Feuille 1 – Espaces de Hilbert

Exercice 1 (Projection sur un convexe fermé)**.** Soit $(H, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert réel. On rappelle que $C \subset H$ est dit *convexe* si pour tout $x, y \in C$ on a $[x, y] := \{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\} \subset C$.
Soit $C \subset H$ un convexe fermé non-vide. Un premier but de l'exercice est de prouver que pour tout $x \in H$ il existe un unique $p(x) \in C$ tel que :

$$\|x - p(x)\| = d(x, C) := \inf\{\|x - c\| \mid c \in C\}$$

1. Soient $x \in H$ et $p_1, p_2 \in C$ tels que $\|x - p_1\| = d(x, C) = \|x - p_2\|$. Montrer que $p_1 = p_2$.
   Supposons par l'absurde que $p_1 \neq p_2$. Soit $m = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ le milieu de $[p_1, p_2]$. Par convexité, on a $m \in C$ et donc $\|x - m\| \geqslant d(x, C)$. Comme x appartient à la médiatrice de $[p_1, p_2]$, on a que les droites (xm) et $(p_1p_2) = (mp_1)$ sont orthogonales. Donc, par Pythagore,

   $$d(x, C)^2 = \|x - p_1\|^2 = \|x - m\|^2 + \|m - p_1\|^2 \geqslant d(x, C)^2 + \|m - p_1\|^2.$$

   Donc $\|m - p_1\| = 0$ et donc $p_1 = m = p_2$.
2. Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C telle que $\|x - c_k\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} d(x, C)$. Montrer que $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $p(x) \in C$ tel que $\|x - p(x)\| = d(x, C)$. Conclure.

   Indication. Appliquer l'identité du parallélogramme aux vecteurs $x - c_i$ et $x - c_j$ avec $i, j \in \mathbb{N}$.

   Rappelons l'identité du parallélogramme : si a et $b \in H$ alors $\|a+b\|^2+\|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2+\|b\|^2)$.
   Soient i et $j \in \mathbb{N}$, suivant l'indication on applique cette identité à $x - c_i$ et $x - c_j$:

   $$\|2x - c_i - c_j\|^2 + \|c_i - c_j\|^2 = 2\big(\|x - c_i\|^2 + \|x - c_j\|^2\big),$$

   ce qui se ré-écrit :

   $$\|c_i - c_j\|^2 = 2\|x - c_i\|^2 + 2\|x - c_j\|^2 - 4\left\|x - \frac{c_i + c_j}{2}\right\|^2.$$

   On va utiliser cette relation pour montrer que la suite (c_k) est de Cauchy. Par convexité, $\frac{c_i+c_j}{2} \in C$. Donc $\left\|x - \frac{c_i+c_j}{2}\right\| \geqslant d(x, C)$ et donc :

   $$\|c_i - c_j\|^2 \leqslant 2\|x - c_i\|^2 + 2\|x - c_j\|^2 - 4d(x, C)^2.$$

   Soit $\varepsilon > 0$, comme $\|x - c_k\|$ tend vers $d(x, C)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$, $d(x, C)^2 \leqslant \|x - c_k\|^2 \leqslant d(x, C)^2 + \varepsilon$. Alors, pour tout i et $j \geqslant N$ on a $\|c_i - c_j\|^2 \leqslant 2\varepsilon$. Donc $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien une suite de Cauchy.
   Comme H est complet, cette suite converge vers une limite $p(x)$. Comme C est fermé on a $p(x) \in C$. Finalement, par continuité de la norme on a $d(x, C) = \lim_{k\to+\infty}\|x-c_k\| = \|x-p(x)\|$.
   On vient de montrer que pour tout $x \in H$ il existe un $p(x) \in C$ tel que $\|x - p(x)\| = d(x, C)$.
   L'unicité a été prouvée à la question 1.

On s'intéresse maintenant à la fonction $p : H \to C$.

