Université Paris-Saclay
2023 – 2024
Chargé de TD : Thomas Letendre.

Master Formation à l'Enseignement Supérieur
Analyse 2

Feuille 2 – Séries de Fourier

On identifie les fonctions 1-périodiques sur $\mathbb{R}$ avec les fonctions sur le cercle $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On munit $\mathbb{T}$ du quotient de la mesure de Lebesgue, notée $\mathrm{d}t$, de sorte que sous l'identification précédente on a :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \qquad \int_{\mathbb{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_A^{A+1} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pourvu que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ soit une fonction 1-périodique, mesurable, et positive ou localement intégrable.

Définition (Espaces L^p)**.** Soit $p \in [1, +\infty[$, on note $L^p(\mathbb{T})$ l'espace des $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ mesurables tels que $\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p\,\mathrm{d}t < +\infty$, modulo égalité presque partout. Il est muni de la norme $\|\cdot\|_p$ définie par : $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$ pour tout $f \in L^p(\mathbb{T})$.

Définition (Espaces $\mathcal{C}^k$)**.** Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note $\mathcal{C}^k(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ obtenues par passage au quotient d'une fonction 1-périodique de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ de la norme sup $\|\cdot\|_\infty$ définie par : $\|f\|_\infty = \max\limits_{t \in \mathbb{T}} |f(t)|$ pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$.

Notation.

- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $e_k : x \mapsto e^{2ik\pi x}$ de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{C}$ ou de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On appelle *polynômes trigonométriques* les combinaisons linéaires des $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.
- Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, on note $\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{e_k(t)}\,\mathrm{d}t$ son k-ième coefficient de Fourier.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ on note $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e_k$ la n-ième somme partielle de sa série de Fourier.
- Soit $N \in \mathbb{N}$ on note $\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f)$ la N-ième moyenne de Césaro des $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $D_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k$ le n-ième *noyau de Dirichlet*.
- Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note $K_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} D_n$ le N-ième *noyau de Féjer*.

Exercice 1 (Calculs de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$)**.** On considère la fonction 1-périodique f qui est définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.

   Tout d'abord, on a $\widehat{f}(0) = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}$.

   Soit maintenant $k \in \mathbb{Z}^*$, par deux intégrations par parties on obtient :

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 e^{-2i\pi kx}\,\mathrm{d}x &= \frac{i}{2k\pi}\left[x^2 e^{-2ik\pi x}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \frac{i}{k\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x e^{-2i\pi kx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4k\pi}\sin(k\pi) + \frac{1}{2k^2\pi^2}\left[x e^{-2ik\pi x}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2k^2\pi^2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi kx}\,\mathrm{d}x = \frac{\cos(k\pi)}{2k^2\pi^2} = \frac{(-1)^k}{2k^2\pi^2}.\end{aligned}$$

2. Prouver les trois formules suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12},\qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

La fonction f est continue et, d'après la question précédente, $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(k)|<+\infty$. Donc f est la somme uniforme de sa série de Fourier. En particulier, en $x=0$, on obtient

$$0=f(0)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(k)e_k(0)=\frac{1}{12}+\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\frac{(-1)^k}{2k^2\pi^2}=\frac{1}{12}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^2},$$

d'où on déduit $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$. En évaluant la valeur de f en $\frac{1}{2}$ on obtient :

$$\frac{1}{4}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(k)e_k\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{12}+\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\frac{(-1)^{2k}}{2k^2\pi^2}=\frac{1}{12}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{k^2},$$

d'où :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{k^2}=\pi^2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)=\frac{\pi^2}{6}.$$

Enfin, comme $f\in L^2(\mathbb{T})$, la formule de Parseval donne :

$$\frac{1}{144}+\frac{1}{2\pi^4}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^4}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(k)^2=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x^4\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\left[x^5\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{80}.$$

On a donc

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^4}=\pi^4\left(\frac{1}{40}-\frac{1}{72}\right)=\frac{\pi^4}{8}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)=\frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 2 (Produit de convolution)**.** Soient f et $g\in L^1(\mathbb{T})$, on définit leur *convolée* $f*g$ par :

$$f*g:x\longmapsto\int_{\mathbb{T}}f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $f*g\in L^1(\mathbb{T})$ et que $\|f*g\|_1\leqslant\|f\|_1\|g\|_1$. Vérifier que $f*g=g*f$.
   L'application $F:(x,t)\mapsto f(t)g(x-t)$ est mesurable sur $\mathbb{T}^2$ comme produit de composées de fonctions mesurables. D'après le théorème de Fubini–Tonelli on a donc :

$$\int_{\mathbb{T}^2}|f(t)||g(x-t)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{T}}|f(t)|\left(\int_{\mathbb{T}}|g(x-t)|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{T}}|f(t)|\|g\|_1\,\mathrm{d}t=\|f\|_1\|g\|_1<+\infty.$$

