux.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on note :

- $x \leqslant y$, si x est **inférieur ou égal** à y ;
- $x < y$, si x est **strictement inférieur** à y ;
- $x \geqslant y$, si x est **supérieur ou égal** à y ;
- $x > y$, si x est **strictement supérieur** à y.

Définition (valeur absolue)

Soit $x \in \mathbb{R}$, sa **valeur absolue** est le nombre positif $|x|$ défini par :

$$|x| = x, \quad \text{si } x \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad |x| = -x, \quad \text{si } x \leqslant 0.$$

Exemple : pour $x = -2$ on a $|-2| = -(-2) = 2$.

I.2 – Ordre sur $\mathbb{R}$, valeur absolue, intervalles

Comportement de $<$ vis-à-vis des opérations

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $x + t < y + t$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > 0$, on a : $ax < ay$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que $a < 0$, on a : $ax > ay$.

I.2 – Ordre sur $\mathbb{R}$, valeur absolue, intervalles

Comportement de $<$ vis-à-vis des opérations

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $x + t < y + t$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > 0$, on a : $ax < ay$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que $a < 0$, on a : $ax > ay$.
- Si $x > 0$ alors $\frac{1}{x} > 0$. Si $x < 0$ alors $\frac{1}{x} < 0$.
- Si $x > 0$ alors $y > 0$ et $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.
- Si $y < 0$ alors $x < 0$ et $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

Attention : si $x < 0 < y$ alors $\frac{1}{x} < 0 < \frac{1}{y}$.

I.2 – Ordre sur $\mathbb{R}$, valeur absolue, intervalles

Soient a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$, on définit les ensembles suivants :

- $[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;
- $]a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$;
- $[a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$;
- $]a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

Similairement, on définit :

- $[a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$;
- $]-\infty;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$;
- $]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$;
- $]-\infty;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$.

I.2 – Ordre sur $\mathbb{R}$, valeur absolue, intervalles

Soient a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$, on définit les ensembles suivants :

- $[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;
- $]a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$;
- $[a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$;
- $]a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

Similairement, on définit :

- $[a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$;
- $]-\infty;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$;
- $]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$;
- $]-\infty;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$.

Définition (intervalle)

Les **intervalles** sont les parties de $\mathbb{R}$ de l'une des formes ci-dessus. On appelle a et b les **bornes** de l'intervalle. Une borne est dite **fermée** si elle appartient à l'intervalle et **ouverte** sinon.

I.2 – Ordre sur $\mathbb{R}$, valeur absolue, intervalles

On utilise souvent les notations suivantes :

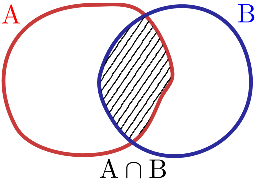
- $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$;
- $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$;
- $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.
- $\mathbb{R}_- =]-\infty; 0]$;
- $\mathbb{R}_-^* =]-\infty; 0[$;

Attention : $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

I.3 – Opérations sur les ensembles

Si A et B sont deux ensembles, on définit leur :

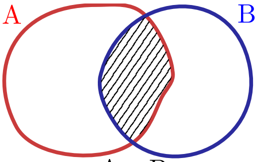
- **intersection** : $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$, *("$A$ inter B")*
  exemple : $[-1;1[\cap [0;2] = [0;1[$;



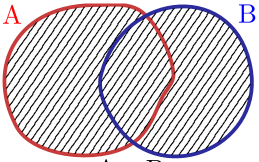
I.3 – Opérations sur les ensembles

Si A et B sont deux ensembles, on définit leur :

- **intersection** : $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$, *("$A$ inter B")*
  exemple : $[-1;1[\, \cap [0;2] = [0;1[\,$;
- **réunion** : $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$, *("$A$ union B")*
  exemple : $\mathbb{R}^* = \,]-\infty;0[\, \cup \,]0;+\infty[\,$;



$A \cap B$

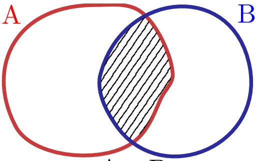


$A \cup B$

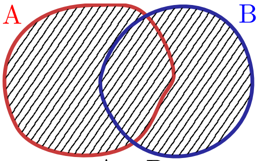
I.3 – Opérations sur les ensembles

Si A et B sont deux ensembles, on définit leur :

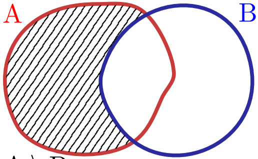
- **intersection** : $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$, *("$A$ inter B")*
  exemple : $[-1; 1[\, \cap [0; 2] = [0; 1[\,$;
- **réunion** : $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$, *("$A$ union B")*
  exemple : $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\, \cup\,]0; +\infty[\,$;
- **différence** : $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$, *("$A$ privé de B")*
  exemples : $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



$A \cap B$



$A \cup B$



$A \setminus B$

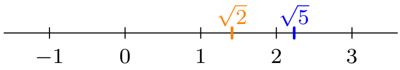
I.3 – Opérations sur les ensembles

Définition (produit cartésien)

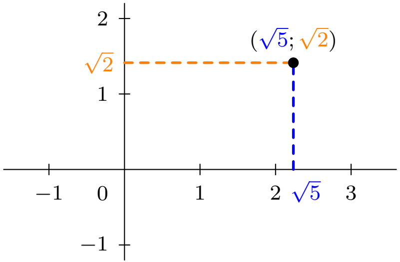
Le **produit cartésien** de deux ensembles A et B est :

$$A \times B = \{(a;b) \mid a \in A, b \in B\}, \qquad \textit{("A croix B")}.$$

Exemple : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x;y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$.



(a) On représente $\mathbb{R}$ par une droite,



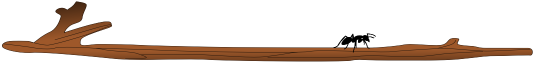
(b) et $\mathbb{R}^2$ par un plan.

II – Notion de fonction

II.1 – Premiers exemples

Exemple 1.a : la position en *fonction* du temps (dimension 1).

On observe une fourmi se déplaçant le long d'une branche.



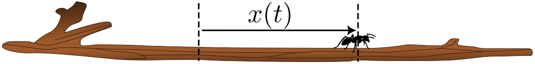
Pour exploiter ces observations, on les représente par des nombres via des choix d'origines et d'unités de mesure du temps et de l'espace :

- temps en secondes dans un intervalle d'observation $[0; T]$;
- distance "algébrique" à un point de référence, en mètres.

II.1 – Premiers exemples

Exemple 1.a : la position en *fonction* du temps (dimension 1).

On observe une fourmi se déplaçant le long d'une branche.



Situation à l'instant t

Pour exploiter ces observations, on les représente par des nombres via des choix d'origines et d'unités de mesure du temps et de l'espace :

- temps en secondes dans un intervalle d'observation $[0;T]$;
- distance "algébrique" à un point de référence, en mètres.

À chaque nombre $t \in [0;T]$ on associe un nombre $x(t) \in \mathbb{R}$ encodant la position à l'instant t. Ça définit une fonction de $[0;T]$ dans $\mathbb{R}$.

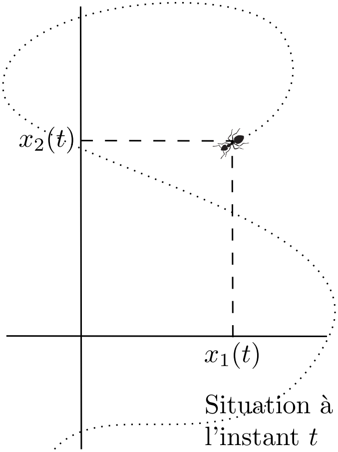
II.1 – Premiers exemples

Exemple 1.b : la position en *fonction* du temps (dimension 2).

Ici, la fourmi se déplace sur une table.

En choisissant un repère, la position à chaque instant $t \in [0; T]$ est encodée par un couple de nombres $(x_1(t); x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$.

Ça définit une fonction de $[0; T]$ dans $\mathbb{R}^2$.

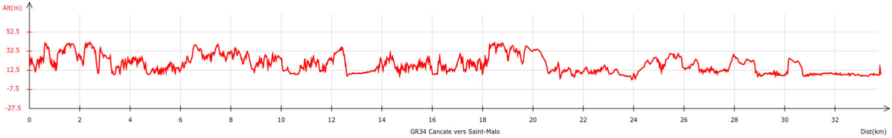


II.1 – Premiers exemples

Exemple 2.a : l'altitude en *fonction* de la position (dimension 1).

Le long d'un sentier, on repère la position par un nombre $x \in [0; L]$, encodant la distance parcourue depuis le point de départ.

À chaque $x \in [0; L]$, on associe $z(x) \in \mathbb{R}_+$, encodant l'altitude au point de paramètre x.



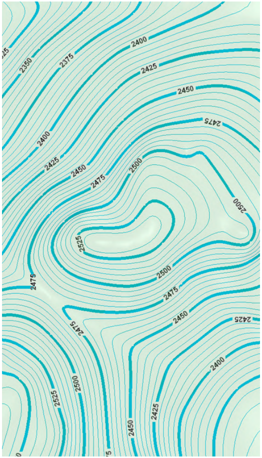
Ça définit une fonction de $[0; L]$ dans $\mathbb{R}_+$.

II.1 – Premiers exemples

Exemple 2.b : l'altitude en *fonction* de la position (dimension 2).

Sur une carte, chaque point peut être repéré par ses coordonnées : un couple $(x_1 ; x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Les points de la carte correspondent aux couples dans un certain ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$.



II.1 – Premiers exemples

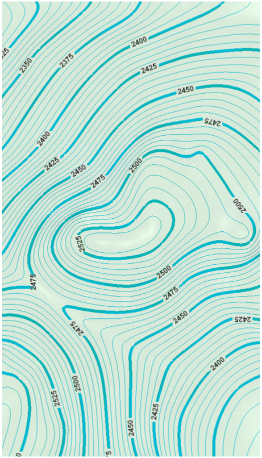
Exemple 2.b : l'altitude en *fonction* de la position (dimension 2).

Sur une carte, chaque point peut être repéré par ses coordonnées : un couple $(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Les points de la carte correspondent aux couples dans un certain ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$.

À chaque $(x_1; x_2) \in D$ on associe $Z(x_1; x_2) \in \mathbb{R}_+$, encodant l'altitude au point correspondant.

Ça définit une fonction de D dans $\mathbb{R}_+$.



II.1 – Premiers exemples

Exemple 3 : le volume en *fonction* du temps.

On observe le volume d'eau dans une baignoire qui se remplit.

De nouveau, on encode ces observations par des nombres :

- temps en secondes dans l'intervalle $[0; T]$;
- volume en litres dans l'intervalle $[0; V]$.

II.1 – Premiers exemples

Exemple 3 : le volume en *fonction* du temps.

On observe le volume d'eau dans une baignoire qui se remplit.

De nouveau, on encode ces observations par des nombres :

- temps en secondes dans l'intervalle $[0; T]$;
- volume en litres dans l'intervalle $[0; V]$.

À chaque $t \in [0; T]$, on associe $v(t) \in [0; V]$ qui encode le volume d'eau présent à l'instant t.

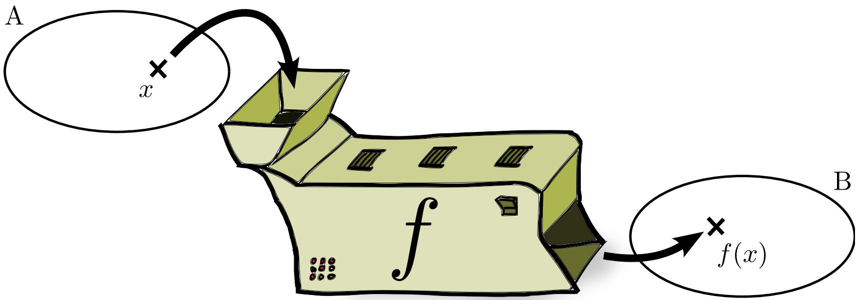
Ça définit une fonction de $[0; T]$ dans $[0; V]$.