3. Soit $x \in H$, montrer que $p(x)$ est l'unique élément de C vérifiant la condition suivante, dite *condition de l'angle obtus* :

$$\forall c \in C, \qquad \langle x - p(x)\,, c - p(x)\rangle \leqslant 0. \tag{1}$$

Commençons par vérifier que $p(x)$ vérifie cette condition. Soit $c \in C$, pour tout $t \in [0,1]$ on a $tc + (1-t)p(x) \in C$. Donc

$$\begin{aligned}\big\|x - \big(tc + (1-t)p(x)\big)\big\|^2 &= \big\|x - p(x) - t(c - p(x))\big\|^2 \\ &= \|x - p(x)\|^2 - 2t\langle x - p(x)\,, c - p(x)\rangle + t^2\|c - p(x)\|^2 \\ &\geqslant \|x - p(x)\|^2.\end{aligned}$$

On en déduit que $\langle x - p(x)\,, c - p(x)\rangle \leqslant \frac{t}{2}\|c - p(x)\|^2$ pour tout $t \in]0,1]$. En faisant $t \to 0$, on a $\langle x - p(x)\,, c - p(x)\rangle \leqslant 0$.

Passons à l'unicité. Soit $p \in C$ qui satisfait également la condition de l'angle obtus (1). On a alors les deux relations suivantes :

$$\langle x - p(x)\,, p - p(x)\rangle \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \langle p - x\,, p - p(x)\rangle = \langle x - p\,, p(x) - p\rangle \leqslant 0.$$

En sommant ces relations on obtient $\|p - p(x)\|^2 = 0$, c'est-à-dire $p = p(x)$.

4. Montrer que l'application $p : H \to C$ est 1-lipschitzienne.

Soient x et $y \in H$, d'après la question 3 on a :

$$\langle x - p(x)\,, p(y) - p(x)\rangle \leqslant 0, \qquad \text{et} \qquad \langle y - p(y)\,, p(x) - p(y)\rangle \leqslant 0.$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient :

$$0 \geqslant \langle x - p(x) - y + p(y)\,, p(y) - p(x)\rangle = \langle x - y\,, p(y) - p(x)\rangle + \|p(y) - p(x)\|^2.$$

On a alors, par Cauchy–Schwarz :

$$\|p(y) - p(x)\|^2 \leqslant \langle y - x\,, p(y) - p(x)\rangle \leqslant \|x - y\|\|p(x) - p(y)\|.$$

Si $p(x) = p(y)$ alors $\|p(x) - p(y)\| = 0 \leqslant \|x - y\|$, sinon on peut diviser par $\|p(x) - p(y)\|$ dans l'inégalité précédente. Dans les deux cas on obtient bien $\|p(x) - p(y)\| \leqslant \|x - y\|$.

5. En déduire que pour tout $x \in H \setminus C$ il existe $L \in H^*$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $c \in C$, $L(c) < a < L(x)$. On dit que l'hyperplan affine $L^{-1}(a)$ *sépare strictement* x et C.

L'hyperplan E orthogonal à $x - p(x)$ et passant par $p(x)$ sépare H en deux demi-espaces, car le corps de base est $\mathbb{R}$! On se convainc sur un dessin que la condition de l'angle obtus (1) signifie que l'un de ces demi-espaces contient C et l'autre contient x. Attention on parle ici des demi-espaces fermés car $p(x) \in E$. C'est-à-dire que E sépare C et x au sens large mais pas au sens strict. L'hyperplan qui nous intéresse va être un translaté de E.

Soit $L = \langle x - p(x)\,, \cdot\rangle \in H^*$. On a $L(x - p(x)) = \|x - p(x)\|^2 > 0$ car $x \notin C$. Par ailleurs, pour tout $c \in C$ on a $L(c - p(x)) \leqslant 0$ d'après la question 3. Donc, $L(c) \leqslant L(p(x)) < L(x)$ et il suffit de choisir $a \in]L(p(x)), L(x)[$.

6. Dans cette question, on suppose que C est un sous-espace vectoriel fermé de H. Soit $x \in H$, montrer que $p(x)$ est l'unique élément de C tel que :

$$\forall c \in C, \qquad \langle x - p(x)\,, c - p(x)\rangle = 0. \tag{2}$$

Commençons par remarquer qu'un sous-espace vectoriel est bien convexe, donc la projection $p : H \to C$ est bien définie.