   Donc F est intégrable sur $\mathbb{T}^2$. Par le théorème de Fubini on a donc que $f*g:x\mapsto\int_{\mathbb{T}}F(x,t)\,\mathrm{d}t$ définit bien presque partout une fonction mesurable. De plus,

$$\int_{\mathbb{T}}|f*g(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{T}}\left|\int_{\mathbb{T}}f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbb{T}^2}|f(t)||g(x-t)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\|f\|_1\|g\|_1,$$

   donc $f*g\in L^1(\mathbb{T})$ et $\|f*g\|_1\leqslant\|f\|_1\|g\|_1$.
   Soit $x\in\mathbb{T}$, on calcule en utilisant des relevés sur $\mathbb{R}$ qui sont 1-périodiques :

$$g*f(x)=\int_0^1 g(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t=\int_{x-1}^{x}f(s)g(x-s)\,\mathrm{d}s=\int_0^1 f(s)g(x-s)\,\mathrm{d}s=f*g(x).$$

2. Exprimer les coefficients de Fourier de $f*g$ en fonction de ceux de f et g.
   Soit $k \in \mathbb{Z}$, la fonction $(x,t) \mapsto f(t)g(x-t)\overline{e_k}(x)$ est dominée par la fonction F précédente et est donc intégrable sur $\mathbb{T}^2$. On calcule par le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(k) &= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t \right) e^{-2ik\pi x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{T}^2} f(t)e^{-2ik\pi t} g(x-t)e^{-2ik\pi(x-t)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{e_k(t)} \left(\int_{\mathbb{T}} g(x-t)\overline{e_k(x-t)}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{e_k(t)}\widehat{g}(k)\,\mathrm{d}t = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k).\end{aligned}$$

3. Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, montrer que si $g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$ alors $f*g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$ et $(f*g)^{(k)} = f*g^{(k)}$.
   Rappelons que les fonctions f, g et $f*g$ peuvent également être vues comme des fonctions 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. La régularité $\mathcal{C}^k$ de $f*g$ est alors la régularité $\mathcal{C}^k$ au sens des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Dans la suite de cette question on travaille avec les fonctions sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f*g(x) = \int_0^1 f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 F(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

   Montrons que si g est continue alors $f*g$ aussi. Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $F(\cdot,t)$ est continue. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $F(x,\cdot)$ est mesurable. De plus on a la domination :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1], \qquad |F(x,t)| = |f(t)||g(x-t)| \leqslant \|g\|_\infty |f(t)|.$$

   Le terme de droite est intégrable et indépendant de x. On en déduit que l'intégrale à paramètre $f*g$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   Supposons maintenant que g est de classe $\mathcal{C}^1$. Dans ce cas, pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $F(\cdot,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $\frac{\partial F}{\partial x} : (x,t) \mapsto f(t)g'(x-t)$. On a donc la domination :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1], \qquad \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) \right| = |f(t)||g'(x-t)| \leqslant \|g'\|_\infty |f(t)|.$$

   Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres permet alors de conclure que $f*g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée égale à $f*g'$.
   On conclut par récurrence que si g est de classe $\mathcal{C}^k$ alors $f*g$ aussi et $(f*g)^{(k)} = f*g^{(k)}$.

Exercice 3 (Noyaux de Dirichlet et Féjer)**.** 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\int_{\mathbb{T}} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$ et que

$$\forall t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}, \qquad D_n(t) = \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}.$$

   Par définition de D_n on a :

$$\int_{\mathbb{T}} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{T}} \sum_{k=-n}^{n} e_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-n}^{n} \int_{\mathbb{T}} e_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{T}} 1\,\mathrm{d}t = 1.$$

   Soit maintenant $t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$, ou de façon équivalente $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a :

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2ik\pi t} = \frac{e^{2i(n+1)\pi t} - e^{-2in\pi t}}{e^{2i\pi t} - 1} = \frac{e^{2i\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t} - e^{-2i\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t}}{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}} = \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}.$$

