Chargés de TD : Blanche Buet et Thomas Letendre.

Feuille 8 – Mesure superficielle... de la sphère...

Exercice 1 (Changement de variable sphérique)**.** Dans cet exercice, on fait le lien entre la mesure de Lebesgue λ de $\mathbb{R}^d$ et la mesure superficielle σ sur la sphère unité euclidienne $\mathbb{S}^{d-1}$.

1. Justifier rapidement que $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = 1\}$ est une hypersurface lisse de $\mathbb{R}^d$.
   La sphère euclidienne $\mathbb{S}^{d-1}$ est le lieu d'annulation de la fonction $g : x \mapsto \|x\|^2 - 1$, qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ et de gradient $\nabla g : x \mapsto 2x$. En particulier, ∇g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et donc g est une submersion au voisinage de $\mathbb{S}^{d-1}$. Donc $\mathbb{S}^{d-1}$ est une hypersurface lisse. Le théorème des fonctions implicites garantit alors qu'on peut écrire localement $\mathbb{S}^{d-1}$ comme un graphe.
2. Notons $\mathbb{B} = \{y \in \mathbb{R}^{d-1} \mid \|y\| < 1\}$ et $\mathbb{S}^{d-1}_+ = \left\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{S}^{d-1} \;\middle|\; x_d > 0\right\}$, on peut alors décrire $\mathbb{S}^{d-1}_+ \subset \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^*_+$ comme le graphe de $h : y \mapsto \sqrt{1 - \|y\|^2}$ de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{R}^*_+$. En utilisant cette description, rappeler une définition locale de $\int_{\mathbb{S}^{d-1}_+} f(\theta)\,\mathrm{d}\sigma(\theta)$, où $f : \mathbb{S}^{d-1}_+ \to \mathbb{C}$ est mesurable et positive, ou intégrable.
   Soit $f : \mathbb{S}^{d-1}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. L'application $y \mapsto (y, h(y))$ de $\mathbb{B}$ vers $\mathbb{S}^{d-1}_+$ est un difféomorphisme, dont l'inverse est la restriction de la projection orthogonale sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$. En particulier, $f : \mathbb{S}^{d-1}_+ \to \mathbb{C}$ est mesurable si et seulement si $\widetilde{f} : y \mapsto f(y, h(y))$ de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{C}$ est mesurable.
   Si f est à valeurs positive, alors on a défini dans le cours
   $$\int_{\mathbb{S}^{d-1}_+} f(\theta)\,\mathrm{d}\sigma(\theta) = \int_{\mathbb{B}} f(y, h(y)) \sqrt{1 + \|\nabla h(y)\|^2}\,\mathrm{d}y.$$
   Ici, on peut calculer le gradient. Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, $\partial_j h : y \mapsto -\frac{y_j}{h(y)}$. Donc pour tout $y \in \mathbb{B}$ on a $\nabla h(y) = -\frac{y}{h(y)}$ et donc $1 + \|\nabla h(y)\|^2 = \frac{h(y)^2 + \|y\|^2}{h(y)^2} = \frac{1}{h(y)^2}$. Comme h est à valeurs positive on a finalement,
   $$\int_{\mathbb{S}^{d-1}_+} f(\theta)\,\mathrm{d}\sigma(\theta) = \int_{\mathbb{B}} f(y, h(y)) \frac{\mathrm{d}y}{h(y)}. \tag{i}$$
   Si f est à valeurs complexes, elle est intégrable si et seulement si
   $$\int_{\mathbb{S}^{d-1}_+} |f(\theta)|\,\mathrm{d}\sigma(\theta) = \int_{\mathbb{B}} |f(y, h(y))| \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} < +\infty,$$
   c'est-à-dire si et seulement si $\frac{1}{h}\widetilde{f}$ est intégrable sur $\mathbb{B}$. Dans ce cas, l'intégrale de f sur $\mathbb{S}^{d-1}_+$ contre $\mathrm{d}\sigma$ est encore définie par (i).
3. Soit $\Phi : \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{B} \to \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^*_+$ défini par $\Phi : (R, y) \mapsto R(y, h(y))$. Calculer le jacobien de Φ en tout point et montrer que Φ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.
   On a déjà vu que h est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{B}$, donc Φ est bien $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{B}$. En identifiant canoniquement applications linéaires et matrices, on a
   $$D\Phi(R, y) = \begin{pmatrix} \partial_R \Phi_1(R,y) & \partial_{y_1} \Phi_1(R,y) & \dots & \partial_{y_{d-1}} \Phi_1(R,y) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_R \Phi_d(R,y) & \partial_{y_1} \Phi_d(R,y) & \dots & \partial_{y_{d-1}} \Phi_d(R,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & R & & \\ \vdots & & \ddots & \\ y_{d-1} & & & R \\ h(y) & R\partial_1 h(y) & \dots & R\partial_{d-1} h(y) \end{pmatrix}.$$

