Université Paris-Saclay
2023 – 2024

Master Mathématiques et Applications
Distributions et Analyse de Fourier

Chargés de TD : Blanche Buet et Thomas Letendre.

Feuille 9 – Formule(s) de Green

Exercice 1 (Le cas d'un hyperplan)**.** Soit $H \subset \mathbb{R}^d$ un hyperplan (affine) muni de sa mesure superficielle σ. On choisit un repère orthonormé (affine) afin d'avoir $H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_d = 0\}$. On considère l'ouvert $V = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_d > 0\}$, calculer "à la main" $\partial_j \mathbf{1}_V$ pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$.
On a bien $\mathbf{1}_V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. De plus, la mesure superficielle σ sur H s'identifie à la mesure de Lebesgue sur H : dans notre choix de coordonnées $\mathrm{d}\,\sigma = \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{d-1}$.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $j \in \{1, \dots, d\}$, comme $\partial_j \varphi \in L^1(V)$, on peut appliquer le théorème de Fubini,

$$\langle \partial_j \mathbf{1}_V \,, \varphi \rangle = -\int_V \partial_j \varphi = -\int_{x_1 \in \mathbb{R}} \dots \int_{x_{d-1} \in \mathbb{R}} \int_{x_d = 0}^{+\infty} \partial_j \varphi(x_1, \dots, x_d) \,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{d-1} \,\mathrm{d}x_d \,.$$

Si $j = d$, on a

$$\int_{x_d = 0}^{+\infty} \partial_d \varphi(x_1, \dots, x_d) \,\mathrm{d}x_d = -\varphi(x_1, \dots, x_{d-1}, 0)$$

de sorte que

$$\langle \partial_d \mathbf{1}_V \,, \varphi \rangle = \int_{x = (x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}} \varphi(x, 0) \,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{d-1} = \int_{y \in H} \varphi(y) \,\mathrm{d}\,\sigma(y) = \langle \sigma \,, \varphi \rangle \,,$$

et ainsi $\partial_d \mathbf{1}_V = \sigma$. Si maintenant $1 \leqslant j \leqslant d-1$,

$$\int_{x_j = -\infty}^{+\infty} \partial_j \varphi(x_1, \dots, x_d) \,\mathrm{d}x_j = 0$$

de sorte que $\langle \partial_j \mathbf{1}_V \,, \varphi \rangle = 0$ et ainsi $\partial_j \mathbf{1}_V = 0$.
Comme le vecteur normal unitaire extérieur N à V satisfait $N_j = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant d-1$ et $N_d = -1$, on retrouve bien $\partial_j \mathbf{1}_V = -N_j \sigma$.

Exercice 2 (IPP : la formule de Gauss–Green)**.** Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert à bord lisse et $N : \partial\Omega \to \mathbb{S}^{d-1}$ la normale unitaire sortante de Ω. On note σ la mesure superficielle de $\partial\Omega$. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, montrer que pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$,

$$\int_\Omega \psi \partial_j \varphi \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \psi \varphi N_j \,\mathrm{d}\,\sigma - \int_\Omega \varphi \partial_j \psi \,\mathrm{d}x \,.$$

D'après le cours $\partial_j \mathbf{1}_\Omega = -N_j \sigma$. On a ainsi

$$\langle \mathbf{1}_\Omega \,, \partial_j(\psi\varphi) \rangle = -\langle \partial_j \mathbf{1}_V \Omega \,, \psi\varphi \rangle = \langle N_j \sigma \,, \psi\varphi \rangle$$

c'est-à-dire

$$\int_\Omega \psi \partial_j \varphi + \varphi \partial_j \psi \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \psi \varphi N_j \,\mathrm{d}\,\sigma$$

Notation. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, on note $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ si u est la restriction d'une fonction $\widetilde{u} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, ou de façon équivalente $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de $\overline{\Omega}$. Si Ω est borné, on peut en fait supposer $\widetilde{u} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 3 (Formules de Green pour Δ)**.**

1. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné non vide à bord lisse et σ la mesure superficielle de $\partial\Omega$. On note $N : \partial\Omega \to \mathbb{S}^{d-1}$ la normale unitaire sortante de Ω. Prouver les formules suivantes, appelées respectivement première et seconde formule de Green : pour tout u, $v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$,

$$\int_\Omega u\ \Delta v \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\ \nabla v \cdot N \,\mathrm{d}\sigma - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

$$\int_\Omega (u\ \Delta v - v\ \Delta u) \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} (u\ \nabla v - v\ \nabla u) \cdot N \,\mathrm{d}\sigma. \tag{2}$$

Commençons par prouver la formule (1). Soient u, $v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. On a

$$\int_\Omega u\ \Delta v \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^d \int_\Omega u(x)\partial_i^2 v(x) \,\mathrm{d}x.$$

D'après la formule de Gauss-Green appliquée à u et $\partial_i v$ (voir exercice 2), on a pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$,

$$\int_\Omega u(x)\partial_i^2 v(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} N_i(x)u(x)\partial_i v(x) \,\mathrm{d}\sigma(x) - \int_\Omega \partial_i u(x)\partial_i v(x) \,\mathrm{d}x.$$

On obtient la formule (1) en sommant cette relation sur $i \in \{1, \cdots, d\}$.
On peut faire la différence entre la formule (1) et la même formule où les rôles de u et v sont échangés. Les intégrales de $\nabla u \cdot \nabla v$ sur Ω se compensent, et on obtient exactement (2).

