Université Paris-Saclay
2023 – 2024

Master Formation à l'Enseignement Supérieur
Analyse 2

Chargé de TD : Thomas Letendre.

Feuille 3 – Transformée de Fourier

Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, on note $\mathbf{1}_A : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ sa fonction indicatrice.
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier est la fonction $\mathcal{F}(f) = \widehat{f} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi\xi x} \,\mathrm{d}t$.
Rappelons la formule d'inversion de Fourier : si $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = \check{f} : x \mapsto f(-x)$.

Exercice 1 (Préliminaire sur le sinus cardinal)**.** On définit la fonction sinc : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\mathrm{sinc}(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

1. Montrer que sinc est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

   Indication. Chercher un développement de sinc en série entière.

   On sait que sin est somme de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \frac{X^{2k+1}}{(2k+1)!}$ qui est de rayon de convergence infini. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{1}{\pi x} \sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \frac{(\pi x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \frac{(\pi x)^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k+1)!} x^{2k}.$$

   Cette formule reste vraie pour $x = 0$. Le calcul précédent montre que $\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k+1)!} X^{2k}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Elle est donc de rayon de convergence infini. Donc sinc est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. En particulier, sinc est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ses dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme, par exemple $\mathrm{sinc}^{(2k)}(0) = \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k+1)}$ et $\mathrm{sinc}^{(2k+1)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $\int_0^A |\mathrm{sinc}(x)| \,\mathrm{d}x \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$. En déduire que $\mathrm{sinc} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$.

   Comme la fonction $|\mathrm{sinc}|$ est à valeurs positives, $A \mapsto \int_0^A |\mathrm{sinc}(x)| \,\mathrm{d}x$ est une fonction croissante. Pour montrer qu'elle diverge vers $+\infty$, il suffit donc de trouver une suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ qui tend vers l'infini et telle que $\int_0^{A_n} |\mathrm{sinc}(x)| \,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la 1-périodicité de $|\sin(\pi\cdot)|$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^n |\mathrm{sinc}(x)| \,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{|\sin(\pi x)|}{\pi x} \,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi k} \int_{k-1}^k |\sin(\pi x)| \,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{1}{\pi} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \int_0^1 \sin(\pi x) \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.\end{aligned}$$

   On a donc bien $\int_0^A |\mathrm{sinc}(x)| \,\mathrm{d}x \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$.

   Si sinc était, on aurait $\int_0^A |\mathrm{sinc}(x)| \,\mathrm{d}x \xrightarrow[A\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} |\mathrm{sinc}(x)| \,\mathrm{d}x < +\infty$, ce qui est absurde. Donc $\mathrm{sinc} \notin L^1(\mathbb{R})$. Cependant, sinc^2 est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{sinc}(x)^2 = O\big(\frac{1}{x^2}\big)$ lorsque $|x| \to +\infty$. Donc sinc^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$, et donc $\mathrm{sinc} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$.

3. Vérifier que $\mathcal{F}(\mathbf{1}_I) = \mathrm{sinc}$, où $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

   D'une part, on a $\mathcal{F}(\mathbf{1}_I)(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = 1 = \mathrm{sinc}(0)$. D'autre part, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$,

$$\mathcal{F}(\mathbf{1}_I)(\xi) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi\xi x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{-2i\pi\xi x}}{-2i\pi\xi}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi\xi}\frac{e^{i\pi\xi} - e^{-i\pi\xi}}{2i} = \mathrm{sinc}(\xi).$$

Exercice 2 (Un calcul élémentaire de transformée de Fourier)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la *fonction triangle*, définie par :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \in [-1, 0], \\ 1 - x & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $\widehat{f}$. En déduire la valeur de $\|\mathrm{sinc}\|_2$.
Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$, on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{-1}^{0} (1+x)e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (1-x)e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\left(e^{2i\pi x\xi} + e^{-2i\pi x\xi}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (1-x)2\cos(2\pi x\xi)\,\mathrm{d}x = \left[(1-x)\frac{\sin(2\pi x\xi)}{\pi\xi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\sin(2\pi x\xi)}{\pi\xi}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos(2\pi x\xi)}{2\pi^2\xi^2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{\pi^2\xi^2}\frac{1-\cos(2\pi\xi)}{2} = \left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^2 = \mathrm{sinc}(\xi)^2.
\end{aligned}$$