En réutilisant le calcul des dérivées partielles de h fait à la question 2, on obtient par opérations élémentaires sur les lignes et colonnes :

$$|\det(D\Phi(R,y))| = \frac{R^{d-1}}{h(y)}\begin{vmatrix} y_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ y_{d-1} & & & 1 \\ h(y)^2 & -y_1 & \dots & -y_{d-1}\end{vmatrix} = \frac{R^{d-1}}{h(y)}\begin{vmatrix} y_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ y_{d-1} & & & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0\end{vmatrix} = \frac{R^{d-1}}{h(y)},$$

car $h(y)^2 + \sum_{i=1}^{d-1} y_i^2 = 1$.

En particulier, le jacobien de Φ ne s'annule pas donc c'est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme local. Par ailleurs c'est une bijection. En effet, pour tout $(R,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{B}$ on a $(y, h(y)) \in \mathbb{S}^{d-1}$ et donc $R = \|\Phi(R,y)\|$ et y est la projection orthogonale de $\frac{\Phi(R,y)}{\|\Phi(R,y)\|}$ sur $\mathbb{R}^{d-1}\times\{0\} \simeq \mathbb{R}^{d-1}$. Ainsi, Φ réalise un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{B}$ vers $\{(x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_d > 0\}$.

4. Soit $F : \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable et positive, ou intégrable. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}_+^*} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{R=0}^{+\infty}\int_{\theta\in\mathbb{S}_+^{d-1}} F(R\theta)R^{d-1}\,\mathrm{d}\sigma(\theta)\,\mathrm{d}R.$$

Commençons par effectuer le calcul formellement, et on justifiera par la suite pourquoi il a bien du sens. On effectue le changement de variable $x = \Phi(R,y)$, où Φ est le difféomorphisme introduit ci-dessus :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}_+^*} F(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{B}} F(\Phi(R,y))|\det(D\Phi(R,y))|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}R \\ &= \int_{R=0}^{+\infty}\int_{y\in\mathbb{B}} F(R(y,h(y)))\frac{R^{d-1}}{h(y)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}R \\ &= \int_{R=0}^{+\infty}\int_{\theta\in\mathbb{S}_+^{d-1}} F(R\theta)R^{d-1}\,\mathrm{d}\sigma(\theta)\,\mathrm{d}R,\end{aligned}$$

où on obtient la dernière ligne en appliquant la formule (i) à $f_R : \theta \mapsto R^{d-1}F(R\theta)$.

Justifions le calcul lorsque F est mesurable et positive. Dans ce cas, le théorème de changement de variable s'applique, ce qui justifie la première égalité. La seconde s'obtient en remplaçant Φ et son jacobien par leurs expressions et par Fubini–Tonelli. Le théorème de Fubini–Tonelli assure aussi que pour presque tout $R > 0$ la fonction $y \mapsto \frac{R^{d-1}}{h(y)}F(R(y,h(y))) = \frac{1}{h(y)}f_R(y,h(y))$ est mesurable. Comme h est continue, $\widetilde{f_R} : y \mapsto f_R(y,h(y))$ est donc mesurable. Or, on a vu dans la question 2 que f_R est mesurable si et seulement si $\widetilde{f_R}$ l'est, et que dans ce cas la formule (i) est valable. C'est le cas pour presque tout $R > 0$, d'où la dernière égalité.