Un élément $a \in C$ tel que $\langle x - a\,, c - a\rangle = 0$ pour tout $c \in C$ vérifie la condition de l'angle obtus (1). D'après la question 3, cet élément est unique et on a $a = p(x)$. Il s'agit de prouver que $p(x)$ vérifie effectivement la condition (2) lorsque C est un sous-espace vectoriel.

Soit $c \in C$, on sait que $\langle x - p(x)\,, c - p(x)\rangle \leqslant 0$ par la question 3. Supposons par l'absurde que $\langle x - p(x)\,, c - p(x)\rangle < 0$, et considérons c' le symétrique de c par rapport à $p(x)$. Cet élément est caractérisé par $c' - p(x) = -(c - p(x))$, en particulier

$$\langle x - p(x)\,, c' - p(x)\rangle = -\langle x - p(x)\,, c - p(x)\rangle > 0.$$

Par ailleurs $c' = p(x) - (c - p(x)) \in C$. L'inégalité précédente contredit donc (1). On a donc bien $\langle x - p(x)\,, c - p(x)\rangle = 0$ pour tout $c \in C$.

7. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble borélien. Montrer que $C = \left\{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; f_{|A} = 0\right\}$ est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Expliciter la projection $p : L^2(\mathbb{R}^n) \to C$.

L'espace C est le noyau de l'application linéaire $f \mapsto f_{|A}$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(A)$, où on a muni A de la restriction de la mesure de Lebesgue. Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\left\|f_{|A}\right\|^2_{L^2(A)} = \int_A f(x)^2 \,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^2 \,\mathrm{d}x = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

donc cette application linéaire est continue. Donc C est bien un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R}^n)$ muni de sa topologie d'espace de Hilbert.

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, déterminons $p(f)$. D'une part, comme $p(f) \in C$, on a $p(f)_{|A} = 0$. D'autre part, comme C est un espace vectoriel, $c \mapsto c - p(f)$ est une bijection de C dans C. La condition de la question 6 se reformule alors en disant que :

$$\forall c \in C, \qquad \langle f - p(f)\,, c\rangle = 0.$$

Notons $B = \mathbb{R}^n \setminus A$. Pour tout $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a $\mathbf{1}_B g \in C$ et donc :

$$0 = \langle f - p(f)\,, \mathbf{1}_B g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (f - p(f))(x)\mathbf{1}_B(x) g(x)\,\mathrm{d}x = \int_B (f - p(f))(x) g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ceci est valable pour $g = f - p(f)$, donc $\int_B (f(x) - p(f)(x))^2 \,\mathrm{d}x = 0$, et donc $p(f)_{|B} = f_{|B}$. Finalement $p : f \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n \setminus A} f$.

Exercice 2 (Orthogonal d'un sous-ensemble)**.** Soit $(H, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert réel. Pour tout $X \subset H$ on note $X^\perp = \left\{y \in H \;\middle|\; \forall x \in X, \langle x\,, y\rangle = 0\right\}$ l'*orthogonal* de X.

1. Soit $X \subset H$, montrer que $X^\perp$ est un sous-espace fermé de H.

Soit $x \in X$, alors $\{x\}^\perp = \{y \in H \mid \langle y\,, x\rangle = 0\}$ est le noyau de la forme linéaire continue $\langle\cdot\,, x\rangle$. C'est donc un hyperplan fermé. Donc $X^\perp = \bigcap_{x \in X} \{x\}^\perp$ est un sous-espace vectoriel comme intersection de sous-espaces vectoriels, et il est fermé comme intersection de fermés.