Pour $\xi = 0$, on calcule simplement l'intégrale :

$$\widehat{f}(0) = \int_{-1}^{0} (1+x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x = \left[2x - x^2\right]_0^1 = 1.$$

Alternativement, on sait que $\widehat{f}$ est continue, et donc $\widehat{f}(0) = \lim_{\xi\to 0}\widehat{f}(\xi) = 1$.
D'après l'exercice 1 question 2, on a $\widehat{f} = \mathrm{sinc}^2 \in L^1(\mathbb{R})$. Par inversion de Fourier, on a donc :

$$\|\mathrm{sinc}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{sinc}(\xi)^2\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \widehat{\widehat{f}}(0) = f(0) = 1.$$

Donc $\|\mathrm{sinc}\|_2 = 1$.

Exercice 3 (Un calcul moins élémentaire de transformée de Fourier)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Justifier que la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f est bien définie, et calculer $\widehat{f}(0)$.

   Il s'agit de justifier que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Comme f est nulle sur $]-\infty, 0]$ et continue sur $]0, +\infty[$, il suffit de prouver que f est intégrable en 0^+ et en $+\infty$. En 0^+, on a $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui est bien intégrable. À l'infini, $f(x) = o(e^{-x})$. Finalement $f \in L^1(\mathbb{R})$.
   On calcule $\widehat{f}(0)$ en effectuant le changement de variable $x = y^2$, qui donne $\mathrm{d}x = 2y\,\mathrm{d}y$.

$$\widehat{f}(0) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}.$$

Pour justifier la dernière égalité, on rappelle qu'on procède comme suit :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{R=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-R^2} R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta = \pi\int_0^{+\infty} 2Re^{-R^2}\,\mathrm{d}R = \pi.$$

2. Montrer que $\widehat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et expliciter sa dérivée.

   On va utiliser le fait que la transformée de Fourier échange la décroissance à l'infini et la régularité. Ici f est à décroissance rapide, donc en fait $\widehat{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$.

   Soit $g : (x,\xi) \mapsto f(x)e^{-2i\pi x\xi}$, de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$. De la sorte, $\widehat{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} g(x,\xi)\,\mathrm{d}x$. La fonction g est lisse et dominée par f. En particulier, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $g(\cdot,\xi)$ est bien intégrable. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $g(x,\cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^k g}{\partial \xi} : (x,\xi) \mapsto (-2\pi i x)^k f(x)e^{-2i\pi x\xi}$. En particulier, on a la domination :

$$\forall x > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \left|\frac{\partial^k g}{\partial \xi^k}(x,\xi)\right| \leqslant (2\pi x)^k f(x).$$

   Le terme de droite étant intégrable sur $]0,+\infty[$, on peut appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, qui montre que $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\widehat{f}^{(k)} : \xi \mapsto \int_0^{+\infty} (-2i\pi x)^k \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x.$$

3. Montrer que $\widehat{f}$ satisfait une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on explicitera.

   Soit $\xi \in \mathbb{R}$, par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned}\widehat{f}'(\xi) &= -2i\pi \int_{\mathbb{R}+} \sqrt{x} e^{-x(1+2i\pi\xi)}\,\mathrm{d}x = 2i\pi\left[\sqrt{x}\frac{e^{-x(1+2i\pi\xi)}}{1+2i\pi\xi}\right]_0^{+\infty} - i\pi\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{e^{-x(1+2i\pi\xi)}}{1+2i\pi\xi}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{-i\pi}{1+2i\pi\xi}\widehat{f}(\xi) = \frac{-i\pi(1-2i\pi\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}\widehat{f}(\xi) = \frac{-2\pi^2\xi - i\pi}{1+4\pi^2\xi^2}\widehat{f}(\xi) = g(\xi)\widehat{f}(\xi),\end{aligned}$$

   où $g : \xi \mapsto -\frac{2\pi^2\xi + i\pi}{1+4\pi^2\xi^2}$.