II.2 – Fonctions et graphes

Définition (fonction)

Soient A et B deux ensembles.

- Une **fonction** f de A dans B est une façon d'associer à chaque $x \in A$ un unique élément $f(x) \in B$, appelé son **image** par f.
- A est le **domaine de définition** et B l'**ensemble d'arrivée** de f.



II.2 – Fonctions et graphes

On note $\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ pour *"la fonction f de A dans B qui à x associe $f(x)$".*

Définition

- On dit que $x \in A$ est un **antécédent** de $y \in B$ par f si $f(x) = y$.
- L'**ensemble image** de f est

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in B \mid \text{il existe } x \in A \text{ tel que } f(x) = y\}.$$

II.2 – Fonctions et graphes

On note $\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ pour *"la fonction f de A dans B qui à x associe $f(x)$".*

Définition

- On dit que $x \in A$ est un **antécédent** de $y \in B$ par f si $f(x) = y$.
- L'**ensemble image** de f est

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in B \mid \text{il existe } x \in A \text{ tel que } f(x) = y\}.$$

Chaque $y \in B$ peut n'avoir aucun antécédent ou en avoir plusieurs.

Exemple

$$\begin{array}{rcl} f : \{\text{êtres humains}\} & \longrightarrow & \{\text{dates depuis } 1900\} \\ x & \longmapsto & \text{date de naissance de } x. \end{array}$$

II.2 – Fonctions et graphes

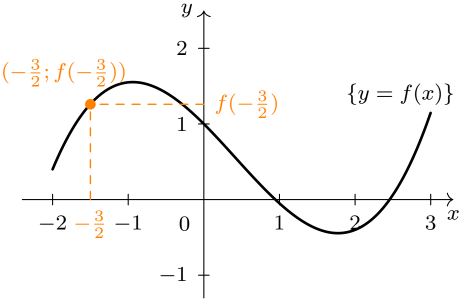
Définition (graphe)

Le **graphe** d'une fonction $f : A \to B$ est l'ensemble

$$\{(x; y) \in A \times B \mid y = f(x)\} = \{(x; f(x)) \mid x \in A\}.$$

Si A et B sont des intervalles, le graphe de f est une courbe dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple : $A = [-2; 3]$, $B = \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \frac{x^3}{5} - \frac{x^2}{4} - x + 1$.



II.3 – Fonctions réelles d'une variable réelle

Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur le même domaine A. Alors on peut définir les fonctions suivantes sur A :

$$\begin{aligned} f+g : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)+g(x) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} f\,g : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)\,g(x). \end{aligned}$$

Si de plus, pour tout $x \in A$, $g(x) \neq 0$, alors on peut aussi définir :

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

II.3 – Fonctions réelles d'une variable réelle

Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ (par exemple des intervalles), certaines fonctions de A dans B sont définies par une formule.

Dans ce cas, on omet parfois de préciser le domaine de définition. Cela sous-entend que la fonction est définie sur l'ensemble des réels pour lesquels la formule a du sens.

Exemples

- La fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{5} - \frac{x^2}{4} - x + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ entier.
- La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

II.3 – Fonctions réelles d'une variable réelle

$f(x)$ n'est pas une fonction !

$f(x)$ n'est pas une fonction !

Si $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction, $f(x)$ est un nombre réel. C'est l'image du nombre $x \in A$ par la fonction f.

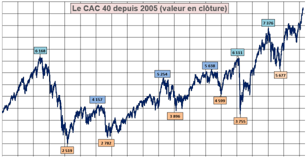
On peut définir f par une formule comme suit :

- "la fonction f telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{5} - \frac{x^2}{4} - x + 1$",
- ou "la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{5} - \frac{x^2}{4} - x + 1$".

II.3 – Fonctions réelles d'une variable réelle

Mauvaise nouvelle

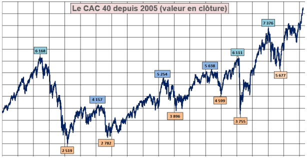
Pour l'immense majorité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ il n'existe pas de formule.



II.3 – Fonctions réelles d'une variable réelle

Mauvaise nouvelle ?

Pour l'immense majorité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ il n'existe pas de formule.



On sait étudier certaines fonctions sans formules, via leurs propriétés qualitatives (ex : la monotonie). Ce n'est pas l'objet de ce cours...

Définition (croissance et décroissance)

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est :

- **croissante** si pour tout x et $y \in A$ t.q. $x < y$ on a $f(x) \leqslant f(y)$,
- **décroissante** si pour tout x et $y \in A$ t.q. $x < y$ on a $f(x) \geqslant f(y)$.

II.3 – Fonctions réelles d'une variable réelle

Bonne nouvelle

Dans les modèles scientifiques, les fonctions ont souvent des formules.
Elles s'expriment à partir d'un petit nombre de fonctions élémentaires par somme, produit, etc.

II.3 – Fonctions réelles d'une variable réelle

Bonne nouvelle ?

Dans les modèles scientifiques, les fonctions ont souvent des formules.
Elles s'expriment à partir d'un petit nombre de fonctions élémentaires par somme, produit, etc.

Il faut connaitre et savoir manipuler les fonctions élémentaires.
C'est l'objet de ce cours…

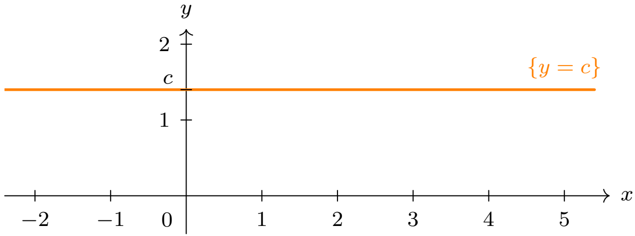
III – Fonctions affines et valeur absolue

1. Fonctions constantes
2. Fonctions linéaires
3. Fonctions affines
4. Valeur absolue

III.1 – Fonctions constantes

Soit $c \in \mathbb{R}$ fixé, alors $x \mapsto c$ définit une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Son graphe est la droite horizontale d'ordonnée c.



Définition (fonction constante)

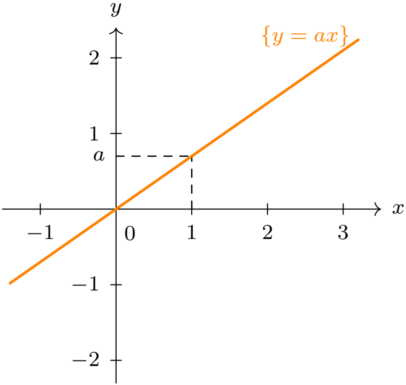
Les fonctions **constantes** sont celles de la forme $x \mapsto c$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Pour $c = 0$, la fonction $x \mapsto 0$ est appelée la **fonction nulle**.

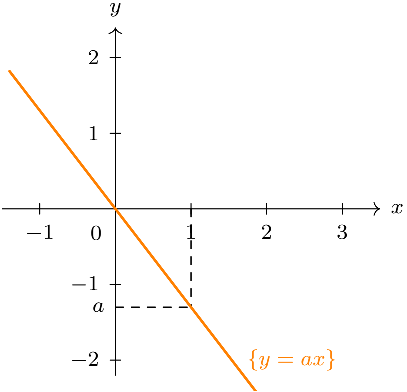
III.2 – Fonctions linéaires

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé, alors $x \mapsto ax$ définit une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Son graphe est la droite passant par $(0;0)$ et $(1;a)$.



(a) Cas $a > 0$.



(b) Cas $a < 0$.

III.2 – Fonctions linéaires

Définition (fonction linéaire)

Les fonctions **linéaires** sont celles de la forme $f : x \mapsto ax$, où $a \in \mathbb{R}$.

Le nombre a est appelé le **coefficient directeur** ou la **pente** de f.

Pour $a = 1$, la fonction $x \mapsto x$ est appelée la **fonction identité**.

$$\text{La fonction } f : x \mapsto ax \text{ est } \begin{cases} \text{strictement croissante,} & \text{si } a > 0; \\ \text{nulle,} & \text{si } a = 0; \\ \text{strictement décroissante,} & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

III.2 – Fonctions linéaires

Les fonctions linéaires expriment une relation de proportionnalité :

si $f : x \mapsto ax$, alors la quantité $f(x) = ax$ est **proportionnelle** à x avec un **coefficient de proportionnalité** de a.

Exemple (les achats au kilo ou au litre)

Si on remplit son réservoir avec un volume $v_0 = 35L$ d'essence au prix de $a = 1,8€/L$, le prix total est : $\quad p(v_0) = av_0 = 63€$.

Le prix p est une fonction linéaire du volume v, $\qquad p : v \mapsto av$.

III.2 – Fonctions linéaires

Les fonctions linéaires expriment une relation de proportionnalité :

si $f : x \mapsto ax$, alors la quantité $f(x) = ax$ est **proportionnelle** à x avec un **coefficient de proportionnalité** de a.

Exemple (les achats au kilo ou au litre)

Si on remplit son réservoir avec un volume $v_0 = 35L$ d'essence au prix de $a = 1,8€/L$, le prix total est : $\quad p(v_0) = av_0 = 63€$.

Le prix p est une fonction linéaire du volume v, $\qquad p : v \mapsto av$.

Remarque : mathématiquement, la fonction p a du sens sur $\mathbb{R}$ entier ; mais elle n'a de lien avec le monde réel qu'en restriction à $\mathbb{R}_+$.

III.2 – Fonctions linéaires

La fonction $f : x \mapsto ax$ est déterminée par sa valeur en un $x_0 \in \mathbb{R}^*$ fixé.

Comme $f(x_0) = ax_0$ et $x_0 \neq 0$, on a $a = \frac{f(x_0)}{x_0}$ et donc $f : x \mapsto \frac{f(x_0)}{x_0} x$.

Lemme ("règle de 3" ou "produit en croix")

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction linéaire et $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \frac{x}{x_0} f(x_0)$.

III.2 – Fonctions linéaires

La fonction $f : x \mapsto ax$ est déterminée par sa valeur en un $x_0 \in \mathbb{R}^*$ fixé.

Comme $f(x_0) = ax_0$ et $x_0 \neq 0$, on a $a = \frac{f(x_0)}{x_0}$ et donc $f : x \mapsto \frac{f(x_0)}{x_0} x$.

Lemme ("règle de 3" ou "produit en croix")

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction linéaire et $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \frac{x}{x_0} f(x_0)$.

Exemple

Si on paie $p(v_0) = 63€$ pour $v_0 = 35L$ d'essence, alors pour $v = 20L$ d'essence on aurait payé $p(v) = \frac{v}{v_0} p(v_0) = 36€$.

Par ailleurs, on sait retrouver le prix au litre, qui est $\frac{p(v_0)}{v_0} = 1,8€/L$.

III.2 – Fonctions linéaires

Cas pratique : donne comme Bernard

- En 2023, Bernard choisit de donner $10.000.000$€ aux .
  Il peut, avec sa fortune de $200.000.000.000$€.

- Inspiré·e, Camille, étudiant·e boursier·e, décide de donner aussi, mais en *proportion* de ses moyens : 600€ au début du mois.

III.2 – Fonctions linéaires

Cas pratique : donne comme Bernard

- En 2023, Bernard choisit de donner $\overbrace{10.000.000€}^{=f(x_0)}$ aux .
  Il peut, avec sa fortune de $\underbrace{200.000.000.000€}_{=x_0}$.
- Inspiré·e, Camille, étudiant·e boursier·e, décide de donner aussi, mais en $\underbrace{\textit{proportion}}_{f:x\mapsto ax}$ de ses moyens : $\underbrace{600€}_{=x}$ au début du mois.

III.2 – Fonctions linéaires

Cas pratique : donne comme Bernard

- En 2023, Bernard choisit de donner $\overbrace{10.000.000€}^{=f(x_0)}$ aux .
  Il peut, avec sa fortune de $\underbrace{200.000.000.000€}_{=x_0}$.
- Inspiré·e, Camille, étudiant·e boursier·e, décide de donner aussi, mais en $\underbrace{\textit{proportion}}_{f:x\mapsto ax}$ de ses moyens : $\underbrace{600€}_{=x}$ au début du mois.
- Camille devrait donc donner $f(x) = \frac{x}{x_0} f(x_0) = 0,03€$.