2. Si X est un sous-espace fermé de H, montrer que $H = X \oplus X^\perp$.
   Si $x \in X \cap X^\perp$ alors $\|x\|^2 = \langle x\,, x\rangle = 0$ et donc $x = 0$.
   Si X est un sous-espace fermé, en particulier c'est un convexe fermé. Soit $h \in H$ et soit $p \in X$ son projeté sur X. D'après la question 6 de l'exercice 1, pour tout $x \in X$ on a :
   $$0 = \langle h - p\,, x - p\rangle = \langle h - p\,, x\rangle + \langle h - p\,, 0 - p\rangle = \langle h - p\,, x\rangle$$
   donc $h = h - p + p$ avec $p \in X$ et $h - p \in X^\perp$. Donc $H = X \oplus X^\perp$.
3. Soit $X \subset H$ non vide, montrer que $(X^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Vect}(X)}$. Quand a-t-on $X = (X^\perp)^\perp$?
   On a $X \subset (X^\perp)^\perp$. En effet, soit $x \in X$, pour tout $y \in X^\perp$ on a $\langle x\,, y\rangle = 0$, donc $x \in (X^\perp)^\perp$. Comme $(X^\perp)^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H d'après la question 1, on a donc $\overline{\mathrm{Vect}(X)} \subset (X^\perp)^\perp$.
   Par ailleurs $X \subset \overline{\mathrm{Vect}(X)}$, et donc $\overline{\mathrm{Vect}(X)}^\perp \subset X^\perp$. Comme $\overline{\mathrm{Vect}(X)}$ est un sous-espace fermé de H, on a $H = \overline{\mathrm{Vect}(X)} \oplus \overline{\mathrm{Vect}(X)}^\perp$ d'après la question 2. Soit $h \in (X^\perp)^\perp$, il existe $x \in \overline{\mathrm{Vect}(X)}$ et $y \in \overline{\mathrm{Vect}(X)}^\perp$ tels que $h = x + y$. Comme $y \in X^\perp$ et $h \in (X^\perp)^\perp$ on a $0 = \langle h\,, y\rangle = \|y\|^2$ et donc $h = x \in \overline{\mathrm{Vect}(X)}$. Donc $(X^\perp)^\perp \subset \overline{\mathrm{Vect}(X)}$, ce qui prouve l'égalité.
   Ainsi on $(X^\perp)^\perp = X$ si et seulement si $X = \overline{\mathrm{Vect}(X)}$, c'est-à-dire si et seulement si X est un sous-espace vectoriel fermé de H.
4. Montrer que $X^\perp = \{0\}$ si et seulement si $\mathrm{Vect}(X)$ est dense dans H. Donner un exemple de partie $X \subset H$ telle que $X^\perp = \{0\}$ et $\mathrm{Vect}(X) \neq H$, dans le cas où H est séparable.
   D'après les questions 1 et 3,
   $$X^\perp = \{0\} \iff (X^\perp)^\perp = H \iff \overline{\mathrm{Vect}(X)} = H.$$
   Si H est de dimension finie, pour tout $X \subset H$ tel que $X^\perp = \{0\}$ on aura $\overline{\mathrm{Vect}(X)} = H$. Or $\mathrm{Vect}(X)$ est un sous-espace fermé de H, donc $\mathrm{Vect}(X) = H$. On ne peut donc pas construire de contre-exemple dans ce cas.
   Si H est de dimension infinie, comme on le suppose séparable, il admet une base de Hilbert $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On pose $X = \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Montrons que X convient. Soit $y \in X^\perp$, comme $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille totale de H, on a $y = \sum_{k\in\mathbb{N}}\langle y\,, e_k\rangle e_k = 0$. Donc $X^\perp = \{0\}$. Par ailleurs, $\mathrm{Vect}(X) \neq H$, car
   $$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k} e_k \in H \setminus \mathrm{Vect}(\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}).$$
5. Démontrer le théorème de représentation de Riesz : pour toute forme linéaire continue $L \in H^*$, il existe un unique $\ell \in H$ tel que $L = \langle \cdot\,, \ell\rangle$.
   Soit $L \in H^*$. Si $L = 0$ alors $L = \langle \cdot\,, 0\rangle$. Sinon, $\ker(L)$ est un hyperplan fermé de H. La restriction de L est un isomorphisme de $\ker(L)^\perp$ vers $\mathbb{R}$. Soit x l'unique élément de $\ker(L)^\perp$ tel que $L(x) = 1$. Pour tout $h \in H$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in \ker(L)$ tels que $h = \lambda x + y$. On a alors :
   $$L(h) = \lambda L(x) + L(y) = \lambda = \left\langle \lambda x + y\,, \frac{x}{\|x\|^2}\right\rangle = \left\langle h\,, \frac{x}{\|x\|^2}\right\rangle.$$
   Donc $\ell = \dfrac{x}{\|x\|^2}$ convient.
   Si $\langle \cdot\,, \ell_1\rangle = L = \langle \cdot\,, \ell_2\rangle$, alors $\ell_2 - \ell_1 \in H^\perp = \{0\}$, ce qui établit l'unicité.