4. En déduire une expression close de $\widehat{f}$.

   La fonction g est continue. Soit $G : y \mapsto \displaystyle\int_0^y g(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ la primitive de g qui s'annule en 0. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}G(y) &= -\int_0^y \frac{2\pi^2\xi}{1+4\pi^2\xi^2}\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y \frac{i\pi}{1+4\pi^2\xi^2}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \left[-\frac{1}{4}\ln(1+4\pi^2\xi^2)\right]_0^y - \left[\frac{i}{2}\arctan(2\pi\xi)\right]_0^y \\ &= -\frac{1}{4}\ln\bigl(1+4\pi^2y^2\bigr) - \frac{i}{2}\arctan(2\pi y).\end{aligned}$$

   Comme $\widehat{f}$ est solution l'équation différentielle $\widehat{f}' = g\widehat{f}$ avec condition initiale $\widehat{f}(0) = \sqrt{\pi}$, on en déduit que $\widehat{f} : \xi \mapsto \sqrt{\pi}e^{G(\xi)}$. Donc, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi}\bigl(1+4\pi^2\xi^2\bigr)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{i}{2}\arctan(2\pi\xi)}.$$

Exercice 4 (Inégalité de Heisenberg)**.** Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on note $M(f) : x \mapsto xf(x)$.

1. Vérifier que $M(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et montrer que $\|f'\|_2 = 2\pi \|M(\widehat{f})\|_2$.

   Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $M(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit $k \in \mathbb{N}$, par la règle de Leibniz on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$M(f)^{(k)}(x) = xf^{(k)}(x) + kf^{(k-1)}(x).$$
   Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pour tout $i, k \in \mathbb{N}$,
   $$\left\|x^i M(f)^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|x^{i+1} f^{(k)}\right\|_\infty + k\left\|x^i f^{(k-1)}\right\|_\infty < +\infty.$$
   Donc on a bien $M(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

   On utilise la formule de Plancherel, qui affirme que la transformée de Fourier est une isométrie pour le produit scalaire L^2. On a donc :
   $$\|f'\|_2 = \|\widehat{f'}\|_2 = \|-2i\pi\xi \widehat{f}\|_2 = 2\pi \|M(\widehat{f})\|_2.$$

2. Montrer que $2\Re\left(\int_{\mathbb{R}} xf(x)\overline{f'(x)}\,\mathrm{d}x\right) = -\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x$.

   Indication. Calculer la dérivée de $|f|^2$.

   Suivant l'indication, on remarque que $(|f|^2)' = (f\overline{f})' = f'\overline{f} + f\overline{f}' = f'\overline{f} + f\overline{f'}$. On peut alors calculer, à l'aide d'une intégration par partie :
   $$\begin{aligned} 2\Re\left(\int_{\mathbb{R}} xf(x)\overline{f'(x)}\,\mathrm{d}x\right) &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)\overline{f'(x)}\,\mathrm{d}x + \overline{\int_{\mathbb{R}} xf(x)\overline{f'(x)}\,\mathrm{d}x} \\ &= \int_{\mathbb{R}} x\Big(f(x)\overline{f'(x)} + \overline{f(x)}f'(x)\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \big[x|f(x)|^2\big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$
   où on a utilisé la décroissance rapide de f à l'infini pour tuer le terme de bord.

3. Conclure que $\|f\|_2^2 \leqslant 4\pi \|M(f)\|_2 \|M(\widehat{f})\|_2$.

   Dans la suite, on note $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ le produit scalaire hermitien usuel sur $L^2(\mathbb{R}) \supset \mathcal{S}(\mathbb{R})$. D'après les questions 1 et 2, on a :
   $$\|f\|_2^2 = 2\big|\Re\big(\langle M(f)\,, f'\rangle\big)\big| \leqslant 2\big|\langle M(f)\,, f'\rangle\big| \leqslant 2\|M(f)\|_2\|f'\|_2 = 4\pi\|M(f)\|_2\|M(\widehat{f})\|_2,$$
   où la seconde inégalité est donnée par l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

4. Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité de la question 3.