   Notons que D_n est un polynôme trigonométrique donc est $\mathcal{C}^\infty$. La singularité en $t=0$ n'est donc qu'apparente, et $D_n(0) = \sum_{k=-n}^{k} e_k(0) = 2n+1$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}$, montrer que $\int_{\mathbb{T}} K_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$ et que

$$\forall t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}, \qquad K_N(t) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin((N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}\right)^2.$$

On va s'appuyer sur les calculs de la question précédente. Par définition de K_N,

$$\int_{\mathbb{T}} K_N(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\int_{\mathbb{T}} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Soit $t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$,

$$K_N(t) = \sum_{n=0}^{N}\frac{D_n(t)}{N+1} = \sum_{n=0}^{N}\frac{\sin((2n+1)\pi t)}{(N+1)\sin(\pi t)} = \frac{1}{(N+1)\sin(\pi t)}\Im\left(\sum_{n=0}^{N} e^{(2n+1)i\pi t}\right).$$

Puis,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} e^{(2n+1)i\pi t} &= \frac{e^{(2N+3)i\pi t} - e^{i\pi t}}{e^{2i\pi t}-1} = e^{i(N+1)\pi t}\frac{e^{i(N+1)\pi t} - e^{-i(N+1)\pi t}}{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}} \\ &= e^{i(N+1)\pi t}\frac{\sin((N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)},\end{aligned}$$

d'où on déduit que :

$$K_N(t) = \frac{\sin((N+1)\pi t)}{(N+1)\sin(\pi t)^2}\Im\left(e^{i(N+1)\pi t}\right) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin((N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}\right)^2.$$

Là encore la singularité en $t=0$ n'est qu'apparente puisque K_N est un polynôme trigonométrique, et on a $K_N(0) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(0) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} 2n+1 = N+1$.

3. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n(f) = f * D_n$ et $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sigma_N(f) = f * K_N$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{T}$ on a :

$$f * D_n(x) = \int_{\mathbb{T}} f(t)D_n(x-t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-n}^{n}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{2ik\pi(x-t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e_k(x) = S_n(f)(x).$$

Donc $f * D_n = S_n(f)$. Soit $N \in \mathbb{N}$, par bilinéarité du produit de convolution on a :

$$f * K_N = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} f * D_n = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f) = \sigma_n(f).$$

Exercice 4 (Théorème de Féjer $\mathcal{C}^0$)**.** 1. Soit $\eta \in]0, \frac{1}{2}[$, montrer que K_N converge uniformément vers 0 sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus]-\eta, \eta[$ lorsque $N \to +\infty$.
Soient $N \in \mathbb{N}$ et $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus]-\eta, \eta[$, d'après la question 2 de l'exercice 3 on a :

$$0 \leqslant K_N(t) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin((N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}\right)^2 \leqslant \frac{1}{(N+1)\sin(\pi t)^2}.$$

Comme $\sin(\pi\cdot)^2$ est paire, croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et $0 < \eta < \frac{1}{2}$, on a

$$0 < \sin(\pi\eta)^2 = \sin(-\pi\eta)^2 < \sin(\pi t)^2.$$

Donc, pour tout $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus]-\eta, \eta[$,

$$0 \leqslant K_N(t) \leqslant \frac{1}{(N+1)\sin(\pi\eta)^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

Donc K_N converge bien uniformément vers 0 sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus]-\eta, \eta[$ lorsque $N \to +\infty$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, montrer que $\sigma_N(f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{T}$. Ce résultat est appelé *théorème de Féjer C^0*.

   Soient $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{T}$, d'après la question 3 de l'exercice 3 on a :

   $$|\sigma_N(f)(x) - f(x)| = |f * K_N(x) - f(x)| = |K_N * f(x) - f(x)| = \left|\int_{\mathbb{T}} K_N(t) f(x-t)\,\mathrm{d}t - f(x)\right|,$$

   où on a aussi utilisé la commutativité du produit de convolution (voir question 1 exercice 2). On a montré dans l'exercice 3 question 2 que K_N est positif d'intégrale 1. Donc

   $$\begin{aligned}|\sigma_N(f)(x) - f(x)| = \left|\int_{\mathbb{T}} K_N(t)(f(x-t) - f(x))\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_{\mathbb{T}} K_N(t)|f(x-t) - f(x)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K_N(t)|f(x-t) - f(x)|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