2. Soit $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\Delta v = 0$ si et seulement si pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert borné non vide à bord lisse :

$$\int_{\partial\Omega} \nabla v \cdot N \,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

Si v est harmonique, pour tout ouvert borné $\Omega \neq \emptyset$ à bord lisse, on peut appliquer (1) avec v et $u \equiv 1$. On obtient :

$$0 = \int_\Omega u\Delta v \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\nabla v \cdot N \,\mathrm{d}\sigma - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \nabla v \cdot N \,\mathrm{d}\sigma.$$

Inversement, si $\int_{\partial\Omega} \nabla v \cdot N \,\mathrm{d}\sigma = 0$ pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert borné non vide à bord lisse, le même calcul montre que $\int_\Omega \Delta v(x) \,\mathrm{d}x = 0$ pour tout tel Ω. Comme v est $\mathcal{C}^\infty$, la fonction Δv est continue. Si elle n'était pas nulle, il existerait une boule ouverte sur laquelle elle est de signe strict constant et d'intégrale nulle, ce qui est absurde. Donc v est harmonique.

3. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert connexe borné non vide à bord lisse et $v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ une fonction harmonique dans Ω telle que $v_{|\partial\Omega} = 0$. Montrer que $v = 0$.
On applique la formule (1) avec $u = v$. On obtient :

$$0 = \int_\Omega v\ \Delta v \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v\nabla v \cdot N \,\mathrm{d}\sigma - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \|\nabla v\|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Donc ∇v est nulle. Comme on a supposé Ω connexe, on a donc que v est constante sur Ω. Par ailleurs, v est continue sur $\overline{\Omega}$ et $v_{\partial\Omega} = 0$, de sorte que $v = 0$.

4. (*facultatif*) Même question, mais sans supposer que Ω est connexe.

   Le début du raisonnement de la question 3 reste valable. On obtient de nouveau $\nabla v \equiv 0$ sur Ω. Donc v est localement constante, donc constante sur chacune de ses composantes connexes.

   Soit Ω_0 l'une des composantes connexes de Ω. Comme Ω est borné non vide, Ω_0 aussi. Vérifions que Ω_0 est ouvert (c'est une conséquence de la locale connexité de $\mathbb{R}^d$). Soit $x \in \Omega_0$ et soit $B \subset \Omega$ une boule ouverte contenant x. Comme B et Ω_0 sont connexes et $x \in B \cap \Omega_0 \neq \emptyset$, il vient que $B \cup \Omega_0$ connexe et de plus $\Omega_0 \subset B \cup \Omega_0 \subset \Omega$, par maximalité de Ω_0 pour l'inclusion, $B \subset \Omega_0$ est un voisinage de x dans Ω_0.

   Vérifions à présent que $\partial\Omega_0 \neq \emptyset$. Comme Ω_0 est ouvert, $\partial\Omega_0 = \overline{\Omega_0} \setminus \Omega_0$ et si on avait $\partial\Omega_0 = \emptyset$, on aurait $\Omega_0 = \overline{\Omega_0}$ ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^d$ connexe donc $\Omega_0 \in \{\emptyset, \mathbb{R}^d\}$ ce qui est impossible puisque Ω_0 est borné et non vide.

   Il nous reste à vérifier que $\partial\Omega_0 \subset \partial\Omega$ (à nouveau conséquence de la locale connexité de $\mathbb{R}^d$). Soit $x \in \overline{\Omega_0} \cap \Omega$ et soit $B \subset \Omega$ une boule ouverte contenant x. On a alors $B \cap \Omega_0 \neq \emptyset$ (sinon $\Omega_0 \subset \Omega \setminus B$ fermé et par définition de l'adhérence, $\overline{\Omega_0} \subset \Omega \setminus B$ incompatible avec $x \in \overline{\Omega_0} \cap B$) et par conséquent $B \cup \Omega_0$ est connexe, par maximalité de Ω_0, $B \cup \Omega_0 \subset \Omega$ implique $B \subset \Omega_0$ et donc $x \in \Omega_0$. Par contraposée, si $x \in \overline{\Omega_0} \setminus \Omega_0$, alors $x \notin \Omega$ et donc $x \in \overline{\Omega} \setminus \Omega = \partial\Omega$ ($\overline{\Omega_0} \subset \overline{\Omega}$).