   On a égalité si et seulement si, les deux inégalités ci-dessus sont des égalités. D'une part, on a donc $|\Re(\langle M(f)\,, f'\rangle)| = |\langle M(f)\,, f'\rangle|$, i.e. $\Im(\langle M(f)\,, f'\rangle) = 0$. D'autre part, on doit être dans le cas d'égalité de Cauchy–Schwarz, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f' = \lambda M(f)$. Lorsque ces deux conditions sont vérifiées, on a :
   $$0 = \Im\big(\langle M(f)\,, f'\rangle\big) = \Im\big(\overline{\lambda}\|M(f)\|_2^2\big) = -\Im(\lambda)\|M(f)\|_2^2.$$
   Si $M(f) = 0$ presque partout, alors $f = 0$ par continuité. Par contraposée, si $f \neq 0$, alors $\|M(f)\|_2^2 > 0$ et donc $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors, $f'(x) = \lambda x f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En résolvant cette équation différentielle, on voit que f est de la forme $x \mapsto Ce^{\lambda\frac{x^2}{2}}$ avec $C = f(0) \in \mathbb{C}$. Comme on sait que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a nécessairement $\lambda < 0$. Donc il existe $C \in \mathbb{C}$ et $\alpha > 0$ tels que $f : C \mapsto Ce^{-\alpha\frac{x^2}{2}}$. Inversement, les fonctions de ce type (dont la fonction nulle) sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et vérifient les deux conditions ci-dessus, et donc l'égalité dans l'inégalité de la question 3.

Exercice 5 (Convolution et transformée de Fourier)**.** Soient f et $g \in L^1(\mathbb{R})$, on rappelle que leur *convolée* est la fonction $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

1. Montrer que $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et que $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$.
   Montrons que la fonction $\psi : (x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$ est intégrable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Par le théorème de Fubini–Tonelli, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |\psi(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(y)||g(x-y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)|\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.\end{aligned}$$

   Comme $\psi \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, on peut lui appliquer le théorème de Fubini. En particulier la fonction $f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \psi(x,y)\,\mathrm{d}y$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. On a alors,

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \left| \left(\int_{\mathbb{R}} \psi(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \right| \mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |\psi(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

2. Montrer que $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.
   Soit $\xi \in \mathbb{R}$, en appliquant le théorème de Fubini on obtient :

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) e^{-2i\pi\langle x\,,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2i\pi\langle y\,,\xi\rangle} g(y-x) e^{-2i\pi\langle x-y\,,\xi\rangle}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2i\pi\langle y\,,\xi\rangle} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x-y) e^{-2i\pi\langle x-y\,,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).\end{aligned}$$

3. Existe-t-il $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f * g = g$ pour tout $g \in L^1(\mathbb{R})$?
   Supposons qu'un tel $f \in L^1(\mathbb{R})$ existe. En passant en Fourier on obtient que, pour tout $g \in L^1(\mathbb{R})$: $(\widehat{f} - 1)\widehat{g} = 0$. Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et on peut parler des valeurs ponctuelles de $\widehat{f}$, et de même pour $\widehat{g}$.
   Supposons qu'il existe $\xi_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\widehat{f}(\xi_0) \neq 1$. Alors pour tout $g \in L^1(\mathbb{R})$ on a $\widehat{g}(\xi_0) = 0$. C'est absurde. En effet, il existe $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(\xi_0) = 1$, par exemple $\varphi : \xi \mapsto e^{-|\xi-\xi_0|^2}$. Comme $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui-même, il existe $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que $\widehat{g} = \varphi$. En particulier que $g \in L^1(\mathbb{R})$ ce qui fournit la contradiction recherchée, vu que $\widehat{g}(\xi_0) = \varphi(\xi_0) = 1$.
   Donc $\widehat{f}$ doit être la fonction constante égale à 1. C'est absurde car $\widehat{f}(\xi) \xrightarrow[|\xi|\to+\infty]{} 0$. Il n'existe donc pas de $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f * g = g$ pour tout $g \in L^1(\mathbb{R})$.
4. Déterminer les fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$ telles que $f * f = f$.
   Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f * f = f$. En passant en Fourier, on obtient que $\widehat{f}(\widehat{f} - 1) = 0$. Donc $\widehat{f}$ est une fonction continue à valeurs dans $\{0, 1\}$. Donc $\widehat{f} \equiv 0$ ou $\widehat{f} \equiv 1$. Comme $\widehat{f}$ tend vers 0 à l'infini, on a $\widehat{f} \equiv 0$ et donc $f \equiv 0$.