Supposons maintenant F intégrable. Notons que, par le cas précédent, c'est équivalent à demander que $(R,\theta) \mapsto R^{d-1}F(R\theta)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^{d-1}$ pour la mesure produit $\mathrm{d}R \otimes \sigma$. Comme F est intégrable, on peut appliquer le théorème de changement de variable, puis appliquer le théorème de Fubini au résultat, ce qui justifie les deux premières égalités. En appliquant le cas positif à $|F|$, on voit que pour presque tout $R > 0$:

$$\int_{\mathbb{S}_+^{d-1}} |f_R(\theta)|\,\mathrm{d}\sigma(\theta) = \int_{\mathbb{B}} |\widetilde{f_R}(y)|\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int_{\mathbb{B}} R^{d-1}|F(R(y,h(y))|\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} < +\infty.$$

Donc f_R est intégrable pour presque tout $R > 0$ et la dernière égalité suit de la formule (i).

5. On note $U_i^+ = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_i > 0\}$ (resp. $U_i^- = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_i < 0\}$) pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$. Montrer l'existence de fonctions continues $\left(\varphi_i^+\right)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ et $\left(\varphi_i^-\right)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ de $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ dans $[0,1]$ telles que φ_i^+ (resp. φ_i^-) est nulle hors de U_i^+ (resp. U_i^-) et $\sum_{i=1}^d \varphi_i^+ + \varphi_i^- = 1$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

   Les ouverts $(U_i^{+/-})$ recouvrent le compact $\mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Il existe donc une partition de l'unité associée $(\chi_i^{+/-})$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, la fonction $\chi_i^{+/-} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ prend ses valeurs dans $[0,1]$, vérifie $\operatorname{supp}(\chi_i^{+/-}) \subset U_i^{+/-}$, et $\sum_{i=1}^d \chi_i^+ + \chi_i^- = 1$ au voisinage de $\mathbb{S}^{d-1}$.

   Pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, on pose $\varphi_i^{+/-} : x \mapsto \chi_i^{+/-}(\frac{x}{\|x\|})$ de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ dans $[0,1]$. Ces fonctions sont lisses sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et à valeurs dans $[0,1]$. Soit $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, si $x_i \leqslant 0$ alors $\frac{x_i}{\|x\|} \leqslant 0$ donc $\frac{x}{\|x\|} \notin U_i^+$ et $\varphi_i^+(x) = \chi_i^+\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0$. Donc φ_i^+ est nulle hors de U_i^+. De même $\varphi_i^- \equiv 0$ hors de U_i^-. Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, on a $\sum_{i=1}^d \varphi_i^+(x) + \varphi_i^-(x) = \sum_{i=1}^d \chi_i^+\left(\frac{x}{\|x\|}\right) + \chi_i^-\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 1$.

   On peut aussi être rusé et poser $\varphi_i^+ : x \mapsto \frac{x_i^2}{\|x\|_2^2} \mathbf{1}_{U_i^+}(x)$ et $\varphi_i^- : x \mapsto \frac{x_i^2}{\|x\|_2^2} \mathbf{1}_{U_i^-}(x)$. Une alternative est $\varphi_i^+ : x \mapsto \frac{|x_i|}{\|x\|_1} \mathbf{1}_{U_i^+}(x)$ et $\varphi_i^- : x \mapsto \frac{|x_i|}{\|x\|_1} \mathbf{1}_{U_i^-}(x)$. Cette fois on n'obtient plus des fonctions lisses, mais elles sont bien continues sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

6. Soit $F : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable et positive, ou intégrable. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} F(x) \, \mathrm{d}x = \int_{R=0}^{+\infty} \int_{\theta \in \mathbb{S}^{d-1}} F(R\theta) R^{d-1} \, \mathrm{d}\sigma(\theta) \, \mathrm{d}R. \tag{1}$$