   Comme v est constant sur Ω_0, continue sur $\overline{\Omega_0}$ et nulle sur $\partial\Omega_0 \subset \partial\Omega$, $\partial\Omega_0 \neq \emptyset$, on a $v_{|\Omega_0} = 0$. Comme Ω_0 est une composante connexe quelconque de Ω, on en déduit que $v = 0$.

Notation. Pour tout $r > 0$, on note $B_r = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| < r\right\}$ et $S_r = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = r\right\}$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. On note σ_r la mesure superficielle de la sphère S_r. Enfin, on notera $N : x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ dans S_1 le champ de vecteurs unitaires radial issu de 0.

À toute fin utile, on rappelle les formules suivantes qui ont été établies dans le TD8 :

- pour tout $r > 0$, $\sigma_r(S_r) = r^{d-1}\sigma_1(S_1)$,
- $\sigma_1(S_1) = d \cdot \mathrm{Vol}(B_1)$.

Exercice 4 (Formules de la moyenne)**.** Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, on définit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{C}$ par :

$$g : r \longmapsto \frac{1}{r^{d-1}} \int_{S_r} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_r(x).$$

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $g' : r \mapsto \dfrac{1}{r^{d-1}} \displaystyle\int_{S_r} \nabla u(x) \cdot N(x)\, \mathrm{d}\sigma_r(x)$.

   D'après l'exercice 3 du TD8, pour tout $r > 0$, $g(r) = \int_{S_1} u(r\theta)\, \mathrm{d}\sigma_1(\theta)$, ce qui permet de se ramener à un domaine d'intégration indépendant de r.

   Soit $h :]0, +\infty[\times S_1 \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $h : (r, \theta) \mapsto u(r\theta)$. On veut dériver l'intégrale à paramètre $g : r \mapsto \int_{S_1} h(r, \theta)\, \mathrm{d}\sigma_1(\theta)$.

   - pour tout $r > 0$, $h(r, \cdot)$ est continue donc mesurable ;
   - pour tout $\theta \in S_1$, $h(\cdot, \theta) : r \mapsto u(r\theta)$ est $\mathcal{C}^1$ et $\partial_r h : (r, \theta) \mapsto D_{r\theta} u \cdot \theta = \nabla u(r\theta) \cdot \theta$;
   - soit $M > 0$, sur $]0, M[\times S_1$, on a $|\partial_r h| \leqslant \|\nabla u\|_{\infty, \overline{B_M}}$ et cette constante est intégrable.

   Donc g est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, M[$ de dérivée

   $$g' : r \mapsto \int_{S_1} \nabla u(r\theta) \cdot \theta\, \mathrm{d}\sigma_1(\theta) = \frac{1}{r^{d-1}} \int_{S_r} \nabla u(x) \cdot \frac{x}{\|x\|}\, \mathrm{d}\sigma_r(x).$$

   Ceci étant valable pour tout $M > 0$, la fonction g est $\mathcal{C}^1$ avec la dérivée annoncée.

On suppose désormais que la fonction u est harmonique.

2. Montrer que g constante dans ce cas, et établir la première formule de la moyenne :

$$\forall r > 0, \qquad u(0) = \frac{1}{\sigma_r(S_r)} \int_{S_r} u(x)\,\mathrm{d}\sigma_r(x). \tag{3}$$

Soit $r > 0$, on applique la première formule de Green (1) sur B_r, en gardant en mémoire que le champ de vecteurs unitaires normal à S_r et sortant de B_r est N :

$$0 = \int_{B_r} \Delta u \,\mathrm{d}x = \int_{S_r} \nabla u \cdot N \,\mathrm{d}\sigma_r = r^{d-1} g'(r).$$

Ainsi si u est harmonique, g' est nulle et donc g est constante sur $]0, +\infty[$. Par ailleurs, il est naturel de penser que :

$$g(r) = \int_{S_1} u(r\theta)\,\mathrm{d}\sigma_1(\theta)$$

converge vers $u(0)\sigma_1(S_1)$ lorsque $r \to 0$, prouvons-le. Pour tout $r < 1$, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{S_1} u(r\theta)\,\mathrm{d}\sigma_1(\theta) - u(0)\sigma_1(S_1)\right| &= \left|\int_{S_1} (u(r\theta) - u(0))\,\mathrm{d}\sigma_1(\theta)\right| \leqslant \int_{S_1} \|u(r\theta) - u(0)\|\,\mathrm{d}\sigma_1(x) \\ &\leqslant r\|\nabla u\|_{\infty,\overline{B_1}}\sigma_1(S_1) \xrightarrow[r\to 0]{} 0,\end{aligned}$$

par le théorème des accroissements finis. Ainsi, $g(r) \xrightarrow[r\to 0]{} u(0)\sigma_1(S_1)$ et, pour tout $r > 0$,

$$u(0) = \frac{1}{\sigma_1(S_1)} \int_{S_1} u(r\theta)\,\mathrm{d}\sigma_1(\theta) = \frac{1}{\sigma_r(S_r)} \int_{S_r} u(x)\,\mathrm{d}\sigma_r(x),$$

où on a de nouveau utilisé l'exercice 3 du TD8 et le fait que $\sigma_r(S_r) = r^{d-1}\sigma_1(S_1)$.