III.2 – Fonctions linéaires

Cas pratique : donne comme Bernard

- En 2023, Bernard choisit de donner $\overbrace{10.000.000€}^{=f(x_0)}$ aux LES RESTAURANTS DU COEUR.
  Il peut, avec sa fortune de $\underbrace{200.000.000.000€}_{=x_0}$.
- Inspiré·e, Camille, étudiant·e boursier·e, décide de donner aussi, mais en $\underbrace{\textit{proportion}}_{f:x\mapsto ax}$ de ses moyens : $\underbrace{600€}_{=x}$ au début du mois.
- Camille devrait donc donner $f(x) = \frac{x}{x_0} f(x_0) = 0,03€$.
- Camille donne finalement $1€$. C'est l'équivalent de $333.333.333€$ pour Bernard, soit plus que le budget annuel des LES RESTAURANTS DU COEUR.

III.3 – Fonctions affines

Définition (fonction affine)

Les fonctions **affines** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $f : x \mapsto ax + b$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ sont fixés.

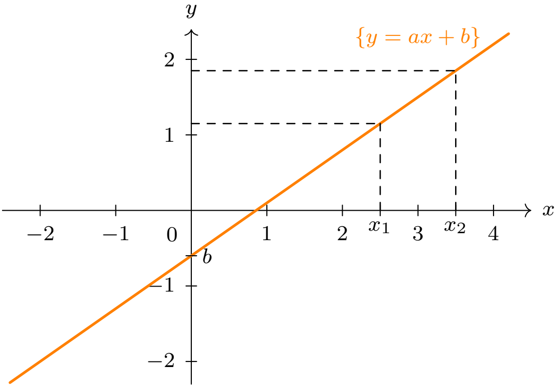
- a est le **coefficient directeur** ou la **pente** de f.
- b est l'**ordonnée à l'origine** de f.

$$\text{La fonction } f \text{ est } \begin{cases} \text{strictement croissante,} & \text{si } a > 0; \\ \text{constante égale à } b, & \text{si } a = 0; \\ \text{strictement décroissante,} & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Si $b = 0$, alors f est la fonction linéaire de pente a.

III.3 – Fonctions affines

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, le graphe de $f : x \mapsto ax + b$ est la droite de pente a passant par $(0; b)$.



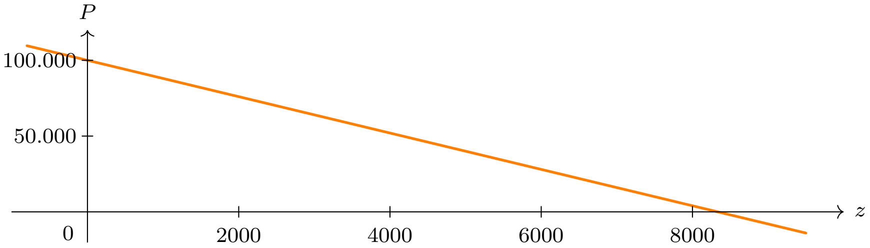
On peut retrouver a et b à partir de valeurs de f :

- on a $b = f(0)$;
- si $x_1 \neq x_2$, alors $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

III.3 – Fonctions affines

Un modèle simple de l'atmosphère exprime la pression $P(z)$ (en Pa) à l'altitude z (en m) par la fonction affine $P : z \mapsto P_0 - \rho g z$, où

- $P_0 = 100.000\,Pa$ est la pression au niveau de la mer,
- $\rho = 1,2\,kg/m^3$ est la masse volumique de l'air,
- $g = 10\,m/s^2$ est l'accélération de pesanteur.



III.3 – Fonctions affines

Lemme

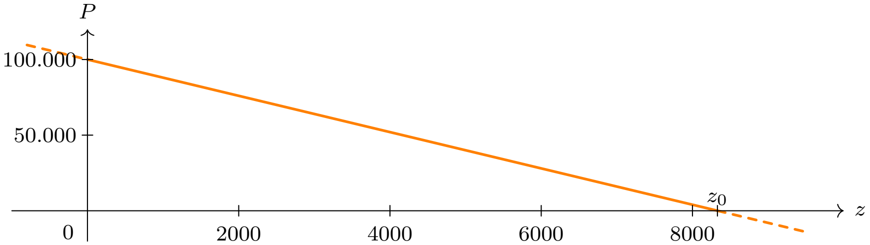
Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ *et la fonction affine* $f : x \mapsto ax + b$. *Si* $a \neq 0$, *alors il existe un unique* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x_0) = 0$, *et c'est* $x_0 = -\frac{b}{a}$.

III.3 – Fonctions affines

Lemme

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$. Si $a \neq 0$, alors il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$, et c'est $x_0 = -\frac{b}{a}$.

Exemple : Pour le modèle précédent, la pression $P : z \mapsto \overbrace{P_0}^{=b} \overbrace{-\rho g}^{=a} z$ s'annule uniquement à l'altitude $z_0 = \frac{P_0}{\rho g} \simeq 8333m$.



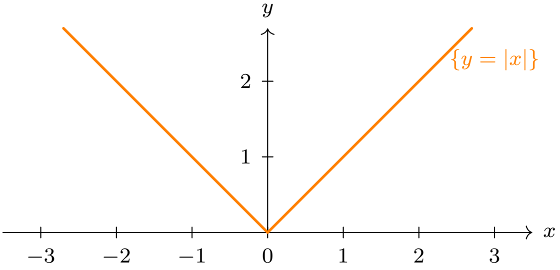
III.4 – Valeur absolue

Définition (valeur absolue)

La fonction **valeur absolue** est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

C'est un exemple de fonction qui n'est pas affine, car pas monotone.



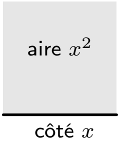
IV – Polynômes et fonctions puissances

IV.1 – Puissances entières positives

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle **carré** de x le nombre positif $x^2 = x \times x$.

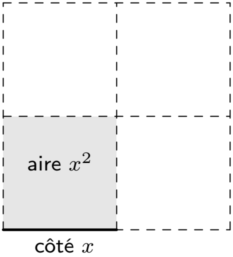
Soit $x > 0$, alors x^2 est l'aire (en m^2) du carré de côté x (en m).



IV.1 – Puissances entières positives

Définition

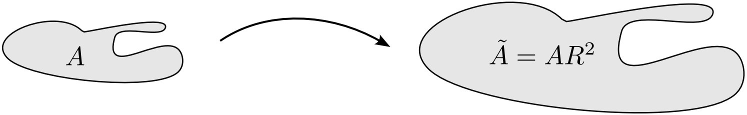
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle **carré** de x le nombre positif $x^2 = x \times x$.



Soit $x > 0$, alors x^2 est l'aire (en m^2) du carré de côté x (en m).

Dilatation de rapport $R > 0$

Si l'ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ est d'aire A et $\widetilde{D}$ est obtenu à partir de D en multipliant toutes les longueurs par R, alors $\widetilde{D}$ est d'aire $\widetilde{A} = AR^2$.

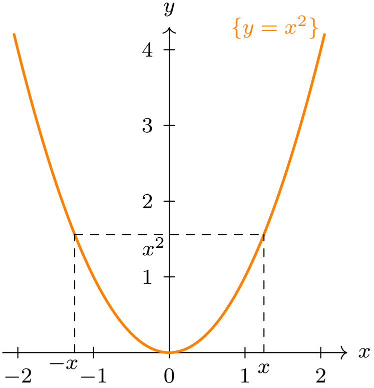


IV.1 – Puissances entières positives

Définition (fonction carré)

La **fonction carré** est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^2$.

Son graphe est une **parabole**.



La fonction carré est :

- strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$;
- strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Soient x et $y \in \mathbb{R}$, on a :

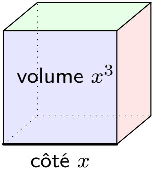
- $(-x)^2 = x^2 = |x|^2 \geqslant 0$;
- si $y^2 = x^2$ alors $y = -x$ ou $y = x$.

IV.1 – Puissances entières positives

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle **cube** de x le nombre réel $x^3 = x \times x \times x$.

Si $x > 0$, alors x^3 est le volume (en m^3) du cube de côté x (en m).

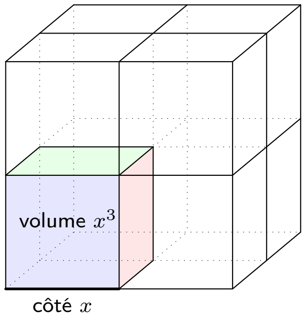


IV.1 – Puissances entières positives

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle **cube** de x le nombre réel $x^3 = x \times x \times x$.

Si $x > 0$, alors x^3 est le volume (en m^3) du cube de côté x (en m).



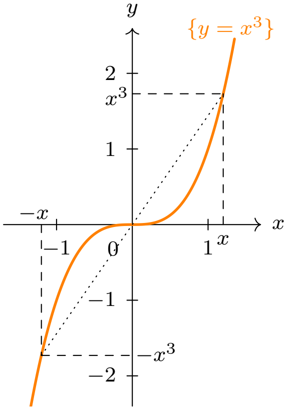
Dilatation de rapport $R > 0$

Si $D \subset \mathbb{R}^3$ est de volume V, l'ensemble $\widetilde{D}$ obtenu à partir de D en multipliant toutes les longueurs par R est de volume $\widetilde{V} = VR^3$.

IV.1 – Puissances entières positives

Définition (fonction cube)

La **fonction cube** est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^3$.



La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(-x)^3 = -x^3$.

IV.1 – Puissances entières positives

Définition (parité d'une fonction)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f est :

- **paire** si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$
  (le graphe de f a une symétrie axiale par rapport à l'axe vertical) ;
- **impaire** si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$
  (le graphe de f a une symétrie centrale par rapport à l'origine).

Exemples

- Les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto x^2$ sont paires.
- Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^3$ sont impaires.

IV.1 – Puissances entières positives

Définition (puissance n-ième)

Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit $x^0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$.

Exemples :

- $2^3 = 8$;
- $2^4 = 16$;
- $10^2 = 100$;
- $10^4 = 10000$;
- $10^n = 1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ zéros}}$.

IV.1 – Puissances entières positives

Définition (puissance n-ième)

Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit $x^0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$.

Exemples :

- $2^3 = 8$;
- $2^4 = 16$;
- $10^2 = 100$;
- $10^4 = 10000$;
- $10^n = 1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ zéros}}$.

Manipulation des puissances

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, on a :

- $x^n y^n = (xy)^n$;
- $x^m x^n = x^{m+n}$;
- $(x^m)^n = x^{mn}$.

Exemple : $(3^2)^3 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) = 3^6$.

IV.1 – Puissances entières positives

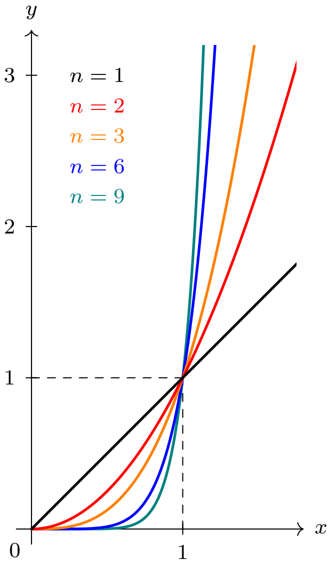
Définition (fonction puissance)

Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est appelée **puissance n-ième**.

Cette fonction est paire si n est pair ; elle est impaire si n est impair. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^n = (-1)^n x^n$.

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$,

- si $x \in \left]0, 1\right[$ alors $x^m > x^n$;
- si $x > 1$ alors $x^m < x^n$.



IV.2 – Polynômes

Soient $d \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ tels que $a_d \neq 0$, alors la fonction

$$P : x \longmapsto a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

est bien définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition (polynôme)

Les fonctions de cette forme sont appelées **polynômes** de **degré** d.
Les nombres $a_0, \ldots, a_d$ sont appelés les **coefficients** du polynôme.