Exercice 6 (Non surjectivité de la transformée de Fourier)**.** On sait que la transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est un opérateur linéaire continu. Le but de cet exercice de montrer qu'il est injectif mais pas surjectif.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n = \mathbf{1}_{[-n,n]} * \mathbf{1}_{[-1,1]}$ où $\mathbf{1}_A$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $A \subset \mathbb{R}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $f_n \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et calculer $\|f_n\|_\infty$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculons $f_n = \mathbf{1}_{[-n,n]} * \mathbf{1}_{[-1,1]}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{1}_{[-n,n]}(y)\mathbf{1}_{[-1,1]}(x-y) = 1 \iff \begin{cases} -n \leqslant y \leqslant n \\ -1 \leqslant y - x \leqslant 1 \end{cases} \iff y \in [-n,n] \cap [x-1, x+1]$$

   et $\mathbf{1}_{[-n,n]}(y)\mathbf{1}_{[-1,1]}(x-y) = 0$ si $y \notin [-n,n] \cap [x-1,x+1]$. Donc

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-n,n]}(y)\mathbf{1}_{[-1,1]}(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{[-n,n]\cap[x-1,x+1]} \mathrm{d}y.$$

   Si $|x| \geqslant n+1$ alors $[-n,n] \cap [x-1,x+1] = \emptyset$ et on a donc $f_n(x) = 0$. Si $|x| \leqslant n-1$ alors $[x-1,x+1] \subset [-n,n]$ et $f_n(x) = 2$. Si $n-1 \leqslant x \leqslant n+1$, on a $-n \leqslant x-1 \leqslant n \leqslant x+1$ et donc $[-n,n] \cap [x-1,x+1] = [x-1,n]$. Dans ce cas, on obtient $f_n(x) = n+1-x$. Par le même raisonnement, on obtient $f_n(x) = n+1+x$ si $-n-1 \leqslant x \leqslant -n+1$. Finalement on a :

$$f_n : x \longmapsto \begin{cases} n+1+x & \text{si } -n-1 \leqslant x \leqslant -n+1, \\ 2 & \text{si } -n+1 \leqslant x \leqslant n-1, \\ n+1-x & \text{si } n-1 \leqslant x \leqslant n+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Cette fonction affine par morceaux est bien continue, comme on le voit en vérifiant que les expressions se recollent en $-n-1$, $-n+1$, $n-1$ et $n+1$.
   En particulier, on a $\|f_n\|_\infty = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Calculer $\widehat{f_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\mathbf{1}_{[-n,n]}$ et $\mathbf{1}_{[-1,1]} \in L^1(\mathbb{R})$, on a $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f_n} = \mathcal{F}(\mathbf{1}_{[-n,n]})\mathcal{F}(\mathbf{1}_{[-1,1]})$, d'après les questions 1 et 2 de l'exercice 5.
   Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\lambda > 0$, on peut définir $D_\lambda f : x \mapsto f(\frac{x}{\lambda})$. Alors on a $D_\lambda f \in L^1(\mathbb{R})$ et, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{D_\lambda f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f\Big(\frac{x}{\lambda}\Big) e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = \lambda \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\lambda\xi}\,\mathrm{d}x = \lambda \widehat{f}(\lambda\xi) = \lambda D_{\frac{1}{\lambda}} \widehat{f}(\xi).$$

   Notons $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, d'après l'exerice 1 question 3 $\widehat{\mathbf{1}_I} = \operatorname{sinc}$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{1}_{[-n,n]} = D_{2n}\mathbf{1}_I$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$D_{2n}\mathbf{1}_I(x) = 1 \iff \mathbf{1}_I\Big(\frac{x}{2n}\Big) = 1 \iff \Big|\frac{x}{2n}\Big| \leqslant \frac{1}{2} \iff |x| \leqslant n.$$

   Finalement, on obtient :

$$\widehat{f_n} = \widehat{D_{2n}\mathbf{1}_I}\,\widehat{D_2\mathbf{1}_I} = 4n\Big(D_{\frac{1}{2n}} \operatorname{sinc}\Big)\Big(D_{\frac{1}{2}} \operatorname{sinc}\Big) : \xi \mapsto \begin{cases} 4n & \text{si } \xi = 0, \\ \frac{\sin(2n\pi\xi)\sin(2\pi\xi)}{\pi^2\xi^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Vérifier que $\widehat{f_n} \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et montrer que $\|\widehat{f_n}\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question 1, la fonction $\widehat{f_n}$ est produit de deux dilatés de sinc et est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, l'expression ci-dessus montre que $\widehat{f_n}(\xi) = O\big(\xi^{-2}\big)$ lorsque $|\xi| \to +\infty$. Donc on a bien $\widehat{f_n} \in L^1(\mathbb{R})$.