3. En déduire la seconde formule de la moyenne :

$$\forall R > 0, \qquad u(0) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_R)} \int_{B_R} u(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Soit $R > 0$, on fait un changement de variable sphérique :

$$\int_{B_R} u(x)\,\mathrm{d}x = \int_{B_R\setminus\{0\}} u(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^R \int_{S_1} r^{d-1} u(r\theta)\,\mathrm{d}\sigma_1(\theta)\,\mathrm{d}r.$$

Par l'exercice 3 du TD8, pour tout $r > 0$,

$$\int_{S_1} r^{d-1} u(r\theta)\,\mathrm{d}\sigma_1(\theta) = \int_{S_r} u(x)\,\mathrm{d}\sigma_r(x) = u(0)\sigma_r(S_r) = u(0) r^{d-1}\sigma_1(S_1)$$

d'après la formule (3). Donc

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_R)} \int_{B_R} u(x)\,\mathrm{d}x = \frac{u(0)\sigma_1(S_1)}{R^d\,\mathrm{Vol}(B_1)} \int_0^R r^{d-1}\,\mathrm{d}r = u(0)\frac{\sigma_1(S_1)}{d\,\mathrm{Vol}(B_1)} = u(0).$$

Exercice 5 (Solution fondamentale de Δ)**.** Soient $d \in \mathbb{N} \setminus \{0, 2\}$ et $f_d : x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \mapsto \|x\|^{2-d}$. Il a été vu en cours que f_d était une solution fondamentale de $P(\partial) = \Delta$ dans $\mathbb{R}^d$, en utilisant les distributions homogènes, on propose de redémontrer ce résultat par un calcul "direct".

1. Vérifier que f_d définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
   La fonction f_d est $\mathcal{C}^\infty$ donc L^1_{loc} sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Par ailleurs, d'après l'exercice 2 du TD8, la fonction f_d est intégrable au voisinage de 0. On a donc $f_d \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, calculer $\nabla f_d(x)$ et $\Delta f_d(x)$, au sens de la dérivation usuelle.
   Sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ la fonction f_d est $\mathcal{C}^\infty$. On peut donc bien calculer ses dérivées partielles au sens usuel. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, on a :
$$f_d(x) = \|x\|^{2-d} = \left(\sum_{j=1}^d x_j^2\right)^{1-\frac{d}{2}},$$
$$\forall i \in \{1, \cdots, d\}, \qquad \partial_i f_d(x) = (2-d)x_i \left(\sum_{j=1}^d x_j^2\right)^{-\frac{d}{2}} = (2-d)x_i\|x\|^{-d},$$
$$\begin{aligned}\forall i \in \{1, \cdots, d\}, \qquad \partial_i^2 f_d(x) &= (2-d)\left(\sum_{j=1}^d x_j^2\right)^{-\frac{d}{2}} - d(2-d)x_i^2\left(\sum_{j=1}^d x_j^2\right)^{-1-\frac{d}{2}} \\ &= (2-d)\big(\|x\|^2 - dx_i^2\big)\|x\|^{-2-d}.\end{aligned}$$
   On obtient donc $\nabla f_d(x) = (2-d)x\|x\|^{-d}$ et $\Delta f_d(x) = (2-d)\|x\|^{-(d+2)}\sum_{i=1}^d(\|x\|^2 - dx_i^2) = 0$.
3. Vérifier que $\displaystyle\int_{S_\varepsilon} f_d \,\mathrm{d}\,\sigma_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$. En déduire que si $g : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ est continue et bornée alors $g f_d\,\sigma_\varepsilon$ définit une distribution qui converge vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
   Soit $\varepsilon > 0$, comme $\sigma_\varepsilon(S_\varepsilon) = \varepsilon^{d-1}\sigma_1(S_1)$ on a
$$\left|\int_{S_\varepsilon} f_d \,\mathrm{d}\,\sigma_\varepsilon\right| \leqslant \int_{S_\varepsilon} f_d \,\mathrm{d}\sigma_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^{d-2}}\sigma_\varepsilon(S_\varepsilon) = \sigma_1(S_1)\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0\,.$$
   On peut en déduire que $g f_d\,\sigma_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. En effet, si $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,
$$|\langle g f_d \sigma_\varepsilon\,, \varphi\rangle| \leqslant \int_{S_\varepsilon} f_d |g||\varphi| \,\mathrm{d}\,\sigma_\varepsilon \leqslant \|\varphi\|_\infty \|g\|_\infty \int_{S_\varepsilon} f_d \,\mathrm{d}\,\sigma_\varepsilon.$$
   À $\varepsilon > 0$ fixé, cela prouve que $g f_d \sigma_\varepsilon$ définit une distribution d'ordre 0. Puis, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on a
$$|\langle g f_d \sigma_\varepsilon\,, \varphi\rangle| \leqslant \|\varphi\|_\infty \|g\|_\infty \int_{S_\varepsilon} f_d \,\mathrm{d}\,\sigma_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$
   Donc $g f_d \sigma_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
4. En appliquant la formule des sauts, montrer que $\Delta f_d = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \nabla f_d \cdot N\,\sigma_\varepsilon$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
   On commence par remarquer que pour tout $R > \varepsilon$, on a $f_d \mathbf{1}_{B_R \setminus \overline{B_\varepsilon}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f_d \mathbf{1}_{B_R}$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ car $f_d \in L^1(B_R)$. On en déduit que $f_d = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_d\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \overline{B_\varepsilon}}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
   Comme f_d est bien $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $\mathbb{R}^d \setminus \overline{B_\varepsilon}$, on peut appliquer la formule des sauts à $h_\varepsilon = f_d\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \overline{B_\varepsilon}} + 0 \cdot \mathbf{1}_{B_\varepsilon}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, on obtient :
$$\partial_i h_\varepsilon = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \overline{B_\varepsilon}}\,\partial_i f_d + 0 + (f_d - 0)\,N_i\,\sigma_\varepsilon = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \overline{B_\varepsilon}}\,\partial_i f_d + f_d N_i\,\sigma_\varepsilon$$