Exemples :

- les polynômes de degré 0 sont les fonctions constantes non nulles,
- les polynômes de degré 1 sont les fonctions affines non constantes.

IV.2 – Polynômes

Définition (racine)

Soient P polynôme et $r \in \mathbb{R}$, on dit que r est **racine** de P si $P(r) = 0$.

Exemple : $r = 2$ est racine du polynôme $P : x \mapsto x^3 - 8$.

Lemme (factorisation)

Soient P polynôme de degré d et $r \in \mathbb{R}$ racine de P. Il existe Q, un polynôme de degré $d - 1$ t.q., pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - r)Q(x)$.

Exemple : il existe a, b et $c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\underbrace{x^3 - 8}_{P(x)} = (x - 2)(\underbrace{ax^2 + bx + c}_{Q(x)}).$$

IV.2 – Polynômes

Lemme (identification)

Soient P et $\widetilde{P}$ deux polynômes t.q., pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \widetilde{P}(x)$. Alors P et $\widetilde{P}$ ont les mêmes coefficients.

IV.2 – Polynômes

Lemme (identification)

Soient P et $\widetilde{P}$ deux polynômes t.q., pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \widetilde{P}(x)$.
Alors P et $\widetilde{P}$ ont les mêmes coefficients.

Application : en revenant à l'exemple précédent, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^3 - 8 = (x-2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c.$$

Par identification, $\begin{cases} a & = 1, \\ b - 2a & = 0, \\ c - 2b & = 0, \\ 2c & = 8. \end{cases}$ Donc, en résolvant, $\begin{cases} a & = 1, \\ b & = 2, \\ c & = 4. \end{cases}$

IV.3 – Cas particulier du degré 2

Mouvement de chute libre (sans frottement)

On lance verticalement un objet, soumis uniquement à son poids.

- t le temps (en s) écoulé depuis le lancer,
- $z(t)$ l'altitude (en m) de l'objet par rapport au sol à l'instant t.

IV.3 – Cas particulier du degré 2

Mouvement de chute libre (sans frottement)

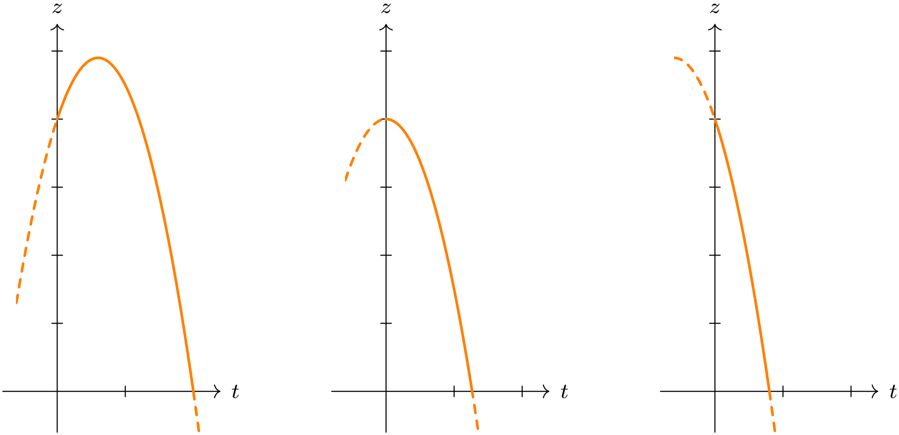
On lance verticalement un objet, soumis uniquement à son poids.

- t le temps (en s) écoulé depuis le lancer,
- $z(t)$ l'altitude (en m) de l'objet par rapport au sol à l'instant t.

Les lois de la mécanique disent que $z : t \mapsto -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0$, où

- $z_0 > 0$ est l'altitude initiale (en m),
- $v_0 \in \mathbb{R}$ est la vitesse initiale (en m/s),
- $g = 10\,m/s^2$ est l'accélération de pesanteur.

IV.3 – Cas particulier du degré 2



(a) Cas $v_0 > 0$. (b) Cas $v_0 = 0$. (c) Cas $v_0 < 0$.

Graphe de $t \mapsto z(t)$ pour un même z_0 et différentes valeurs de v_0.

IV.3 – Cas particulier du degré 2

Questions

- Au bout de combien de temps l'objet revient-il au sol ?
- Étant donné $h > 0$, l'objet atteint-il l'altitude h ?
  C'est-à-dire, existe-t-il un temps t tel que $z(t) = h$?
  Si oui est-il unique ? Peut-on le déterminer ?

Elles se ramènent à étudier les racines des polynômes de degré 2 $t \mapsto z(t)$ et $t \mapsto z(t) - h$ respectivement.

IV.3 – Cas particulier du degré 2

Soient a, b et $c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, et soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Définition (discriminant)

Le **discriminant** du polynôme P est le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Lemme (racines de P et forme factorisée)

- *Si $\Delta > 0$, alors P a deux racines réelles : $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.*
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$.

IV.3 – Cas particulier du degré 2

Soient a, b et $c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, et soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Définition (discriminant)

Le **discriminant** du polynôme P est le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Lemme (racines de P et forme factorisée)

- *Si $\Delta > 0$, alors P a deux racines réelles : $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.*
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$.
- *Si $\Delta = 0$, alors P a une unique racine réelle : $r_0 = -\frac{b}{2a}$.*
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P(x) = a(x - r_0)^2$.

IV.3 – Cas particulier du degré 2

Soient a, b et $c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, et soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Définition (discriminant)

Le **discriminant** du polynôme P est le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Lemme (racines de P et forme factorisée)

- *Si* $\Delta > 0$, *alors* P *a deux racines réelles :* $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, *on a* $P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$.
- *Si* $\Delta = 0$, *alors* P *a une unique racine réelle :* $r_0 = -\frac{b}{2a}$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, *on a* $P(x) = a(x - r_0)^2$.
- *Si* $\Delta < 0$, *alors* P *n'a pas de racine réelle.*
  P *ne se factorise pas comme produit de polynômes de degré* 1.

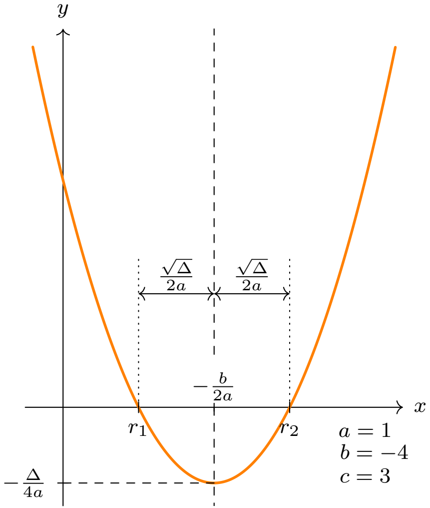
IV.3 – Cas particulier du degré 2

$P : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a > 0$.

Le graphe est une parabole.

Il présente une symétrie axiale par rapport à la droite $\{x = -\frac{b}{2a}\}$.

P atteint son minimum en $-\frac{b}{2a}$.
Ce minimum vaut $P(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$.



Cas $\Delta > 0$.

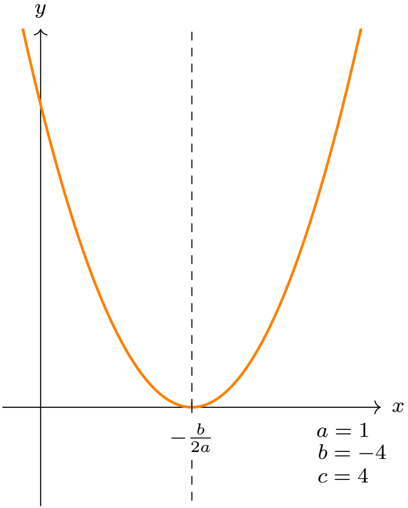
IV.3 – Cas particulier du degré 2

$P : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a > 0$.

Le graphe est une parabole.

Il présente une symétrie axiale par rapport à la droite $\{x = -\frac{b}{2a}\}$.

P atteint son minimum en $-\frac{b}{2a}$.
Ce minimum vaut $P(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$.



Cas $\Delta = 0$.

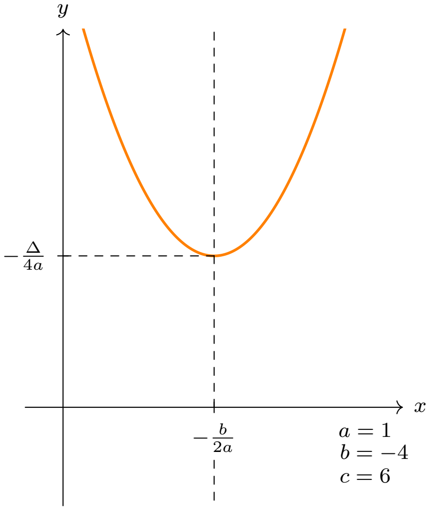
IV.3 – Cas particulier du degré 2

$P : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a > 0$.

Le graphe est une parabole.

Il présente une symétrie axiale par rapport à la droite $\{x = -\frac{b}{2a}\}$.

P atteint son minimum en $-\frac{b}{2a}$.
Ce minimum vaut $P(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$.



Cas $\Delta < 0$.

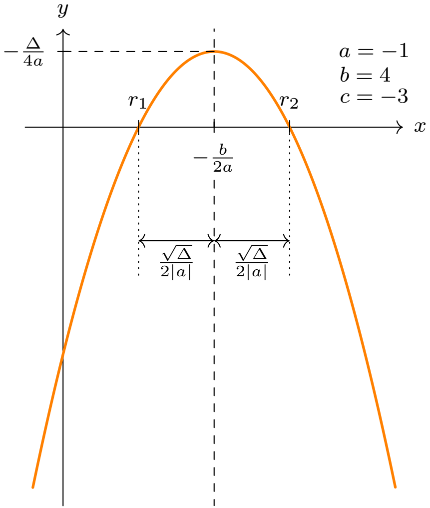
IV.3 – Cas particulier du degré 2

$P : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a < 0$.

Le graphe est une parabole.

Il présente une symétrie axiale par rapport à la droite $\{x = -\frac{b}{2a}\}$.

P atteint son maximum en $-\frac{b}{2a}$.
Ce maximum vaut $P(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$.



Cas $\Delta > 0$.

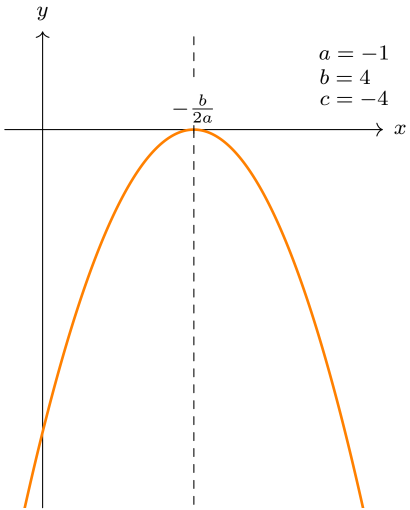
IV.3 – Cas particulier du degré 2

$P : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a < 0$.

Le graphe est une parabole.

Il présente une symétrie axiale par rapport à la droite $\{x = -\frac{b}{2a}\}$.

P atteint son maximum en $-\frac{b}{2a}$.
Ce maximum vaut $P(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$.



Cas $\Delta = 0$.

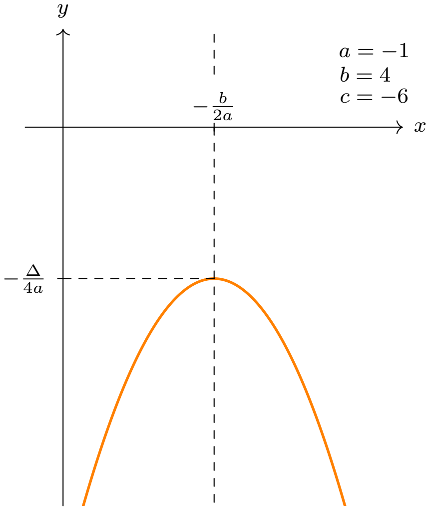
IV.3 – Cas particulier du degré 2

$P : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a < 0$.