   Dans les deux cas, on écrit $F = \sum_{i=1}^d \varphi_i^+ F + \varphi_i^- F$. La fonction $\varphi_d^+ F$ est nulle hors de U_d^+, et sa restriction à $U_d^+ = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^*$ vérifie les hypothèses de la question 4. On a donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \varphi_d^+(x) F(x) \, \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^*} \varphi_d^+(x) F(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{R=0}^{+\infty} \int_{\theta \in \mathbb{S}_+^{d-1}} \varphi_d^+(R\theta) F(R\theta) R^{d-1} \, \mathrm{d}\sigma(\theta) \, \mathrm{d}R \\ &\int_{R=0}^{+\infty} \int_{\theta \in \mathbb{S}^{d-1}} \varphi_d^+(R\theta) F(R\theta) R^{d-1} \, \mathrm{d}\sigma(\theta) \, \mathrm{d}R.\end{aligned}$$

   En raisonnant symétriquement sur les autres ouverts $U_i^{+/-}$, on obtient des formules similaires ou φ_d est remplacée par $\varphi_i^{+/-}$. Finalement on a donc

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} F(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \varphi_i^+(x) F(x) \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \varphi_i^-(x) F(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^d \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \varphi_i^+(R\theta) F(R\theta) R^{d-1} \, \mathrm{d}\sigma(\theta) \, \mathrm{d}R + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \varphi_i^-(R\theta) F(R\theta) R^{d-1} \, \mathrm{d}\sigma(\theta) \, \mathrm{d}R \\ &= \int_{R=0}^{+\infty} \int_{\theta \in \mathbb{S}^{d-1}} F(R\theta) R^{d-1} \, \mathrm{d}\sigma(\theta) \, \mathrm{d}R.\end{aligned}$$

7. Montrer que $\mathbb{S}^{d-1}$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}^d$.

L'ensemble $\mathbb{S}^{d-1}$ est fermé donc mesurable. Notons $\mathbf{1}_\mathbb{S}$ sa fonction indicatrice. En utilisant la formule (1) on a :

$$\lambda(\mathbb{S}^{d-1}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_\mathbb{S}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \mathbf{1}_\mathbb{S}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} R^{d-1} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbf{1}_\mathbb{S}(R\theta)\,\mathrm{d}\sigma(\theta)\,\mathrm{d}R.$$

Si $R \neq 1$ alors $\mathbf{1}_\mathbb{S}(R\theta) = 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$. Donc pour presque tout R l'intégrale sur $\mathbb{S}^{d-1}$ est nulle. Donc $\lambda(\mathbb{S}^{d-1}) = 0$.

Exercice 2 (Intégrabilité des puissances de la norme)**.** Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, soient $r > 0$ et $B_r = \left\{x \in \mathbb{R}^d \setminus \|x\| < r\right\}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer les équivalences suivantes.

$$\int_{B_r} \|x\|^\alpha\,\mathrm{d}x < +\infty \iff \alpha > -d \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathbb{R}^d\setminus B_r} \|x\|^\alpha\,\mathrm{d}x < +\infty \iff \alpha < -d.$$

On fait le calcul en passant en coordonnées sphérique, voir exercice 1. On obtient

$$\int_{B_r} \|x\|^\alpha\,\mathrm{d}x = \int_0^r \int_{\mathbb{S}^{d-1}} R^{\alpha+d-1}\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\sigma(\theta) = \sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^r R^{\alpha+d-1}\,\mathrm{d}R$$

et la dernière intégrale est finie si et seulement si $\alpha + d - 1 > -1$, i.e. $\alpha > -d$. En effet, on rappelle que σ est une mesure de Radon, en particulier elle est finie sur les compacts. Donc $\sigma(\mathbb{S}^{d-1}) < +\infty$. De même,

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_r} \|x\|^\alpha\,\mathrm{d}x = \int_r^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} R^{\alpha+d-1}\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\sigma(\theta) = \sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \int_r^{+\infty} R^{\alpha+d-1}\,\mathrm{d}R$$

et cette expression est finie si et seulement si $\alpha + d - 1 < -1$, i.e. $\alpha < -d$.