et en appliquant similairement la formule des sauts à $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d\setminus\overline{B_\varepsilon}}\, \partial_i f_d$ on obtient

$$\partial_i^2 h_\varepsilon = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d\setminus\overline{B_\varepsilon}}\, \partial_i^2 f_d + \partial_i f_d N_i\, \sigma_\varepsilon + \partial_i\left(f_d N_i\, \sigma_\varepsilon\right)$$

Comme N_i est continue et bornée sur $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$, d'après la question 3 on a $f_d N_i\, \sigma_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et donc $\partial_i(f_d N_i\, \sigma_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ par continuité de la dérivation sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Comme Δ est aussi continu sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on a ainsi

$$\Delta f_d = \lim_{\varepsilon\to 0} \Delta h_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{i=1}^{d} \partial_i^2 h_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \underbrace{\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d\setminus\overline{B_\varepsilon}}\, \Delta f_d}_{=0} + \nabla f_d \cdot N\, \sigma_\varepsilon\,.$$

Remarque. On pourrait être plus malin et appliquer la formule des sauts à la fonction continue $\widetilde{h_\varepsilon} = f_d\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d\setminus\overline{B_\varepsilon}} + f_d(\varepsilon)\, \mathbf{1}_{B_\varepsilon}$, qui prolonge $f_{d|\mathbb{R}^d\setminus\overline{B_\varepsilon}}$ par une constante sur B_ε. Il n'y a alors pas de terme de saut dans $\partial_i\widetilde{h_\varepsilon} = \partial_i f_d\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d\setminus\overline{B_\varepsilon}}$, ce qui économise un peu de salive ou d'encre…

5. Redémontrer que $\Delta f_d = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \nabla f_d \cdot N\, \sigma_\varepsilon$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, en utilisant cette fois une formule de Green pour le laplacien.
Comme dans la question précédente, on utilise le fait que $f_d = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_d\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d\setminus\overline{B_\varepsilon}}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
Soient $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $R>\varepsilon$ tel que $\operatorname{supp}\varphi\subset B_R$, on a déjà

$$\langle \Delta f_d\,, \varphi\rangle = \langle f_d\,, \Delta\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle \mathbf{1}_{B_R\setminus\overline{B_\varepsilon}} f_d\,, \Delta\varphi\rangle$$

Pour $\varepsilon>0$, on considère l'ouvert borné à frontière lisse $\Omega = B_R\setminus\overline{B_\varepsilon}$. Les fonctions f_d et φ sont bien de classe C^∞ au voisinage de $\overline{\Omega}$. Par la deuxième formule de Green (2), on obtient