Le graphe est une parabole.

Il présente une symétrie axiale par rapport à la droite $\{x = -\frac{b}{2a}\}$.

P atteint son maximum en $-\frac{b}{2a}$.
Ce maximum vaut $P(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$.



Cas $\Delta < 0$.

IV.3 – Cas particulier du degré 2

Dans le cas de la chute libre, $z : t \mapsto \underbrace{-\frac{1}{2}g}_{=a} t^2 + \underbrace{v_0}_{=b} t + \underbrace{z_0}_{=c}$.

- Comme $z_0 > 0$, on a $\Delta = v_0^2 + 2gz_0 > 0$, donc deux racines :

$$t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{\Delta}}{g} \qquad \text{et} \qquad t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{\Delta}}{g}.$$

- Ici, $t_1 < 0$ et $t_2 > 0$. Le temps de retour au sol est donc t_2.

Exemple

Pour $z_0 = 5\,m$ et $v_0 = 0\,m/s$ on obtient $t_2 = \frac{\sqrt{2gz_0}}{g} = 1\,s$.

IV.3 – Cas particulier du degré 2

Beaucoup de questions se ramènent à étudier les zéros d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (nombre, valeurs), c.-à-d. les $x \in [a, b]$ t.q. $f(x) = 0$.

- Dans la plupart des cas, on ne sait pas expliciter les solutions.
  Il n'y a pas de formule pour les racines des polynômes de degré 5.

IV.3 – Cas particulier du degré 2

Beaucoup de questions se ramènent à étudier les zéros d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (nombre, valeurs), c.-à-d. les $x \in [a, b]$ t.q. $f(x) = 0$.

- Dans la plupart des cas, on ne sait pas expliciter les solutions.
  Il n'y a pas de formule pour les racines des polynômes de degré 5.

- On peut étudier ces questions via les propriétés qualitatives de f.
  Thm. des valeurs intermédiaires : si f est continue, $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = 0$.

IV.3 – Cas particulier du degré 2

Beaucoup de questions se ramènent à étudier les zéros d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (nombre, valeurs), c.-à-d. les $x \in [a, b]$ t.q. $f(x) = 0$.

- Dans la plupart des cas, on ne sait pas expliciter les solutions. Il n'y a pas de formule pour les racines des polynômes de degré 5.
- On peut étudier ces questions via les propriétés qualitatives de f. Thm. des valeurs intermédiaires : si f est continue, $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors il existe $x \in \,]a, b[$ tel que $f(x) = 0$.
- On connait des algorithmes très efficaces pour calculer des valeurs approchées des zéros de f (si f est gentille).

IV.4 – Inverse et puissances entières négatives

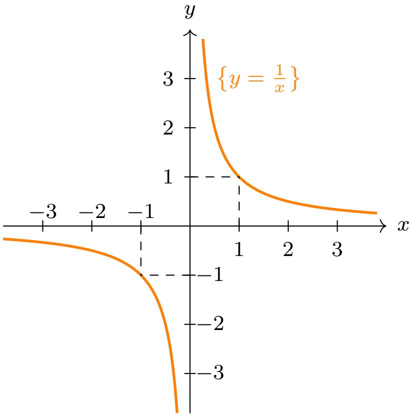
Définition (fonction inverse)

On appelle **fonction inverse** la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$.

La fonction inverse est impaire.

Elle décroit sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

Elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.



IV.4 – Inverse et puissances entières négatives

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\left(\frac{1}{x}\right)^n x^n = \left(\frac{1}{x}x\right)^n = 1$. Donc $\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$.

Définition (puissance $(-n)$-ième)

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$.

Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $y \in \mathbb{R}^*$, on a $\frac{x}{y} \times \frac{y}{x} = 1$. Donc $\frac{y}{x} = \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-1}$.

Exemples

- $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$;
- $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$;
- $25^{-1} = \frac{1}{25} = 0,04$;
- $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$;
- $10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0,\underbrace{00\ldots0}_{(n-1)\text{ zéros}}1$.

IV.4 – Inverse et puissances entières négatives

Manipulation des puissances possiblement négatives

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $y \in \mathbb{R}^*$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}$, on a :

- $x^n y^n = (xy)^n$;
- $x^m x^n = x^{m+n}$;
- $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$;
- $(x^m)^n = x^{mn}$.

Exemples :

- $2^{-4}5^{-4} = (2 \times 5)^{-4} = 10^{-4}$;
- $(10^{-3})^2 = 10^{-6} = (100)^{-3}$;
- $\frac{5^7}{5^5} = 5^2 = 25$;
- $\frac{5^5}{5^7} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$.

IV.4 – Inverse et puissances entières négatives

Définition (fonction puissance négative)

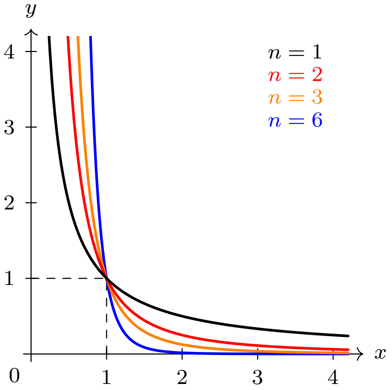
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^{-n}$ est bien définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$.

Elle est appelée **fonction puissance** $(-n)$**-ième**.

Cette fonction est paire si n est pair.

Elle est impaire si n est impair.

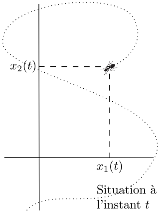
Sur $]0;+\infty[$, elle est décroissante et à valeurs positives.



V – Fonctions composées

V.1 – Composition de fonctions

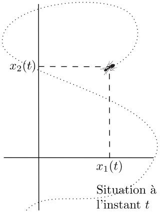
En randonnée, un GPS enregistre la position en fonction du temps : à tout instant t, on associe deux nombres $(x_1(t); x_2(t))$ dans un certain ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$.



Cela définit $X : t \mapsto (x_1(t); x_2(t))$ de $[0, T]$ dans D.

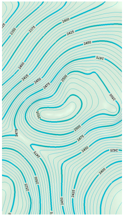
V.1 – Composition de fonctions

En randonnée, un GPS enregistre la position en fonction du temps : à tout instant t, on associe deux nombres $(x_1(t); x_2(t))$ dans un certain ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$.



Cela définit $X : t \mapsto (x_1(t); x_2(t))$ de $[0, T]$ dans D.

Une carte donne l'altitude en chaque point de la zone par une fonction $Z : (y_1; y_2) \mapsto Z(y_1; y_2)$ de D dans $\mathbb{R}_+$.



L'altitude à laquelle on se trouve à l'instant t est donc $Z(x_1(t); x_2(t)) = Z(X(t))$.

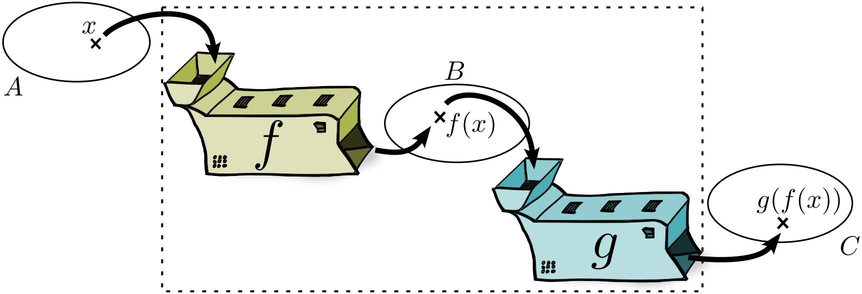
Cela définit une nouvelle fonction $t \mapsto Z(X(t))$ de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}_+$.

V.1 – Composition de fonctions

Définition (fonction composée)

Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions. La **composée** de f et g est la fonction $g \circ f : A \to C$ définie par $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$.

Attention : $\mathrm{Im}(f)$ doit être inclus dans le domaine de définition de g.

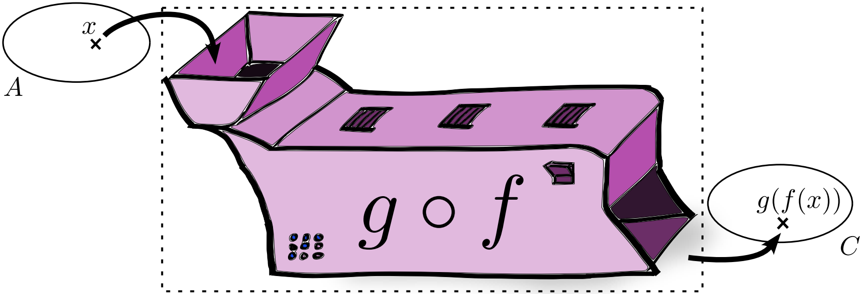


V.1 – Composition de fonctions

Définition (fonction composée)

Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions. La **composée** de f et g est la fonction $g \circ f : A \to C$ définie par $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$.

Attention : $\mathrm{Im}(f)$ doit être inclus dans le domaine de définition de g.



V.1 – Composition de fonctions

Exemple de composée

Soient $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ et $g : y \mapsto y^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$.

- La fonction $g \circ f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}_+$ est bien définie et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}.$$

- La fonction $f \circ g$ n'est pas définie, car $g(0) = 0 \notin \mathbb{R}^*$.

V.1 – Composition de fonctions

Exemple de composée

Soient $f : x \mapsto x^2 + 1$ et $g : y \mapsto y + 1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- La fonction $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = x^2 + 2.$$

- De même, $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie et, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = (g(y))^2 + 1 = (y+1)^2 + 1 = y^2 + 2y + 2.$$

V.2 – Fonctions réciproques

Définition (fonction réciproque)

Soient $f : A \to B$ et $g : B \to A$ deux fonctions. On dit que f et g sont **réciproques** l'une de l'autre, si :

- pour tout $x \in A$, $g(f(x)) = x$, (c'est-à-dire : $g \circ f : x \mapsto x$) et ;
- pour tout $y \in B$, $f(g(y)) = y$ (c'est-à-dire : $f \circ g : y \mapsto y$).

Exemples

- $f : x \mapsto x+1$ de $[0;1]$ dans $[1;2]$ et $g : y \mapsto y-1$ de $[1;2]$ dans $[0;1]$.
- $f : x \mapsto 2x$ et $g : y \mapsto \frac{y}{2}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

V.2 – Fonctions réciproques

Soient $f : A \to B$ et $g : B \to A$ réciproques l'une de l'autre.

Lemme

Soient $x \in A$ et $y \in B$, on a : $f(x) = y \quad \underbrace{\iff}_{\text{"si et seulement si"}} \quad x = g(y).$

Preuve : Si $f(x) = y$ alors $g(y) = g(f(x)) = x$.

Si $g(y) = x$ alors $f(x) = f(g(y)) = y$.

V.2 – Fonctions réciproques

Soient $f : A \to B$ et $g : B \to A$ réciproques l'une de l'autre.

Lemme

Soient $x \in A$ et $y \in B$, on a : $f(x) = y \quad \underbrace{\iff}_{\text{"si et seulement si"}} \quad x = g(y)$.

Preuve : Si $f(x) = y$ alors $g(y) = g(f(x)) = x$.

Si $g(y) = x$ alors $f(x) = f(g(y)) = y$.

Reformulation

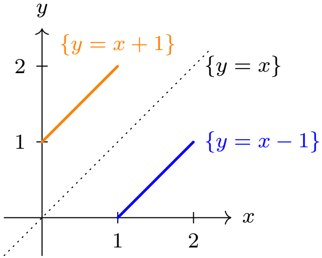
Si $y \in B$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in A$ a une unique solution, c'est-à-dire y a un unique antécédent par f, et c'est $g(y)$.

V.2 – Fonctions réciproques

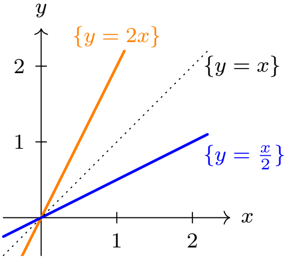
Soient $f : A \to B$ et $g : B \to A$ réciproques l'une de l'autre.