Exercice 3 (Mesure superficielle et dilatations)**.** Pour tout $r > 0$, on note σ_r la mesure superficielle de la sphère euclidienne $r\mathbb{S}^{d-1}$ de centre 0 et de rayon r dans $\mathbb{R}^d$. Soit $f : r\mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable et positive, ou intégrable. Montrer que

$$\int_{r\mathbb{S}^{d-1}} f(\alpha)\,\mathrm{d}\sigma_r(\alpha) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(r\theta) r^{d-1}\,\mathrm{d}\sigma_1(\theta). \tag{2}$$

Indication. Commencer par le cas où f est nulle en dehors de $r\mathbb{S}^{d-1}_+ = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = r \text{ et } x_d > 0\}$, puis passer au cas général comme dans l'exercice 1.

Comme dans l'exercice 1 question 1, l'ensemble $r\mathbb{S}^{d-1}$ est une hypersurface lisse comme lieu d'annulation de $x \mapsto \|x\|^2 - r^2$, qui est une submersion sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. On suit l'indication et on commence par s'intéresser à l'hémisphère ouvert $r\mathbb{S}^{d-1}_+$, qui a le bon goût de s'écrire comme un graphe.
Notons $\mathbb{B} = \{y \in \mathbb{R}^{d-1} \mid \|y\| < 1\}$, alors $r\mathbb{S}^{d-1}_+$ est le graphe de $h_r : y \mapsto \sqrt{r^2 - \|y\|^2}$ qui est lisse, de $r\mathbb{B}$ dans $\mathbb{R}^*_+$. Le même genre de calcul que dans l'exercice 1 question 2 montre que, pour tout $y \in r\mathbb{B}$, $\sqrt{1 + \|\nabla h_r(y)\|^2} = \frac{r}{h_r(y)}$. Si $f : r\mathbb{S}^{d-1}_+ \to \mathbb{C}$ est mesurable et positive, ou intégrable, alors par définition de la mesure superficielle,

$$\int_{r\mathbb{S}^{d-1}_+} f(\alpha)\,\mathrm{d}\sigma_r(\alpha) = \int_{r\mathbb{B}} f(y, h_r(y)) \frac{r}{h_r(y)}\,\mathrm{d}y.$$

Pour tout $y \in r\mathbb{B}$, $h_r(y) = \sqrt{r^2 - \|y\|^2} = r\sqrt{1 - \|\frac{y}{r}\|^2} = rh_1\big(\frac{y}{r}\big)$. Donc

$$\int_{r\mathbb{S}_+^{d-1}} f(\alpha)\,\mathrm{d}\sigma_r(\alpha) = \int_{r\mathbb{B}} f\Big(r\Big(\frac{y}{r}, h_1\Big(\frac{y}{r}\Big)\Big)\Big)\frac{1}{h_1\big(\frac{y}{r}\big)}\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{B}} f(r(z, h_1(z)))\frac{r^{d-1}}{h_1(z)}\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_{\mathbb{S}_+^{d-1}} f(r\theta)r^{d-1}\,\mathrm{d}\sigma_1(\theta).$$

Ceci établit la formule (2) dans le cas où $f : r\mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{C}$ est nulle en dehors de $r\mathbb{S}_+^{d-1}$.
On peut raisonner de même pour toute hémisphère ouverte, en particulier celles du type $r\mathbb{S}^{d-1} \cap U_i^{+/-}$ où $U_i^+ = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_i > 0\}$ et $U_i^- = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_i < 0\}$. En utilisant les fonctions $\varphi_i^{+/-}$ définies à la question 5 de l'exercice 1, on écrit $f = \sum_{i=1}^d \varphi_i^+ f + \varphi_i^- f$. La formule (2) est vraie pour chacun des termes à droite de l'égalité (ils s'annulent hors d'une hémisphère), donc elle est vraie pour f par linéarité de l'intégrale.

Exercice 4 (Calcul du volume de la sphère)**.** Soit γ la restriction à $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ de la mesure gaussienne standard, i.e. γ admet la densité $x \mapsto (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\exp\Big(-\frac{\|x\|^2}{2}\Big)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $\mu = \pi_*\gamma$ la mesure image de γ par la projection radiale $\pi : x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{R}^d$.
On a vu dans l'exercice 7 de la feuille 3 que μ définit une mesure sur $\mathbb{R}^d$ supportée par $\mathbb{S}^{d-1}$, et on s'était convaincu que μ est la mesure de probabilité uniforme sur $\mathbb{S}^{d-1}$. Le but de l'exercice est de relier μ à la mesure superficielle σ de $\mathbb{S}^{d-1}$.