Pour tout $\xi \in [0, \frac{1}{4}]$, on a $0 \leqslant 2\pi\xi \leqslant \frac{\pi}{2}$ et donc $\sin(2\pi\xi) \geqslant \frac{2}{\pi}(2\pi\xi) = 4\xi$. Donc,

$$\|\widehat{f_n}\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\sin(2n\pi\xi)||\sin(2\pi\xi)|}{\pi^2\xi^2} \,\mathrm{d}\xi \geqslant \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{|\sin(2n\pi\xi)||\sin(2\pi\xi)|}{\pi^2\xi^2} \,\mathrm{d}\xi \geqslant \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{4|\sin(2n\pi\xi)|}{\pi^2\xi} \,\mathrm{d}\xi.$$

On effectue le changement de variable $x = 2\pi n\xi$ dans la dernière intégrale pour obtenir :

$$\|\widehat{f_n}\|_1 \geqslant \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

4. Montrer que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est injective.
   Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si $\widehat{f} = 0$ alors $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et on peut appliquer la formule d'inversion de Fourier. On a donc $\check{f} = \widehat{\widehat{f}} = 0$. Donc $f = 0$. Comme $\mathcal{F}$ est linéaire, cela montre qu'elle est injective.
5. En déduire que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

   Indication. Raisonner par l'absurde en utilisant le théorème d'isomorphisme de Banach.

   On vient de montrer que $\mathcal{F}$ est injective. Par ailleurs, elle est continue de l'espace de Banach $\big(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\big)$ vers l'espace de Banach $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ (qui est complet car fermé de l'espace complet des fonctions continues bornées muni de $\|\cdot\|_\infty$).
   Supposons par l'absurde que $\mathcal{F}$ est surjective. Par le théorème d'isomorphisme de Banach, c'est alors un isomorphisme, et donc $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ est continue. Il existe donc $C > 0$ telle que, pour tout $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$:

$$C\|f\|_\infty \geqslant \left\|\mathcal{F}^{-1}(f)\right\|_1.$$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question 1 on a $f_n \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $\|f_n\|_\infty = 2$. Comme f_n et $\widehat{f_n} \in L^1(\mathbb{R})$, on peut appliquer la formule d'inversion de Fourier. Donc $\mathcal{F}(\widehat{f_n}) = \check{f}_n = f_n$ car f_n est paire. Donc $\widehat{f_n} = \mathcal{F}^{-1}(f_n)$ et la formule précédente assure alors que :

$$2C = C\|f_n\|_\infty \geqslant \left\|\mathcal{F}^{-1}(f_n)\right\|_1 = \|\widehat{f_n}\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

   où on a utilisé le résultat de la question 3. Cela fournit la contradiction recherchée. Donc $\mathcal{F}$ n'est pas surjective.

Exercice 7 (Densité des translatés d'une fonction)**.** Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $f_t : x \mapsto f(x - t)$ le t-translaté de f.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$, montrer que $\widehat{f_t} : \xi \mapsto e^{-2i\pi t\xi}\widehat{f}(\xi)$.
   On sait que cette formule est vraie si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, car dans ce cas $\widehat{f}$ et $\widehat{f_t}$ sont définies par des formules intégrales. On va conclure par la densité de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ (cet espace est bien dense car il contient $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).
   Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ telles que $\|f - f_n\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a $\|f_t - (f_n)_t\|_2 = \|f - f_n\|_2$, donc $(f_n)_t \xrightarrow[n\to+\infty]{} f_t$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Par continuité de la transformée de Fourier–Plancherel de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même, on a donc

$$\widehat{f_t} = \lim_{n\to+\infty} \widehat{(f_n)_t} = \lim_{n\to+\infty} e^{-2i\pi t\xi}\widehat{f_n} = e^{-2i\pi t\xi}\widehat{f}.$$

La dernière égalité est justifiée par le fait que

$$\begin{aligned}\left\|e^{-2i\pi t\cdot}\widehat{f}-e^{-2i\pi t\cdot}\widehat{f_n}\right\|_2^2&=\int_{\mathbb{R}}\left|e^{-2i\pi t\xi}\widehat{f}(\xi)-e^{-2i\pi t\xi}\widehat{f_n}(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{f}(\xi)-\widehat{f_n}(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi\\&=\left\|\widehat{f}-\widehat{f_n}\right\|_2^2=\left\|\widehat{f-f_n}\right\|_2^2=\|f-f_n\|_2^2\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.\end{aligned}$$

2. On suppose que $\widehat{f}$ s'annule sur un ensemble $A\subset\mathbb{R}$ de mesure strictement positive. Montrer qu'il existe $g\in\mathrm{Vect}(\{f_t\mid t\in\mathbb{R}\})^{\perp}\setminus\{0\}$.