Si A et B sont des intervalles, les graphes de f et g sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite $\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$:

$$\Big\{(x;f(x)) \,\Big|\, x \in A\Big\} = \Big\{(g(y);y) \,\Big|\, y \in B\Big\}.$$



(a) $f : x \mapsto x+1$ et $g : x \mapsto x-1$.



(b) $f : x \mapsto 2x$ et $g : x \mapsto \frac{x}{2}$.

V.2 – Fonctions réciproques

- Il est rare qu'une fonction $f : A \to B$ admette une réciproque. Chaque $y \in B$ doit avoir un unique antécédent. C'est contraignant.

- L'existence d'une réciproque vient souvent d'arguments qualitatifs (continuité, monotonie, etc.) qui ne sont pas constructifs.

- Si $f : A \to B$ a pour réciproque $g : B \to A$, on ne sait souvent pas expliciter g par une formule.

  Si g est importante, on l'ajoute alors au catalogue des fonctions "élémentaires" (les mathématicien·ne·s la nomment et l'étudient).

VI – Racines n-ièmes et puissances fractionnaires

1. Racine carrée
2. Racines n-ièmes
3. Puissances fractionnaires

VI.1 – Racine carrée

La fonction $f : x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ a une réciproque $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Définition (racine carrée)

Soit $y \in \mathbb{R}_+$, alors $g(y)$ est l'unique nombre positif dont le carré est y.
Ce nombre est appelé la **racine carrée** de y et est noté $\sqrt{y}$ ou $y^{\frac{1}{2}}$.
La fonction $g : y \mapsto \sqrt{y}$ est appelée la **fonction racine carrée**.

Exemple : $\sqrt{49} = 7$ car $7^2 = 49$ et $7 \geqslant 0$.

VI.1 – Racine carrée

La fonction $f : x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ a une réciproque $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Définition (racine carrée)

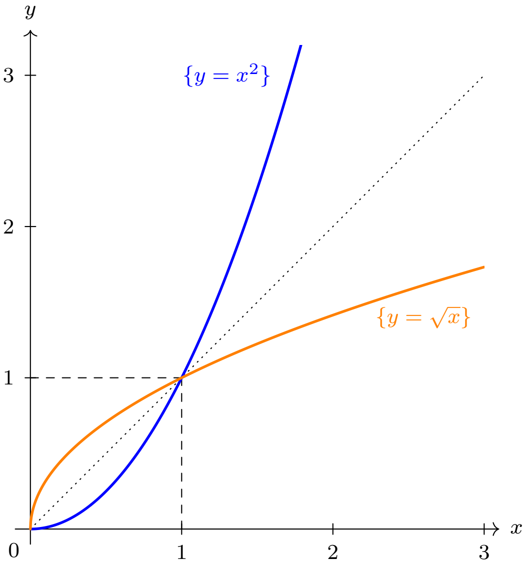
Soit $y \in \mathbb{R}_+$, alors $g(y)$ est l'unique nombre positif dont le carré est y.
Ce nombre est appelé la **racine carrée** de y et est noté $\sqrt{y}$ ou $y^{\frac{1}{2}}$.
La fonction $g : y \mapsto \sqrt{y}$ est appelée la **fonction racine carrée**.

Exemple : $\sqrt{49} = 7$ car $7^2 = 49$ et $7 \geqslant 0$.

Carré, racine et valeur absolue

- Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $(\sqrt{x})^2 = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2} = |x|$. Exemple : $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$.

VI.1 – Racine carrée



La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante.

On a $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$.

Si $x \in]0; 1[$, alors $\sqrt{x} > x$.

Si $x > 1$, alors $\sqrt{x} < x$.

VI.2 – Racines n-ièmes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f : x \mapsto x^n$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ admet une réciproque $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Définition (racine n-ième)

Soit $y \in \mathbb{R}_+$, alors $g(y)$ est l'unique nombre positif tel que $g(y)^n = y$.

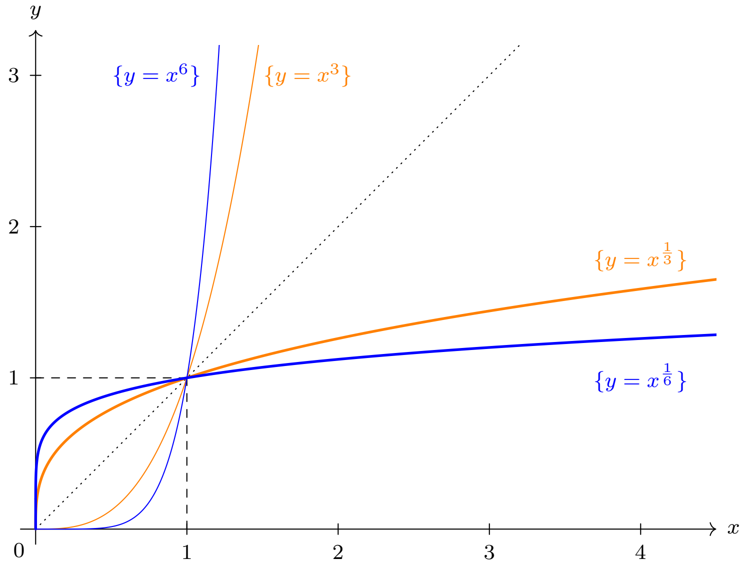
Ce nombre est appelé la **racine n-ième** de y et est noté $\sqrt[n]{y}$ ou $y^{\frac{1}{n}}$.

La fonction $g : y \mapsto y^{\frac{1}{n}}$ est la **fonction racine n-ième**.

Exemples

- $\sqrt[3]{27} = 3$ car $3^3 = 27$;
- $(256)^{\frac{1}{8}} = 2$ car $2^8 = 256$.

VI.2 – Racines n-ièmes



VI.3 – Puissances fractionnaires

Définition (puissance fractionnaire)

Soient $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on définit $x^{\frac{m}{n}}$ par $x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = (x^{\frac{1}{n}})^m$.

Exemples

- $4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$;
- $16^{-\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{16})^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

VI.3 – Puissances fractionnaires

Manipulation des puissances possiblement fractionnaires

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $p \in \mathbb{Q}$ et $q \in \mathbb{Q}$, on a :

- $x^p y^p = (xy)^p$;
- $x^p x^q = x^{p+q}$;
- $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$;
- $(x^p)^q = x^{pq}$.

En particulier, si $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ alors $(x^m)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$.

Exemples

- $\sqrt{2}^3\sqrt{3}^3 = 2^{\frac{3}{2}}3^{\frac{3}{2}} = 6^{\frac{3}{2}} = \sqrt{6}^3 = 6\sqrt{6}$;
- $5^{\frac{3}{4}}5^{\frac{9}{4}} = 5^3 = 125$.

VII – Exponentielles et logarithmes

1. La fonction exponentielle
2. Le logarithme népérien
3. Exponentielle et logarithme en base a
4. Formulaire

VII.1 – La fonction exponentielle

On considère l'évolution d'une population de cellules au fil du temps.

On note $f(t)$ le nombre de cellules à l'instant t.

Entre deux instants t_1 et t_2, chaque cellule peut se diviser ou mourir, ce qui est modélisé par un "taux de reproduction" $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(t_2) - f(t_1) \simeq a \times (t_2 - t_1) \times f(t_1).$$

VII.1 – La fonction exponentielle

On considère l'évolution d'une population de cellules au fil du temps.

On note $f(t)$ le nombre de cellules à l'instant t.

Entre deux instants t_1 et t_2, chaque cellule peut se diviser ou mourir, ce qui est modélisé par un "taux de reproduction" $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(t_2) - f(t_1) \simeq a \times (t_2 - t_1) \times f(t_1).$$

En anticipant un peu, la fonction f satisfait l'équation différentielle :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) = af(t).$$

(Dérivation, au chapitre 2 ; équations différentielles, au 2nd semestre.)

VII.1 – La fonction exponentielle

Pour l'instant, on utilise les souvenirs du lycée concernant la dérivée.

Définition (exponentielle)

La fonction **exponentielle**, notée $\exp$, est l'unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\exp(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

VII.1 – La fonction exponentielle

Pour l'instant, on utilise les souvenirs du lycée concernant la dérivée.

Définition (exponentielle)

La fonction **exponentielle**, notée $\exp$, est l'unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\exp(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Remarques :

- $\exp$ ne s'exprime pas à partir des fonctions introduites plus tôt.
- Il existe d'autres définitions équivalentes : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

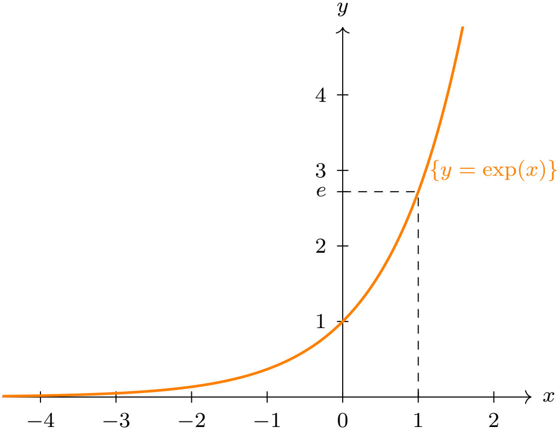
$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \times 3} + \cdots + \frac{x^n}{2 \times 3 \times \cdots \times n} + \cdots .$$

  C'est utile pour les calculs en machine, par exemple.

VII.1 – La fonction exponentielle

Définition (le nombre d'Euler)

On note e le nombre réel $e = \exp(1)$. On a $e \simeq 2,718\ldots$.



La fonction $\exp$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

VII.1 – La fonction exponentielle

Si $x \in \mathbb{Q}$, on peut prouver que $\exp(x) = \exp(1)^x = e^x$.

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors e^x n'a pas de sens a priori. On le définit comme $e^x = \exp(x)$, pour que la formule précédente reste valide.

Manipulation de l'exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, pour tout $p \in \mathbb{Q}$, on a :

- $e^{x+y} = e^x e^y$,
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$,
- $e^{px} = (e^x)^p$.

En particulier, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

VII.2 – Le logarithme népérien

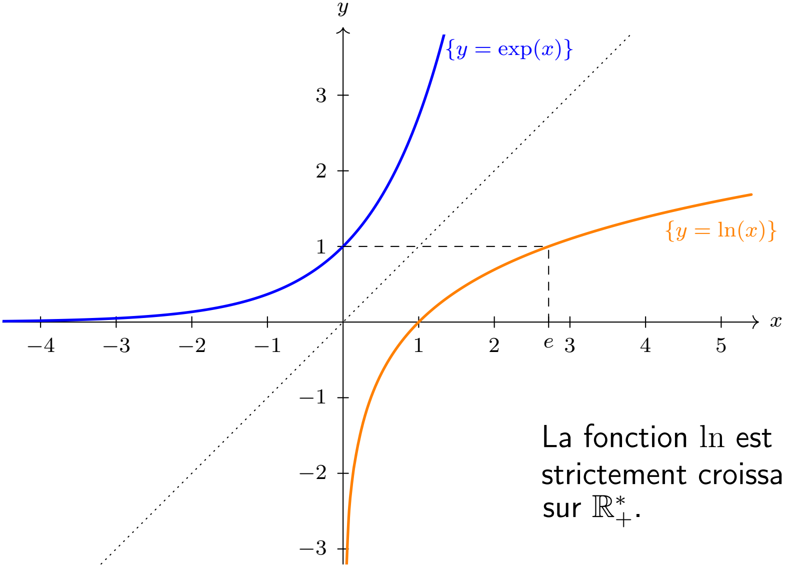
La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ admet une fonction réciproque.

Définition (logarithme népérien)

Le **logarithme népérien** est la fonction réciproque de $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.
On le note $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x)$ est l'unique nombre tel que $e^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\ln(e^y) = y$.
- En particulier, $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.
- Étant donnés $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a $y = e^x \iff x = \ln(y)$.