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{1}_{B_R\setminus\overline{B_\varepsilon}} f_d\,, \Delta\varphi\rangle &= \int_{B_R\setminus\overline{B_\varepsilon}} \underbrace{\Delta f_d(x)}_{=0}\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{S_\varepsilon} \left(f_d\nabla\varphi - \varphi\nabla f_d\right)\cdot(-N)\,\mathrm{d}\,\sigma_\varepsilon\\
&= \int_{S_\varepsilon} \varphi\nabla f_d\cdot N\,\mathrm{d}\,\sigma_\varepsilon - \int_{S_\varepsilon} f_d\nabla\varphi\cdot N\,\mathrm{d}\,\sigma_\varepsilon,
\end{aligned}$$

où on a utilisé d'une part que $\operatorname{supp}\varphi\subset B_R$ et donc le terme portant sur $S_R\subset\partial\Omega = S_R\cup S_\varepsilon$ est nul, et d'autre part que la normale sortante de Ω sur S_ε est $-N$. On conclut en observant que le second terme ci-dessus tend vers 0 lorsque $\varepsilon\to 0$. En effet, par la question 3,

$$\left|\int_{S_\varepsilon} f_d\nabla\varphi\cdot N\,\mathrm{d}\,\sigma_\varepsilon\right| \leqslant \|\nabla\varphi\|_\infty \int_{S_\varepsilon} f_d\,\mathrm{d}\,\sigma_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Donc, pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\langle\Delta f_d\,, \varphi\rangle = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\langle\nabla f_d\cdot N\sigma_\varepsilon\,, \varphi\rangle$.

6. Calculer Δf_d dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
Commençons par remarquer que sur $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$, la fonction f_d est $\mathcal{C}^\infty$. Sur ce domaine, ses dérivées partielles au sens des distributions coïncident avec celles au sens usuel. D'après la question 2, on a donc $(\Delta f_d)_{|\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} = 0$. En particulier, Δf_d est supportée en 0 et est donc une combinaison linéaire de dérivées partielles de δ_0.
Pour calculer Δf_d, on va s'appuyer sur la formule prouvée dans les questions 4 et 5. Soit $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et soit $\varepsilon>0$, d'après les calculs effectués à la question 2, pour $x\in S_\varepsilon$,

$$\nabla f_d(x)\cdot N(x) = -(d-2)\frac{x}{\|x\|^d}\cdot\frac{x}{\|x\|} = -(d-2)\frac{1}{\|x\|^{d-1}} = -(d-2)\frac{1}{\varepsilon^{d-1}}$$

de sorte que
$$\int_{S_\varepsilon} \varphi \nabla f_d \cdot N \,\mathrm{d}\,\sigma_\varepsilon = -(d-2)\frac{1}{\varepsilon^{d-1}}\int_{S_\varepsilon} \varphi \,\mathrm{d}\,\sigma_\varepsilon \tag{i}$$
On peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à φ entre $x \in S_\varepsilon$ et 0 :
$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leqslant \|\nabla\varphi\|_\infty \|x\|$$
et en intégrant sur S_ε l'inégalité précédente, il vient
$$\frac{1}{\varepsilon^{d-1}}\int_{S_\varepsilon} |\varphi - \varphi(0)| \,\mathrm{d}\,\sigma_\varepsilon \leqslant \|\nabla\varphi\|_\infty \frac{1}{\varepsilon^{d-1}}\int_{S_\varepsilon} \varepsilon\sigma_\varepsilon = \|\nabla\varphi\|_\infty \varepsilon\sigma_1(S_1) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0\,.$$
On conclut
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} \varphi\nabla f_d \cdot N\,\mathrm{d}\,\sigma_\varepsilon = -(d-2)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^{d-1}}\int_{S_\varepsilon}\varphi(0)\,\mathrm{d}\,\sigma_\varepsilon = -(d-2)\sigma_1(S_1)\varphi(0)\,.$$
Par les questions 4 et 5, on obtient donc pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,
$$\langle \Delta f_d\,, \varphi\rangle = -(d-2)\sigma_1(S_1)\langle \delta_0\,, \varphi\rangle.$$
Donc $\Delta f_d = (2-d)\sigma_1(S_1)\delta_0$, et par l'exercice 4 du TD8, on a $\Delta f_d = -4\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma\big(\frac{d-2}{2}\big)^{-1}\delta_0$. Pour $d \geqslant 3$ la constante est négative, mais pour $d=1$ on a $\Delta f_1 = (x\mapsto |x|)'' = 2\delta_0$.