Exercice 3 (Convergence faible)**.** Soit $(H, \langle \cdot \,, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert réel. Soient $x \in H$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de H, on dit que (x_k) *converge faiblement* vers x, et on note $x_k \rightharpoonup x$, lorsque :

$$\forall h \in H, \qquad \langle x_k \,, h\rangle \xrightarrow[k\to+\infty]{} \langle x \,, h\rangle. \tag{3}$$

1. Soient $x \in H$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x$ pour la norme. Montrer que $x_k \rightharpoonup x$.

   Pour tout $h \in H$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

   $$|\langle x_k \,, h\rangle - \langle x \,, h\rangle| = |\langle x_k - x \,, h\rangle| \leqslant \|x_k - x\|\|h\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

2. Montrer qu'une suite faiblement convergente dans H est bornée pour la norme.

   Indication. Utiliser le théorème Banach–Steinhaus.

   Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de H qui converge faiblement vers un certain $x \in H$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $L_k = \langle \cdot \,, x_k\rangle \in H^*$.

   Soit $h \in H$, la suite $(L_k(h))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\langle h \,, x\rangle$, donc elle est bornée. Par le théorème de Banach–Steinhaus, il existe $M \geqslant 0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|L_k\| \leqslant M$, où $\|L_k\|$ est la norme d'opérateur de L_k associée à la norme sur H. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $x_k \neq 0$, on a :

   $$\|x_k\| = \left| \left\langle \frac{x_k}{\|x_k\|} \,, x_k \right\rangle \right| = \left| L_k\left(\frac{x_k}{\|x_k\|}\right) \right| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} |L_k(x)| = \|L_k\| \leqslant M.$$

   Donc la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Dans la suite, on va prouver une réciproque partielle à ce résultat : si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée alors on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente. Soit donc $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite bornée.

3. Construire $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite extraite de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\langle x_k \,, y_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge lorsque $n \to +\infty$.

   Indication. On pourra penser à utiliser un procédé diagonal de Cantor.

   Soit $M \geqslant 0$ tel que $\|x_k\| \leqslant M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après Cauchy–Schwarz on a $|\langle x_k \,, x_l\rangle| \leqslant M^2$ pour tout $k, l \in \mathbb{N}$.

   On va construire la suite (y_n) par un procédé diagonal. D'après ce qu'on vient de dire, la suite $(\langle x_0 \,, x_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$. On peut donc en extraire une sous-suite convergente, c'est-à-dire, il existe $\varphi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(\langle x_0 \,, x_{\varphi_0(k)}\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ converge lorsque $k \to +\infty$.

   Soit $N \in \mathbb{N}$ et supposons construites $\varphi_0, \dots, \varphi_N$ strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et telles que, pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$, la suite $\big(\langle x_i \,, x_{\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_N(k)}\rangle\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge lorsque $k \to +\infty$. Comme précédemment, $(\langle x_{N+1} \,, x_{\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_N(k)}\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{R}$ et on peut donc en extraire une sous-suite convergente. Il existe donc $\varphi_{N+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\langle x_{N+1} \,, x_{\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_{N+1}(k)}\rangle$ converge lorsque $k \to +\infty$. Alors, pour tout $i \in \{0, \dots, N+1\}$, la suite $\big(\langle x_i \,, x_{\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_{N+1}(k)}\rangle\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge lorsque $k \to +\infty$.