VII.2 – Le logarithme népérien



La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

VII.2 – Le logarithme népérien

Manipulation du logarithme

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $p \in \mathbb{Q}$, on a :

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,
- $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$,
- $\ln(x^p) = p\ln(x)$.

Exemples

- $\ln(16) = \ln(2^4) = 4\ln(2)$;
- $\ln(\frac{e}{5}) = \ln(e) - \ln(5) = 1 - \ln(5)$.

VII.3 – Exponentielle et logarithme en base a

Soit $a > 0$ un nombre strictement positif fixé (souvent $a = 2$ ou 10).

Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on a $a^x = \exp(\ln(a^x)) = e^{x\ln(a)}$.

Définition (puissance irrationnelle)

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on définit $a^x = e^{x\ln(a)}$, pour que la formule reste vraie.

Exemple : cela donne un sens au nombre 2^π, qui n'en avait pas encore.

VII.3 – Exponentielle et logarithme en base a

Définition (exponentielle en base a)

Soit $a > 0$ fixé, on appelle **exponentielle en base** a la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ définie par $x \mapsto a^x$.

Attention à ne pas confondre les fonctions :

- $x \mapsto x^a$, variable élevée à une puissance fixée, définie sur $\mathbb{R}_+^*$;
- $x \mapsto a^x$, nombre fixé élevé à une puissance variable, définie sur $\mathbb{R}$.

VII.3 – Exponentielle et logarithme en base a

Définition (exponentielle en base a)

Soit $a > 0$ fixé, on appelle **exponentielle en base** a la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ définie par $x \mapsto a^x$.

Attention à ne pas confondre les fonctions :

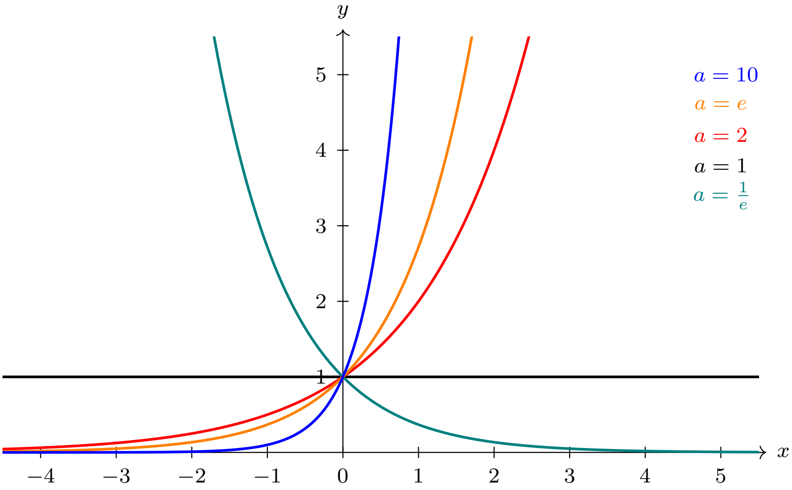
- $x \mapsto x^a$, variable élevée à une puissance fixée, définie sur $\mathbb{R}_+^*$;
- $x \mapsto a^x$, nombre fixé élevé à une puissance variable, définie sur $\mathbb{R}$.

Manipulation de l'exponentielle en base a

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a :

- $a^{x+y} = a^x a^y$,
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$,
- $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$.

VII.3 – Exponentielle et logarithme en base a



Graphe de $x \mapsto a^x$ pour différentes valeurs de $a > 0$.

VII.3 – Exponentielle et logarithme en base a

Définition (logarithme en base a)

Soit $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$ fixé, on appelle **logarithme en base** a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\log_a : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$. En particulier, $\log_e = \ln$.

Exemple : $\log_2(32) = \frac{\ln(32)}{\ln(2)} = \frac{\ln(2^5)}{\ln(2)} = \frac{5\ln(2)}{\ln(2)} = 5$.

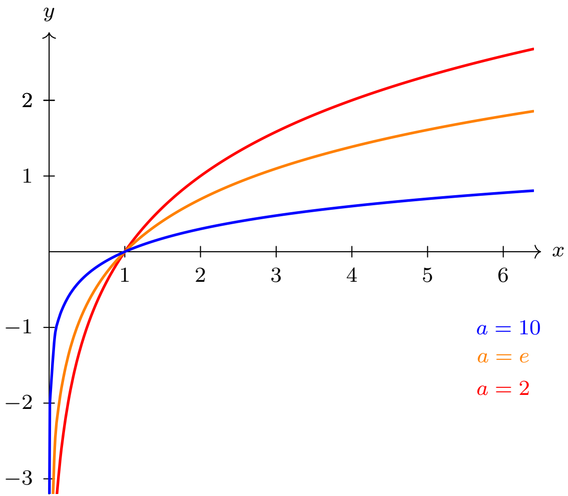
Lemme

Les fonctions $\log_a$ *et* $x \mapsto a^x$ *sont réciproques l'une de l'autre.*

Preuve : si $x \in \mathbb{R}$, alors $\log_a(a^x) = \frac{\ln(a^x)}{\ln(a)} = \frac{\ln(e^{x\ln(a)})}{\ln(a)} = \frac{x\ln(a)}{\ln(a)} = x$.

Si $y \in \mathbb{R}_+^*$, alors $a^{\log_a(y)} = e^{\log_a(y)\ln(a)} = e^{\left(\frac{\ln(y)}{\ln(a)}\ln(a)\right)} = e^{\ln(y)} = y$.

VII.3 – Exponentielle et logarithme en base a



Si $a > 1$, la fonction $\log_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Graphe de $\log_a$ pour différentes valeurs de $a > 1$.

VII.3 – Exponentielle et logarithme en base a

Manipulation du logarithme en base a

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $p \in \mathbb{R}$, on a :

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$,
- $\log_a(x^p) = p \log_a(x)$.
- $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$,

Exemple : $\log_{10}(600) = \log_{10}(6) + \log_{10}(100) = \log_{10}(6) + 2$.

VII.3 – Exponentielle et logarithme en base a

Manipulation du logarithme en base a

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $p \in \mathbb{R}$, on a :

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$,
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$,
- $\log_a(x^p) = p \log_a(x)$.

Exemple : $\log_{10}(600) = \log_{10}(6) + \log_{10}(100) = \log_{10}(6) + 2$.

La fonction $\log_{10}$ compte les chiffres avant la virgule

Un nombre $x > 0$ a k chiffres avant la virgule si $10^{k-1} \leqslant x < 10^k$.

Dans ce cas, $k - 1 \leqslant \log_{10}(x) < k$, c'est-à-dire $k = \lfloor \log_{10}(x) \rfloor + 1$.

Exemples :

- $\log_{10}(345998,7) \simeq 5,539\ldots$;
- $\log_{10}(0,043) \simeq -1,367\ldots$.

VII.4 – Formulaire

Puissances

Soit $a \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $(xy)^a = x^a y^a$.

Si $a \in \mathbb{Z}$, c'est encore vrai pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $y \in \mathbb{R}^*$.

Exponentielles

Soit $a > 0$ (penser $a = 2$; e ou 10), pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a :

- $a^{x+y} = a^x a^y$,
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$,
- $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$.

Logarithmes

Soit $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$,
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.

Si de plus $p \in \mathbb{R}$, alors $\log_a(x^p) = p \log_a(x)$.

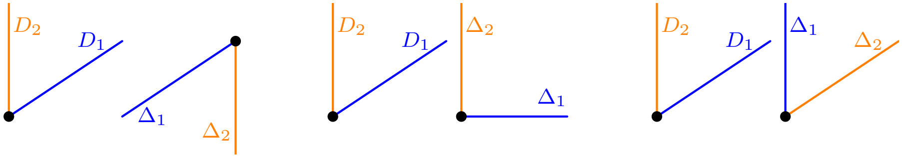
VIII – Fonctions trigonométriques

VIII.1 – Notion d'angle

Définition (angle géométrique)

Dans le plan, un couple $(D_1; D_2)$ de demi-droites issues du même point définit un **angle géométrique**, noté $(\widehat{D_1; D_2})$.

Deux tels couples, $(D_1; D_2)$ et $(\Delta_1; \Delta_2)$, définissent le même angle si on peut envoyer simultanément D_1 sur Δ_1 et D_2 sur Δ_2 par translation et rotation. On note alors $(\widehat{D_1; D_2}) = (\widehat{\Delta_1; \Delta_2})$.

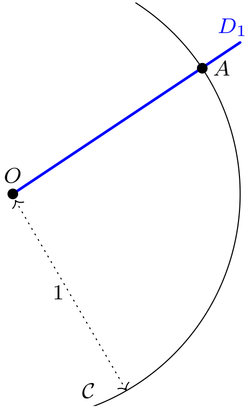


(a) $(\widehat{D_1; D_2}) = (\widehat{\Delta_1; \Delta_2})$ (b) $(\widehat{D_1; D_2}) \neq (\widehat{\Delta_1; \Delta_2})$ (c) $(\widehat{D_1; D_2}) \neq (\widehat{\Delta_1; \Delta_2})$

VIII.1 – Notion d'angle

Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, on construit un angle associé comme suit :

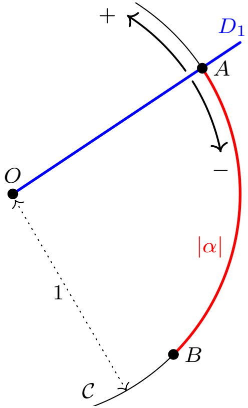
- D_1 une demi-droite, issue d'un point O ;
- $\mathcal{C}$ cercle rayon 1 centre O, coupe D_1 en A ;



VIII.1 – Notion d'angle

Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, on construit un angle associé comme suit :

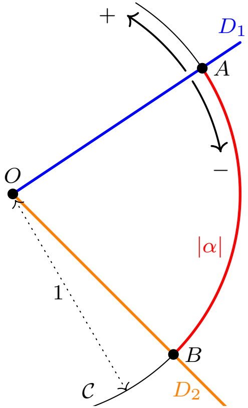
- D_1 une demi-droite, issue d'un point O ;
- $\mathcal{C}$ cercle rayon 1 centre O, coupe D_1 en A ;
- on suit $\mathcal{C}$ sur la distance $|\alpha|$, de A à B, dans le sens trigo si $\alpha \geqslant 0$ et sens horaire sinon ;



VIII.1 – Notion d'angle

Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, on construit un angle associé comme suit :

- D_1 une demi-droite, issue d'un point O ;
- $\mathcal{C}$ cercle rayon 1 centre O, coupe D_1 en A ;
- on suit $\mathcal{C}$ sur la distance $|\alpha|$, de A à B, dans le sens trigo si $\alpha \geqslant 0$ et sens horaire sinon ;
- D_2 demi-droite issue de O passant par B ;
- on associe l'angle $(\widehat{D_1 ; D_2})$ à α.



Tous les angles géométriques peuvent être obtenus de cette façon.

VIII.1 – Notion d'angle

Définition (le nombre π)

On définit $\pi = \frac{\text{périmètre}(\mathcal{C})}{2}$, où $\mathcal{C}$ cercle de rayon 1. On a $\pi \simeq 3,14\ldots$.

- Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on sait lui associer un angle géométrique $(\widehat{D_1 ; D_2})$.
- Les nombres α et β définissent le même angle si et seulement si ils sont égaux à 2π près (c.-à-d. il existe $k \in \mathbb{Z}$ t.q. $\beta = \alpha + 2k\pi$).

VIII.1 – Notion d'angle

Définition (le nombre π)

On définit $\pi = \frac{\text{périmètre}(\mathcal{C})}{2}$, où $\mathcal{C}$ cercle de rayon 1. On a $\pi \simeq 3,14\ldots$.

- Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on sait lui associer un angle géométrique $(\widehat{D_1; D_2})$.
- Les nombres α et β définissent le même angle si et seulement si ils sont égaux à 2π près (c.-à-d. il existe $k \in \mathbb{Z}$ t.q. $\beta = \alpha + 2k\pi$).