   Soient $g\in L^2(\mathbb{R})$ et $t\in\mathbb{R}$. Comme $\mathcal{F}$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même, on a :

   $$\langle g\,,f_t\rangle=\langle\widehat{g}\,,\widehat{f_t}\rangle=\int_{\mathbb{R}}\widehat{g}(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi)}e^{2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}\xi. \tag{i}$$

   Supposons qu'il existe $A\subset\mathbb{R}$ de mesure positive telle que $\widehat{f}$ s'annule sur A. Quitte à remplacer A par un sous-ensemble, on peut supposer que A est de mesure strictement positive et finie. Alors $\mathbf{1}_A\in L^2(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ et donc il existe $g\in L^2(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ tel que $\widehat{g}=\mathbf{1}_A$. D'après l'équation (i), on a alors

   $$\langle g\,,f_t\rangle=\int_A\overline{\widehat{f}(\xi)}e^{2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}\xi=0$$

   pour tout $t\in\mathbb{R}$. Donc $g\in\mathrm{Vect}(\{f_t\mid t\in\mathbb{R}\})^{\perp}\setminus\{0\}$.
3. En déduire que si $\overline{\mathrm{Vect}(\{f_t\mid t\in\mathbb{R}\})}=L^2(\mathbb{R})$ alors, pour presque tout $\xi\in\mathbb{R}$, $\widehat{f}(\xi)\neq0$.

   Si $\mathrm{Vect}(\{f_t\mid t\in\mathbb{R}\})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ alors son orthogonal est nul. La contraposée de la question 2 montre alors que l'ensemble $\left\{\xi\in\mathbb{R}\;\middle|\;\widehat{f}(\xi)=0\right\}$ doit être négligeable.

Réciproquement, on suppose désormais que $\widehat{f}(\xi)\neq0$ pour presque tout $\xi\in\mathbb{R}$. Le but de ce qui suit est de montrer que, dans ce cas, $\mathrm{Vect}(\{f_t\mid t\in\mathbb{R}\})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

4. Soit $g\in\mathrm{Vect}(\{f_t\mid t\in\mathbb{R}\})^{\perp}$, justifier que $\widehat{g}\overline{\widehat{f}}\in L^1(\mathbb{R})$ et calculer sa transformée de Fourier.

   Comme f et $g\in L^2(\mathbb{R})$ on a également $\widehat{f}$ et $\widehat{g}\in L^2(\mathbb{R})$ et donc $\widehat{g}\overline{\widehat{f}}\in L^1(\mathbb{R})$. On peut donc calculer la transformée de Fourier de cette fonction grâce à la formule intégrale. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a :

   $$\mathcal{F}(\widehat{g}\overline{\widehat{f}})(t)=\int_{\mathbb{R}}\widehat{g}(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi)}e^{-2i\pi\xi t}\,\mathrm{d}\xi=\langle g\,,f_{-t}\rangle=0,$$

   d'après l'équation (i).
5. Conclure.

   Soit $g\in\mathrm{Vect}(\{f_t\mid t\in\mathbb{R}\})^{\perp}$, d'après la question 4 on $\mathcal{F}(\widehat{g}\overline{\widehat{f}})\equiv0$ et donc $\widehat{g}\overline{\widehat{f}}\equiv0$ par injectivité de la transformée de Fourier. Comme on a supposé que $\widehat{f}(\xi)\neq0$ pour presque tout ξ, on en déduit que $\widehat{g}(\xi)=0$ pour presque tout ξ. Donc $\widehat{g}=0$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et, par injectivité de $\mathcal{F}$ une fois de plus, on obtient $g=0$.

   Donc $\mathrm{Vect}(\{f_t\mid t\in\mathbb{R}\})^{\perp}=\{0\}$ et donc $\mathrm{Vect}(\{f_t\mid t\in\mathbb{R}\})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.