7. (*facultatif*) Pour $d = 2$, on pose $f_2 : x \mapsto \ln\|x\|$. Calculer Δf_2 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ par la même méthode que ci-dessus.
   La fonction f_2 est $\mathcal{C}^\infty$ donc L^1_{loc} sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. Au voisinage de 0, on a $\big|\ln\|x\|\big| = O\big(\|x\|^{-1}\big)$. Comme $x\mapsto \|x\|^{-1}$ est intégrable au voisinage de 0 d'après l'exercice 2 du TD8, c'est aussi le cas de f_2. Donc $f_2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, on obtient par des calculs directs similaires à ceux de la question 2 :
$$\begin{aligned} &\forall i\in\{1,2\}, \qquad && \partial_i f_2(x) = \frac{x_i}{\|x\|^2}, \qquad && \partial_i^2 f_2(x) = \frac{\|x\| - 2x_i^2}{\|x\|^4},\\ & && \nabla f_2(x) = \frac{x}{\|x\|^2}, && \Delta f_2(x) = \frac{1}{\|x\|^4}\big(2\|x\|^2 - 2x_1^2 - 2x_2^2\big) = 0. \end{aligned}$$
   La preuve de la question 5 reste vraie sans modification. On a donc pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,
$$\langle \Delta f_2\,, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} (\varphi\ \nabla f_d - f_d\ \nabla\varphi)\cdot N\,\mathrm{d}\sigma_\varepsilon.$$
   Puis, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\begin{aligned}\int_{S_\varepsilon} (\varphi\ \nabla f_d - f_d\ \nabla\varphi)\cdot N\,\mathrm{d}\sigma_\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{S_\varepsilon}\varphi(x)\,\mathrm{d}\sigma_\varepsilon(x) - \ln|\varepsilon|\int_{S_\varepsilon}\nabla\varphi\cdot N\,\mathrm{d}\sigma_\varepsilon\\ &= \int_{S_1}\varphi(\varepsilon x)\,\mathrm{d}\sigma_1(x) + O(\ln|\varepsilon|\sigma_\varepsilon(S_\varepsilon))\\ &= \varphi(0)\sigma_1(S_1) + \int_{S_1}(\varphi(\varepsilon x) - \varphi(0))\,\mathrm{d}\sigma_1(S_1) + O(\varepsilon\ln|\varepsilon|)\\ &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2\pi\varphi(0).\end{aligned}$$
   Donc $\Delta f_2 = 2\pi\delta_0$.

Exercice 6 (Formule de Cauchy–Pompeiu — *facultatif*)**.** On identifie canoniquement $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ via $x = (x_1, x_2) \mapsto z = x_1 + ix_2$. On rappelle que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$.

1. Soit $f : z \mapsto \frac{1}{z}$ de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$. Vérifier que f définit une distribution sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, et montrer que $f\mathbf{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

   Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $|f(z)| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\|x\|}$. D'après l'exercice 2 du TD8, cette fonction est intégrable en 0 dans $\mathbb{R}^2$. Comme f est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, on en déduit que $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ et donc définit bien une distribution sur $\mathbb{R}^2$.
   Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on a donc $\varphi f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Donc

   $$\langle f\mathbf{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon} , \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon} f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x = \langle f , \varphi \rangle.$$

   D'où $f\mathbf{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

2. Montrer que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \pi \delta_0$.

   Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $f_\varepsilon = f\mathbf{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon}$. Comme $f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\mathcal{D}'} f$ on a $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\mathcal{D}'} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f$. On va procéder comme dans la question 4 de l'exercice 5, et calculer $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_\varepsilon$ via la formule des sauts.
   Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, elle est en particulier $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de $\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon$. Pour $j \in \{1, 2\}$, la formule des sauts appliquée à $f_\varepsilon = f\mathbf{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon} + 0 \cdot \mathbf{1}_{B_\varepsilon}$ montre que

   $$\partial_j f_\varepsilon = (\partial_j f)\mathbf{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon} + 0 \cdot \mathbf{1}_{B_\varepsilon} + (f - 0)N_j \sigma_\varepsilon,$$

   où N est la normale unitaire sortante de B_ε. Donc

   $$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_\varepsilon &= \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2) f_\varepsilon = \frac{1}{2}\big(\partial_1 f \mathbf{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon} + i\partial_1 f \mathbf{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon}\big) + f\frac{1}{2}(N_1 + iN_2)\sigma_\varepsilon \\ &= \mathbf{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f + \frac{1}{2} f N \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} f N \sigma_\varepsilon, \end{aligned}$$

   car f est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Pour tout $z \in S_\varepsilon$, la normale unitaire sortante de B_ε en z est $N(z) = \frac{z}{|z|} = \frac{z}{\varepsilon}$, donc $f(z)N(z) = \frac{1}{\varepsilon}$. On obtient finalement que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\sigma_\varepsilon$.
   Il reste à vérifier que $\frac{1}{2\varepsilon}\sigma_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \pi\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on a :

   $$\left\langle \frac{1}{2\varepsilon}\sigma_\varepsilon , \varphi \right\rangle = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{S_\varepsilon} \varphi(z) \, \mathrm{d}\sigma_\varepsilon(z) = \frac{1}{2} \int_{S_1} \varphi(\varepsilon\theta) \, \mathrm{d}\sigma_1(\theta),$$