1. Montrer qu'il existe $C_d \geqslant 0$ telle que $\mu = C_d\sigma$.
   Soit $B \subset \mathbb{S}^{d-1}$ un borélien. Par définition de la mesure-image, on a
   $$\mu(B) = \pi_*\gamma(B) = \gamma\big(\pi^{-1}(B)\big) = \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \mathbf{1}_{\pi^{-1}(B)}(x)\frac{e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\,\mathrm{d}x.$$
   Pour tout $x \neq 0$, on écrit $\mathbf{1}_{\pi^{-1}(B)}(x) = \mathbf{1}_B \circ \pi(x) = \mathbf{1}_B\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)$. On applique ensuite la formule de changement de variable sphérique (1) à la fonction positive $x \mapsto \mathbf{1}_B\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$. On obtient :
   $$\mu(B) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{R=0}^{+\infty}\int_{\theta\in\mathbb{S}^{d-1}} \mathbf{1}_B(\theta)R^{d-1}e^{-\frac{R^2}{2}}\,\mathrm{d}\sigma(\theta)\,\mathrm{d}R = \sigma(B)\underbrace{\int_0^{+\infty} R^{d-1}\frac{e^{-\frac{R^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\,\mathrm{d}R}_{:=C_d}.$$
   Donc $\mu = C_d\sigma$.
2. Calculer C_d et en déduire la valeur de $\sigma(\mathbb{S}^{d-1})$.
   On repart de l'expression précédente :
   $$C_d = \int_0^{+\infty} R^{d-1}\frac{e^{-\frac{R^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\,\mathrm{d}R = \frac{1}{2\pi^{\frac{d}{2}}}\int_0^{+\infty}\Big(\frac{R}{\sqrt{2}}\Big)^{d-2}e^{-\frac{R^2}{2}}R\,\mathrm{d}R = \frac{1}{2\pi^{\frac{d}{2}}}\int_0^{+\infty} t^{\frac{d}{2}-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$
   $$= \frac{\Gamma\big(\frac{d}{2}\big)}{2\pi^{\frac{d}{2}}}.$$
   Par ailleurs, on a $\mu(\mathbb{S}^{d-1}) = \gamma\big(\pi^{-1}(\mathbb{S}^{d-1})\big) = \gamma\big(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}\big) = \gamma(\mathbb{R}^d) = 1$ car γ est une mesure de probabilité à densité par rapport à Lebesgue. Donc $1 = \mu(\mathbb{S}^{d-1}) = C_d\sigma(\mathbb{S}^{d-1})$ et finalement $\sigma(\mathbb{S}^{d-1}) = \frac{1}{C_d} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\big(\frac{d}{2}\big)}$.

Il est bien connu que γ est une mesure de probabilité. Mais pour prouver que la normalisation est la bonne utilise-t-on un calcul en coordonnées sphériques ? Autrement dit, est-ce qu'on utilise $\sigma(\mathbb{S}^{d-1}) = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$ pour obtenir $\mu(\mathbb{R}^d) = 1$? Auquel cas on aurait triché honteusement. Pour se rassurer on va vérifier que tout va bien.

Par Fubini, on a $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} \,\mathrm{d}x = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} \,\mathrm{d}u\right)^d$. Et il s'agit de vérifier que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} \,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}$.

Par ailleurs, par un changement de coordonnée polaire (i.e. sphérique pour $d = 2$),

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t\right)^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^1} e^{-\frac{R^2}{2}} R \,\mathrm{d}R \,\mathrm{d}\sigma_1(\theta) = \int_{\mathbb{S}^1} \mathrm{d}\sigma_1(\theta) \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} \,\mathrm{d}t\right) \\ &= \int_{\mathbb{S}^1} \mathrm{d}\sigma_1(\theta) = \sigma_1(\mathbb{S}^1),\end{aligned}$$

où σ_1 est la mesure superficielle de $\mathbb{S}^1$. Pour obtenir que γ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ on utilise donc $\sigma_1(\mathbb{S}^1) = 2\pi$, i.e. le cas $d = 2$ de notre formule. On a donc un peu triché et il serait de bon ton de se convaincre que $\sigma_1(\mathbb{S}^1) = 2\pi$ par une autre méthode.