   Dans la dernière ligne, on peut choisir d'identifier x avec un relevé dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, de sorte que x et $x - t \in [-1, 1]$ pour tout $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
   La fonction f est continue donc uniformément continue sur $[-1, 1]$. Soit $\varepsilon > 0$, soit $\eta > 0$ un module d'uniforme continuité de f associé à ε sur $[-1, 1]$. Pour tout $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus]-\eta, \eta[$,

   $$0 \leqslant K_N(t)|f(x-t) - f(x)| \leqslant 2\|K_N\|_{\infty, [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\setminus]-\eta,\eta[}\|f\|_\infty.$$

   Donc, comme $\int_{\mathbb{T}} K_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$ et K_N est positif,

   $$\begin{aligned}|\sigma_N(f)(x) - f(x)| &\leqslant 2(1-2\eta)\|K_N\|_{\infty, [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\setminus]-\eta,\eta[}\|f\|_\infty + \int_{-\eta}^{\eta} K_N(t)\varepsilon\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant 2\|K_N\|_{\infty, [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\setminus]-\eta,\eta[}\|f\|_\infty + \varepsilon.\end{aligned}$$

   D'après la question 1, le dernier terme est majoré par 2ε pour tout N assez grand, uniformément en $x \in \mathbb{T}$. Donc $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

   Remarque. La preuve qu'on vient faire utilise notamment le fait que $\int_{\mathbb{T}} |K_N(t)|\,\mathrm{d}t$ est bornée indépendamment de N. On sait qu'une telle propriété est fausse si on remplace $(K_N)_{N\in\mathbb{N}}$ par $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les noyaux de Féjer ont donc de meilleures propriétés qualitatives que les noyaux de Dirichlet, dont la positivité par exemple. Ce sont ces différences qualitatives qui expliquent pourquoi on a toujours convergence uniforme des $\sigma_N(f)$ vers f, mais que la série de Fourier d'une fonction continue peut diverger.

3. En déduire le *théorème de Weierstrass trigonométrique* : l'espace des polynômes trigonométriques est dense dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$.

   D'après la question 2, toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ est limite uniforme de la suite $(\sigma_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$. Cela donne le résultat voulu puisque $\sigma_N(f)$ est un polynôme trigonométrique de degré au plus N. En particulier on a montré que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ est dense dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$.

4. Prouver le lemme de Césaro : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de complexes telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^N u_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ell$.

   Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $K \in [\![1, N]\!]$, on a

   $$\left|\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^N u_n - \ell\right| \leqslant \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^N |u_n - \ell| = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^K |u_n - \ell| + \frac{1}{N+1}\sum_{n=K+1}^N |u_n - \ell|.$$

   Soit $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant K$. Soit $N_0 \geqslant K$ tel que $\sum_{n=0}^K |u_n - \ell| \leqslant (N_0+1)\varepsilon$. Pour tout $N \geqslant N_0$, le terme de droite dans l'équation ci-dessus est majoré par 2ε. D'où le résultat.

5. Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ et $x \in \mathbb{T}$. Montrer que si $\big(S_n(f)(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite est $f(x)$.

   On sait déjà par la question 2 que $\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^N S_n(f)(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} f(x)$, et cela quel que soit le comportement de la suite $\big(S_n(f)(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. La conclusion découle de l'unicité de la limite et du lemme de Césaro prouvé à la question 4.

Exercice 5 (Théorème de Féjer L^p)**.** Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{T})$. Pour tout $t \in \mathbb{T}$, on note $f_t : x \mapsto f(x-t)$ le t-translaté de f

1. Montrer que $\|f_t - f\|_p \xrightarrow[t\to 0]{} 0$. En déduire que $t \mapsto \|f_t - f\|_p$ est continue.

   Indication. Commencer par traiter le cas où la fonction f est continue.

   Suivant l'indication, commençons par considérer le cas où $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$. Soit $t \in \mathbb{T}$. Comme on s'intéresse au régime $t \to 0$, on peut supposer que t est le projeté d'un élément de $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, nécessairement unique, que l'on note également t. On a alors :

   $$\|f_t - f\|_p^p = \int_{\mathbb{T}} |f(x-t) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_0^1 |f(x-t) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x \leqslant \|f_t - f\|_{\infty,[0,1]}^p$$