   où on a utilisé l'exercice 3 de la feuille 8. Alors, comme $\sigma_1(S_1) = 2\pi$ en dimension $d = 2$,

   $$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{1}{2\varepsilon}\sigma_\varepsilon , \varphi \right\rangle - \pi\varphi(0) \right| &= \left| \frac{1}{2} \int_{S_1} (\varphi(\varepsilon\theta) - \varphi(0)) \, \mathrm{d}\sigma_1(\theta) \right| \leqslant \frac{1}{2} \int_{S_1} |\varphi(\varepsilon\theta) - \varphi(0)| \, \mathrm{d}\sigma_1(\theta) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \|D\varphi\|_\infty \sigma_1(S_1) = \pi \|D\varphi\|_\infty \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0. \end{aligned}$$

   Donc $\left\langle \frac{1}{2\varepsilon}\sigma_\varepsilon , \varphi \right\rangle \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \pi\varphi(0)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, i.e. $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\sigma_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \pi\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Finalement, on obtient bien $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \pi\delta_0$.

3. Soit $R > 0$, calculer $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f - f_R)$. En déduire que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$

   $$\varphi(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{S_R} \frac{\varphi(z)}{z} \, \mathrm{d}z - \int_{B_R} \frac{1}{\pi z} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(z) \, \mathrm{d}\lambda(z). \tag{5}$$

Vus les calculs précédents, on a $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f - f_R) = \pi\delta_0 - \frac{1}{2R}\sigma_R$. Par ailleurs, $f - f_R = f\mathbf{1}_{B_R}$ est nulle hors de B_R, donc la distribution associée est à support compact. Il est donc licite de l'évaluer contre des fonctions $\mathcal{C}^\infty$.
Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, on calcule :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f - f_R)\,, \varphi \right\rangle = -\left\langle f - f_R\,, \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}^2} f(z)\mathbf{1}_{B_R}(z)\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}(z)\,\mathrm{d}\lambda(z)$$
$$= -\int_{B_R} \frac{1}{z}\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}(z)\,\mathrm{d}\lambda(z).$$

Par ailleurs,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f - f_R)\,, \varphi \right\rangle = \left\langle \pi\delta_0 - \frac{1}{2R}\sigma_R\,, \varphi \right\rangle = \pi\varphi(0) - \frac{1}{2R}\int_{S_R} \varphi(z)\,\mathrm{d}\sigma_R(z).$$

Donc

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi R}\int_{S_R} \varphi(z)\,\mathrm{d}\sigma_R(z) - \int_{B_R} \frac{1}{\pi z}\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}(z)\,\mathrm{d}\lambda(z). \tag{ii}$$

Comme S_R est une courbe, sa mesure superficielle coïncide avec sa longueur d'arc. En paramétrant S_R par $\theta \mapsto Re^{i\theta}$, il vient

$$\frac{1}{R}\int_{S_R} \varphi(z)\,\mathrm{d}\sigma_R(z) = \frac{1}{R}\int_0^{2\pi} \varphi(Re^{i\theta})R\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}}Rie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{i}\int_{S_R} \frac{\varphi(z)}{z}\,\mathrm{d}z.$$

La dernière égalité vient de la définition du dernier terme en analyse complexe. Comme S_R est paramétré par $\theta \mapsto Re^{i\theta}$ on a $\mathrm{d}z = iRe^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$. Finalement, on obtient la formule (5) en ré-injectant l'égalité précédente dans (ii).

4. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. Pour tout $R > 0$ tel que $a + \overline{B_R} \subset \Omega$, montrer que

$$\varphi(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{a+S_R} \frac{\varphi(z)}{z - a}\,\mathrm{d}z \tag{6}$$

Considérons la fonction $\tau_{-a}\varphi = \varphi(a + \cdot)$ qui est holomorphe sur $\Omega - a$. Par hypothèse on a $\overline{B_R} \subset \Omega - a$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction plateau qui est égale à 1 sur un voisinage de $\overline{B_R}$. Alors $\chi\tau_{-a}\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, et on peut lui appliquer la formule (5) :

$$\chi(0)\varphi(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{S_R} \frac{1}{z}\chi(z)\varphi(a + z)\,\mathrm{d}z - \int_{B_R} \frac{1}{\pi z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\chi\tau_{-a}\varphi)(z)\,\mathrm{d}\lambda(z).$$

Comme $\chi \equiv 1$ au voisinage de B_R, on a $\chi(0) = 1$ et, pour tout $z \in B_R$,

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\chi\tau_{-a}\varphi)(z) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\varphi(a + \cdot))(z) = 0$$

car φ est holomorphe. Ainsi,

$$\varphi(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{S_R} \frac{\varphi(a + z)}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2i\pi}\int_{a+S_R} \frac{\varphi(z)}{z - a}\,\mathrm{d}z.$$