   On en conclut, par récurrence, qu'il existe une suite $(\varphi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ d'extractions telle que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$, la suite $\big(\langle x_i \,, x_{\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_N(k)}\rangle\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. On définit alors $y_n = x_{\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_n(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $N \in \mathbb{N}$, la suite $(y_n)_{n\geqslant N}$ est une sous-suite extraite de $(x_{\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_N(k)})_{k\geqslant N}$ et donc $\langle x_N \,, y_n\rangle$ converge lorsque $n \to +\infty$. D'où le résultat.

4. Soit $h \in H$, montrer que la suite $(\langle h \,, y_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. On notera $L(h)$ sa limite.

Indication. Se ramener au cas où h est dans $X = \overline{\mathrm{Vect}(\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\})}$.

Soit $h \in H$. Comme X est un sous-espace fermé, $H = X \oplus X^\perp$ et on peut décomposer $h = x + y$ selon cette somme directe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle h\,, y_n\rangle = \langle x\,, y_n\rangle$ car $y_n \in X$. Quitte à remplacer h par x, on est ramené au cas $h \in X$.

Supposons donc que $h \in X$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \mathrm{Vect}(\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\})$ tel que $\|h - x\| \leqslant \varepsilon$. Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}|\langle h\,, y_m\rangle - \langle h\,, y_n\rangle| &\leqslant |\langle h - x\,, y_m\rangle| + |\langle x\,, y_m\rangle - \langle x\,, y_n\rangle| + |\langle h - x\,, y_n\rangle|\\ &\leqslant 2\varepsilon M + |\langle x\,, y_m\rangle - \langle x\,, y_n\rangle|,\end{aligned}$$

par Cauchy-Schwarz, car $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et donc bornée par M.

Comme $x \in \mathrm{Vect}(\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\})$, il existe une partie $I \subset \mathbb{N}$ finie et des scalaires $(a_i)_{i\in I}$ tels que $x = \sum_{i\in I} a_i x_i$. Alors,

$$|\langle x\,, y_m\rangle - \langle x\,, y_n\rangle| \leqslant \sum_{i\in I} |a_i| |\langle x_i\,, y_m\rangle - \langle x_i\,, y_n\rangle|.$$

Chacune des suites $(\langle x_i\,, y_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $i \in I$, est convergente donc de Cauchy. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \in I$, pour tout $m, n \geqslant N$, $|\langle x_i\,, y_m\rangle - \langle x_i\,, y_n\rangle| \leqslant \varepsilon$.

Pour tout $m, n \geqslant N$ on a donc $|\langle h\,, y_m\rangle - \langle h\,, y_n\rangle| \leqslant \varepsilon(2M + \sum_{i\in I}|a_i|)$. Donc la suite $(\langle h\,, y_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, et donc elle converge dans $\mathbb{R}$ vers une limite $L(h)$.

5. Montrer que L est une forme linéaire continue. Conclure.

   Soient $h, k \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

   $$L(h + \lambda k) = \lim_{n\to+\infty} \langle h + \lambda k\,, y_n\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle h\,, y_n\rangle + \lambda\langle k\,, y_n\rangle = L(h) + \lambda L(k).$$

   Donc L est bien une forme linéaire.

   Soit $h \in H$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|\langle h\,, y_n\rangle| \leqslant \|h\|\|y_n\| \leqslant M\|h\|$ par Cauchy–Schwarz. En faisant $n \to +\infty$, on obtient $|L(h)| \leqslant M\|h\|$. Donc L est continue de norme inférieure à M. D'après le théorème de représentation de Riesz (voir la question 5 de l'exercice 2), il existe $y \in H$ tel que $L = \langle \cdot\,, y\rangle$.

   Par définition de L (voir question 4), pour tout $h \in H$ on a $\langle h\,, y_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} L(h) = \langle h\,, y\rangle$. Donc la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers y.

6. Construire une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de H telle que $x_k \rightharpoonup 0$ mais qui ne converge pas pour la norme.

   Encore une fois ce n'est pas possible si H est de dimension finie. En effet, dans ce cas la convergence faible implique la convergence des composantes dans une base orthonormée, donc la convergence au sens de l'unique topologie normée.

   Si H est de dimension infinie, considérons une suite orthonormée $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$, par exemple une base de Hilbert de H s'il est séparable. Pour tout $k \neq l$ on a $\|e_k - e_l\|^2 = 2$. Donc $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy et donc n'est pas convergente dans H.