Définition (mesures d'un angle)

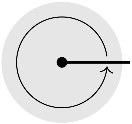
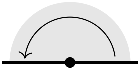
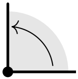
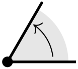
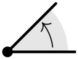
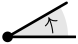
- On dit que α est **une mesure**, exprimée en radians, de $(\widehat{D_1; D_2})$.
- L'**ensemble des mesures** de $(\widehat{D_1; D_2})$ est alors $\{\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- Par abus de langage, on dit que D_1 et D_2 **forment un angle** α.

VIII.1 – Notion d'angle

Dans la vie courante, on exprime les angles en degrés (°).

En mathématiques, on les exprime en radians (rad).

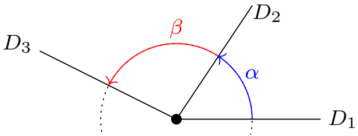
$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{mesure en }^\circ} \arrow[d, bend left, "\times \frac{2\pi}{360}"] \\ \boxed{\text{mesure en rad}} \arrow[u, bend left, "\times \frac{360}{2\pi}"] \end{tikzcd}$$

mesure en °	360	180	90	60	45	30
mesure en rad	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
angle						

VIII.1 – Notion d'angle

Relation de Chasles

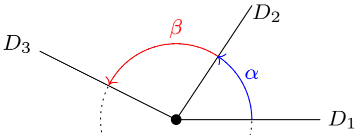
Si α est une mesure de $(\widehat{D_1; D_2})$ et β une mesure de $(\widehat{D_2; D_3})$, alors $\alpha + \beta$ est une mesure de $(\widehat{D_1; D_3})$, et $-\alpha$ une mesure de $(\widehat{D_2; D_1})$.



VIII.1 – Notion d'angle

Relation de Chasles

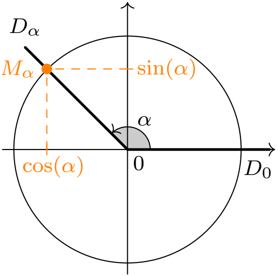
Si α est une mesure de $(\widehat{D_1; D_2})$ et β une mesure de $(\widehat{D_2; D_3})$, alors $\alpha + \beta$ est une mesure de $(\widehat{D_1; D_3})$, et $-\alpha$ une mesure de $(\widehat{D_2; D_1})$.



Longueur d'un arc de cercle

Soient D_1 et D_2 demi-droites issues de O formant un angle $\alpha \in [0; 2\pi]$. Pour tout $R > 0$, l'arc de cercle de centre O et de rayon R joignant D_1 à D_2 dans le sens trigonométrique est de longueur $\ell(R) = \alpha R$.

VIII.2 – Fonctions cosinus et sinus



Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on note :

- D_0 le demi-axe des abscisses positives ;
- D_α la demi-droite formant avec D_0 un angle de mesure α (en radians) ;
- M_α l'intersection de D_α et du cercle unité.

Définition (sinus et cosinus d'un nombre)

On appelle **cosinus** du nombre α, noté $\cos(\alpha)$, l'abscisse du point M_α.

On appelle **sinus** de α, noté $\sin(\alpha)$, l'ordonnée de M_α.

Ainsi, $M_\alpha = (\cos(\alpha); \sin(\alpha))$.

VIII.2 – Fonctions cosinus et sinus

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :

- $-1 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1$,
- $-1 \leqslant \sin(\alpha) \leqslant 1$,
- $(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1$.

Formulaire de trigonométrie

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$ on a :

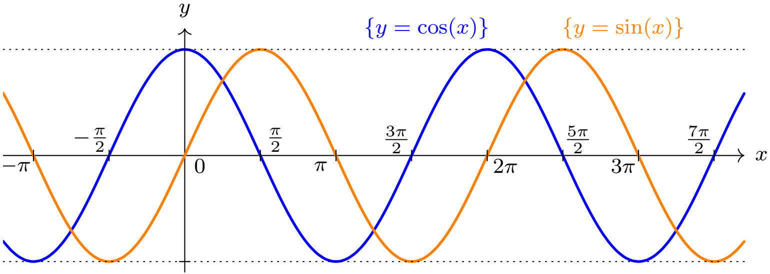
- $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha)$,
- $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$,
- $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha)$,
- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$.

VIII.2 – Fonctions cosinus et sinus

Définition (fonctions cosinus et sinus)

Le **cosinus** est la fonction $\cos : \mathbb{R} \to [-1;1]$ définie par $x \mapsto \cos(x)$.

Le **sinus** est la fonction $\sin : \mathbb{R} \to [-1;1]$ définie par $x \mapsto \sin(x)$.

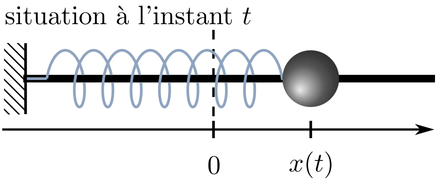


Ces fonctions sont 2π-**périodiques** : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

VIII.2 – Fonctions cosinus et sinus

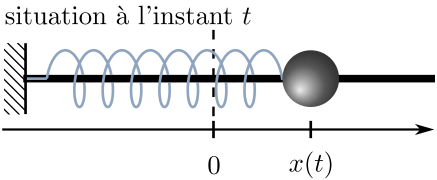
Considérons une bille sur une tige horizontale, attachée à un ressort.



- t le temps écoulé (en s),
- $x(t)$ l'allongement du ressort à l'instant t (en m).

VIII.2 – Fonctions cosinus et sinus

Considérons une bille sur une tige horizontale, attachée à un ressort.



- t le temps écoulé (en s),
- $x(t)$ l'allongement du ressort à l'instant t (en m).

Les lois de la mécanique disent que $x : t \mapsto x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$, où

- $x_0 \in \mathbb{R}$ est la position initiale (en m),
- $v_0 \in \mathbb{R}$ est la vitesse initiale (en m/s),
- $\omega > 0$ est la pulsation du système (en rad/s).

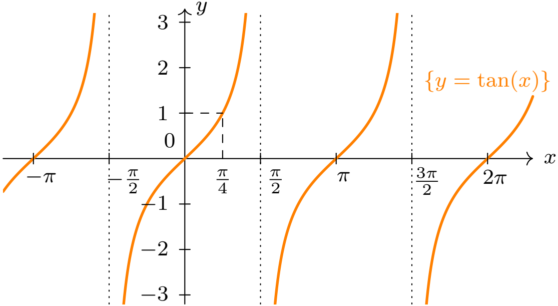
L'évolution de nombreux systèmes est décrite par une fonction de la forme précédente. On les appelle les **oscillateurs harmoniques**.

VIII.3 – Fonction tangente

Définition (fonction tangente)

La **tangente** est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, par $\tan : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a : $\tan(-x) = -\tan(x)$ et $\tan(x + \pi) = \tan(x)$.



- tan est impaire et π-périodique,
- $\tan(0) = 0$,
- $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

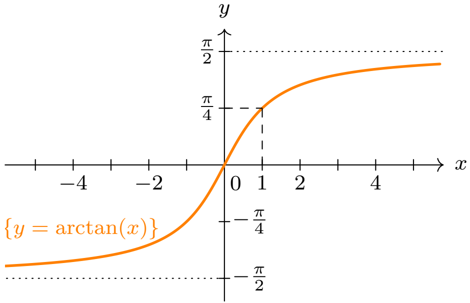
VIII.4 – Fonctions trigonométriques réciproques

La restriction de $\tan$ à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ admet une réciproque.

Définition (fonction arctangente)

On appelle **arctangente** la fonction réciproque de $\tan : \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$.

Cette fonction est notée $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

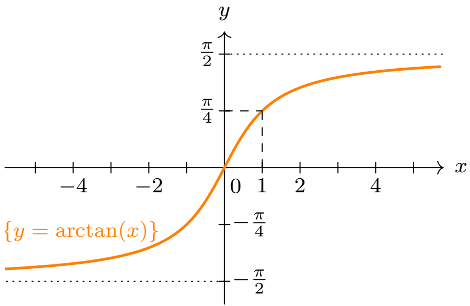


VIII.4 – Fonctions trigonométriques réciproques

La restriction de $\tan$ à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ admet une réciproque.

Définition (fonction arctangente)

On appelle **arctangente** la fonction réciproque de $\tan : \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$.
Cette fonction est notée $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.



Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

- $\arctan(-x) = -\arctan(x)$,
- $\tan(\arctan(x)) = x$.

Pour tout $y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\arctan(\tan(y)) = y$.

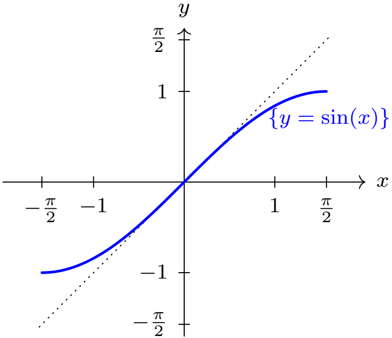
Exemple : $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

VIII.4 – Fonctions trigonométriques réciproques

La restriction de $\sin$ à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ admet une réciproque.

Définition (fonction arcsinus)

On appelle **arcsinus** la fonction réciproque de $\sin : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$.
Cette fonction est notée $\arcsin : [-1; 1] \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.



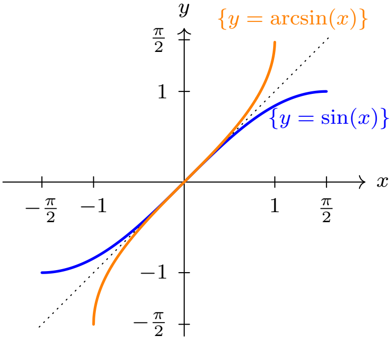
VIII.4 – Fonctions trigonométriques réciproques

La restriction de $\sin$ à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ admet une réciproque.

Définition (fonction arcsinus)

On appelle **arcsinus** la fonction réciproque de $\sin : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$.

Cette fonction est notée $\arcsin : [-1; 1] \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.



Pour tout $x \in [-1; 1]$, on a :

- $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$,
- $\sin(\arcsin(x)) = x$.

Pour tout $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, on a $\arcsin(\sin(y)) = y$.

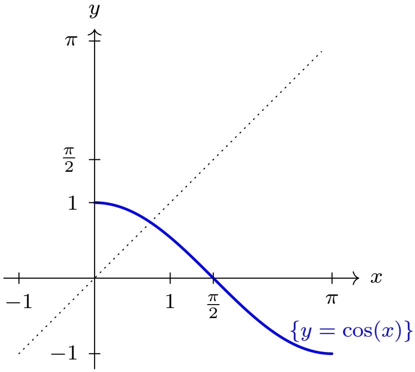
VIII.4 – Fonctions trigonométriques réciproques

La restriction de $\cos$ à l'intervalle $[0; \pi]$ admet une réciproque.

Définition (fonction arccosinus)

On appelle **arccosinus** la fonction réciproque de $\cos : [0; \pi] \to [-1; 1]$.

Cette fonction est notée $\arccos : [-1; 1] \to [0; \pi]$.

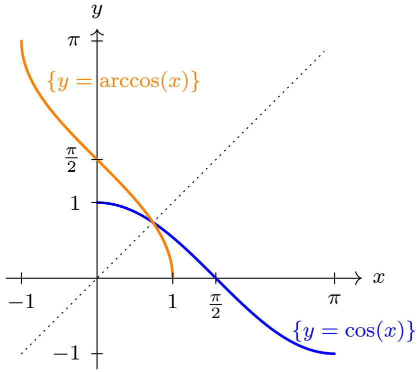


VIII.4 – Fonctions trigonométriques réciproques

La restriction de $\cos$ à l'intervalle $[0;\pi]$ admet une réciproque.

Définition (fonction arccosinus)

On appelle **arccosinus** la fonction réciproque de $\cos\colon [0;\pi] \to [-1;1]$.
Cette fonction est notée $\arccos : [-1;1] \to [0;\pi]$.



Pour tout $x \in [-1;1]$, on a $\cos(\arccos(x)) = x$.

Pour tout $y \in [0;\pi]$, on a $\arccos(\cos(y)) = y$.