   Comme f (en tant que fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$) est continue sur $[-2, 2]$, elle y est uniformément continue, ce qui signifie que le terme de droite tend vers 0 lorsque $t \to 0$. Le résultat est donc établi si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$.
   Soit maintenant $f \in L^p(\mathbb{T})$, pour tout $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ on a :

   $$\|f_t - f\|_p \leqslant \|f_t - g_t\|_p + \|g_t - g\|_p + \|f - g\|_p = 2\|f - g\|_p + \|g_t - g\|_p.$$

   On peut donc conclure par densité de $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ dans $L^p(\mathbb{T})$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ tel que $\|f - g\|_p \leqslant \varepsilon$. En utilisant la cas des fonctions continues pour cette fonction g, pour tout t assez proche de 0 on a $\|g_t - g\|_p \leqslant \varepsilon$. Donc, pour tout t assez proche de 0, on a $\|f_t - f\|_p \leqslant 3\varepsilon$. D'où $\|f_t - f\|_p \xrightarrow[t\to 0]{} 0$.
   Soient maintenant s et $t \in \mathbb{T}$, on a $\|f_t - f_s\|_p = \|(f_t - f) - (f_s - f)\|_p$. Donc

   $$\big|\|f_t - f\|_p - \|f_s - f\|_p\big| \leqslant \|f_t - f_s\|_p = \|f_{t-s} - f\|_p \xrightarrow[s\to t]{} 0.$$

   Donc $t \mapsto \|f_t - f\|_p$ est continue.

2. Montrer que $\|\sigma_N(f) - f\|_p \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. Ce résultat est appelé *théorème de Féjer L^p*.

   On réutilise une partie des calculs de la question 2 de l'exercice 4. Soit $N \in \mathbb{N}$, pour presque tout $x \in \mathbb{T}$ on a :

$$|\sigma_N(f)(x) - f(x)|^p = \left(\int_{\mathbb{T}} K_N(t)|f(x-t) - f(x)|\,\mathrm{d}t\right)^p.$$

   Comme le noyau K_N est positif et d'intégrale 1, la mesure à densité $K_N(t)\,\mathrm{d}t$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{T}$. Par le théorème de Jensen, on a :

$$|\sigma_N(f)(x) - f(x)|^p \leqslant \int_{\mathbb{T}} K_N(t)|f_t(x) - f(x)|^p\,\mathrm{d}t.$$

   Donc, par le théorème de Fubini–Tonelli

$$\begin{aligned}\|\sigma_N(f)(x) - f(x)\|_p^p &= \int_{\mathbb{T}}|\sigma_N(f)(x) - f(x)|^p\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} K_N(t)|f_t(x) - f(x)|^p\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{\mathbb{T}} K_N(t)\left(\int_{\mathbb{T}}|f_t(x) - f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{T}} K_N(t)\|f_t - f\|_p^p\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant K_N * g(0) = \sigma_N(g)(0),\end{aligned}$$

   où $g : t \mapsto \|f_{-t} - f\|_p^p$. La fonction g est continue d'après la question 1. D'après le théorème de Féjer $\mathcal{C}^0$ (voir la question 2 de l'exercice 4), on a alors $\sigma_N(g)(0) \xrightarrow[N\to+\infty]{} g(0) = 0$. Ainsi on a bien $\sigma_N(f) \xrightarrow[N\to+\infty]{} f$ dans $L^p(\mathbb{T})$.

3. En déduire que l'espace des polynômes trigonométriques est dense dans $L^p(\mathbb{T})$.

   Toute fonction $f \in L^p(\mathbb{T})$ est limite dans $L^p(\mathbb{T})$ de la suite de polynômes trigonométriques $(\sigma_N(f))_{N\geqslant 0}$.

4. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, montrer que $\widehat{f}(k) \xrightarrow[|k|\to+\infty]{} 0$. Ce résultat est le *lemme de Riemann–Lebesgue*.

   Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\left|\widehat{\sigma_N(f)}(k) - \widehat{f}(k)\right| = \left|\int_{\mathbb{T}}(\sigma_N(f)(t) - f(t))\overline{e_k(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|\sigma_N(f) - f\|_1 \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

   d'après la question 2. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|\sigma_N(f) - f\|_1 \leqslant \varepsilon$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|k| > N$ on a $\widehat{\sigma_N(f)}(k) = 0$ donc

$$\left|\widehat{f}(k)\right| = \left|\widehat{\sigma_N(f)}(k) - \widehat{f}(k)\right| \leqslant \|\sigma_N(f) - f\|_1 \leqslant \varepsilon.$$

   D'où le résultat.