   Montrons que $e_k \rightharpoonup 0$. Soit $V = \overline{\mathrm{Vect}(\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\})}$, on a $H = V \oplus V^\perp$ d'après la question 2 de l'exercice 2. Soit $h \in H$, on décompose $h = x + y$ avec $x \in V$ et $y \in V^\perp$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\langle h\,, e_k\rangle = \langle x\,, e_k\rangle$. Par ailleurs $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille totale de V et donc $x = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle x\,, e_k\rangle e_k$. Donc $\|x\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle x\,, e_k\rangle|^2 < +\infty$, et donc $\langle h\,, e_k\rangle = \langle x\,, e_k\rangle \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

   Donc pour tout $h \in H$, $\langle h\,, e_k\rangle \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, et donc $e_k \rightharpoonup 0$.

Exercice 4 (Minimisation d'une fonctionnelle convexe)**.** Soit $(H, \langle \cdot\,,\cdot \rangle)$ un espace de Hilbert réel. Soit $F : H \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $F(x) \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to +\infty$. On suppose que F est *convexe*, c'est-à-dire que : pour tout $x, y \in H$ et $t \in [0,1]$ on a $F(tx+(1-t)y) \leqslant tF(x)+(1-t)F(y)$. Le but de l'exercice est de prouver que F atteint un minimum.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, on note $C_a = F^{-1}(]-\infty, a])$. Montrer que C_a est fermé, borné et convexe.

   D'une part C_a est la préimage du fermé $]-\infty, a]$ par l'application continue F, donc C_a est fermé. D'autre part, comme $F(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, il existe $M \geqslant 0$ tel que si $\|x\| \geqslant M$ alors $F(x) > a$. Par contraposée, si $x \in C_a$ alors $F(x) \leqslant a$ et donc $\|x\| \leqslant M$. Donc C_a est borné.

   Enfin, concernant la convexité, soient $x, y \in C_a$ et soit $t \in [0,1]$, on a :

   $$F(tx + (1-t)y) \leqslant tF(x) + (1-t)F(y) \leqslant ta + (1-t)a = a.$$

   Donc $tx + (1-t)y \in C_a$ et donc C_a est convexe. Notons que C_a peut être vide.

2. Prouver qu'il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de H telle que $F(x_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \inf F$ et qui converge faiblement vers une limite $x \in H$.

   Par définition de l'infimum, il existe une suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de H telle que $F(y_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \inf F$. La suite $(F(y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc elle est bornée par un certain $a \in \mathbb{R}$. Donc $y_k \in C_a$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après la question 1, la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans H.

   D'après la conclusion de l'exercice 3, on peut donc extraire de (y_k) une sous-suite (x_k) faiblement convergente, qui est la suite recherchée.

3. Soit $a > \inf F$, on note p la projection sur le convexe fermé C_a. En utilisant la condition de l'angle obtus (1), montrer que $x = p(x)$.

   Comme on a $a > \inf F$, on sait que C_a est un convexe fermé (voir question 1) non-vide. On a donc une projection $p : H \to C_a$ bien définie, que l'on a étudiée dans l'exercice 1.

   Comme $F(x_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \inf F$, on a $x_k \in C_a$ pour tout k assez grand. D'après la condition de l'angle obtus, pour tout k assez grand, on a :

   $$\langle x - p(x)\,, x_k\rangle - \langle x - p(x)\,, p(x)\rangle = \langle x - p(x)\,, x_k - p(x)\rangle \leqslant 0.$$

   En passant à la limite, comme $x_k \rightharpoonup x$, on obtient $\|x - p(x)\|^2 = 0$ et donc $x = p(x)$.

4. En déduire que $F(x) = \inf F$.

   Soit $a > \inf F$, la question 3 montre que $x \in C_a$, c'est-à-dire $F(x) \leqslant a$. Comme c'est valable pour tout $a > \inf F$, on obtient bien $F(x) \leqslant \inf F$ et donc $F(x) = \inf F$. Finalement, on a montré que F admet un minimum global.