5. Montrer que l'application $L^1(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ définie par $f \mapsto \left(\widehat{f}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est injective.

   Soient f et $g \in L^1(\mathbb{T})$. Si f et g ont les mêmes coefficients de Fourier, alors $\sigma_N(f) = \sigma_N(g)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Le théorème de Féjer dans $L^1(\mathbb{T})$ (voir question 2) et l'unicité de la limite montrent alors que $f = g$ dans $L^1(\mathbb{T})$.

Exercice 6 (Théorème de Jordan–Dirichlet)**.** Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $x \in \mathbb{T}$. On suppose que f admet des limites à gauche et à droite en x, notée $f(x_-)$ et $f(x_+)$ respectivement. On suppose également qu'il existe $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que :

$$\int_0^\alpha \left|\frac{f(x+t) - f(x_+)}{t}\right|\mathrm{d}t < +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_0^\alpha \left|\frac{f(x-t) - f(x_-)}{t}\right|\mathrm{d}t < +\infty.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $S_n(f)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n(f)(x) - \frac{f(x_-)+f(x_+)}{2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} \big(f(x+t) - f(x_+) + f(x-t) - f(x_-)\big)\,\mathrm{d}t.$$

On utilise les résultats de l'exercice 3 sur le noyau de Dirichlet et son lien avec les sommes partielles des séries de Fourier. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) = f * D_n(x) = D_n * f(x) &= \int_{\mathbb{T}} D_n(t) f(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} f(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} f(x-t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} f(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} \big(f(x+t)+f(x-t)\big)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

D'après la question 1 de l'exercice 3, l'intégrale de D_n sur une période vaut 1. Comme de plus D_n est une fonction paire, on en déduit que :

$$\frac{f(x_-)+f(x_+)}{2} = (f(x_-)+f(x_+)) \int_0^{\frac{1}{2}} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} \big(f(x_+)+f(x_-)\big)\,\mathrm{d}t.$$

On obtient le résultat souhaité en soustrayant cette seconde relation à la première.

2. Conclure grâce au lemme de Riemann–Lebesgue (voir la question 4 de l'exercice 5).

Soit $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $g(t) = \frac{1}{\sin(\pi t)}\big(f(x+t) - f(x_+) + f(x-t) - f(x_-)\big)$ si $t \neq 0$ et $g(0) = 0$. Montrons que $g \in L^1(\mathbb{T})$. En utilisant l'imparité de g, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} |g(t)|\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sin(\pi t)} \big|f(x+t) - f(x_+) + f(x-t) - f(x_-)\big|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^{\alpha} \frac{2t}{\sin(\pi t)} \left(\left|\frac{f(x+t)-f(x_+)}{t}\right| + \left|\frac{f(x-t)-f(x_-)}{t}\right| \right)\mathrm{d}t \\ &\qquad\qquad + \frac{2}{\sin(\pi\alpha)} \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}} |f(x+t)| + |f(x-t)| + |f(x_+)| + |f(x_-)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^{\alpha} \left|\frac{f(x+t)-f(x_+)}{t}\right| + \left|\frac{f(x-t)-f(x_-)}{t}\right|\mathrm{d}t + \frac{2\|f\|_1 + |f(x_+)| + |f(x_-)|}{\sin(\pi\alpha)} \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

En effet, pour tout $t \in]0,\alpha[$ on a $0 < 2t \leqslant \sin(\pi t)$ par concavité de $\sin(\pi\cdot)$ sur $[0,\frac{1}{2}]$.

D'après le résultat de la question 1, en utilisant l'imparité de g, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) - \frac{f(x_-)+f(x_+)}{2} &= \int_0^{\frac{1}{2}} g(t)\sin((2n+1)\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t)\sin((2n+1)\pi t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4i}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t)\left(e^{(2n+1)i\pi t} - e^{-(2n+1)i\pi t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4i}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t)\left(e^{i\pi t}\overline{e_{-n}(t)} - e^{-i\pi t}\overline{e_n(t)}\right)\mathrm{d}t = \frac{\widehat{g_+}(-n) - \widehat{g_-}(n)}{4i}, \end{aligned}$$

où $g_\pm : t \mapsto g(t)e^{\pm i\pi t}$. Comme $g \in L^1\big([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\big)$, c'est aussi le cas de g_+ et g_-. D'après le lemme de Riemann–Lebesgue, l'expression précédente tend donc vers 0 lorsque $n \to +\infty$.