Ici $\mathbb{S}^1$ est une courbe, et on a vu en cours que sa mesure superficielle coïncide avec sa longueur d'arc. On paramètre le cercle $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ à vitesse 1 par $\alpha : \theta \mapsto e^{i\theta}$ de $[0, 2\pi[$ vers $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Alors

$$\sigma_1(\mathbb{S}^1) = \int_0^{2\pi} |\alpha'(\theta)| \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

Donc tout va bien, on n'a pas fait de raisonnement circulaire.

Remarque. Sauf que...

- La mesure σ_1, qui est la longueur d'arc sur $\mathbb{S}^1$, est aussi la mesure-image par $\alpha : \theta \mapsto e^{i\theta}$ de la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}\theta$ sur $[0, 2\pi[$ (car $|\alpha'| \equiv 1$). C'est pour ça qu'on parle parfois de "mesure de Lebesgue sur $\mathbb{S}^1$" pour désigner $\sigma_1 = \alpha_*(\mathrm{d}\theta)$ et qu'on la note souvent $\mathrm{d}\theta$.
- On peut avoir l'illusion qu'on a *prouvé* que le cercle unité est de longueur 2π. Sauf qu'on a utilisé le fait que α réalise une bijection de $[0, 2\pi[$ vers $\mathbb{S}^1$. Cela est vrai car *par définition* 2π est l'unique générateur positif du noyau du morphisme de groupe $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ (qui est surjectif, non-injectif et continu). On a donc en fait défini π de sorte que 2π soit la longueur de $\mathbb{S}^1$. Il serait donc plus honnête de dire que $\sigma_1(\mathbb{S}^1) = 2\pi$ par définition de π, et que le calcul ci-dessus permet de le retrouver si on a oublié cette définition.

3. Soit B le boule unité de $\mathbb{R}^d$, montrer que $\sigma(\mathbb{S}^{d-1}) = d \cdot \mathrm{Vol}(B)$.
   On fait un changement de coordonnées sphériques :

$$\mathrm{Vol}(B) = \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \mathbf{1}_B(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} R^{d-1} \,\mathrm{d}R \,\mathrm{d}\sigma(\theta) = \sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^1 R^{d-1} \,\mathrm{d}R = \frac{1}{d} \sigma(\mathbb{S}^{d-1}).$$

Exercice 5 (Encore une convergence dans $\mathcal{D}'$)**.** Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on définit la couronne sphérique $C_\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; 1 - \varepsilon < \|x\| < 1 + \varepsilon\right\}$ et $f_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{1}_{C_\varepsilon}$. Montrer que f_ε converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ lorsque $\varepsilon \to 0$, vers une distribution mystère que l'on déterminera.

Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, la fonction f_ε est bornée à support compact, donc $f_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, la fonction $f_\varepsilon \varphi$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et nulle au voisinage de 0. D'après la formule (1) prouvée dans l'exercice 1, on a donc

$$\langle f_\varepsilon \,, \varphi \rangle = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \mathbf{1}_{C_\varepsilon}(x) \varphi(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} R^{d-1} \mathbf{1}_{C_\varepsilon}(R\theta) \varphi(R\theta) \,\mathrm{d}\sigma(\theta) \,\mathrm{d}R,$$

où σ est la mesure superficielle sur la sphère unité $\mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$. Comme $\mathbf{1}_{C_\varepsilon}(R\theta) = \mathbf{1}_{]1-\varepsilon,1+\varepsilon[}(R)$ pour tout $R > 0$ et $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$, on a alors

$$\langle f_\varepsilon\,, \varphi\rangle = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} R^{d-1}\varphi(R\theta)\,\mathrm{d}\sigma(\theta)\,\mathrm{d}R.$$

Lorsque $R \to 1$, l'intégrande converge vers $\varphi(\theta)$. Pour R proche de 1 on s'attend à ce qu'il soit de la forme $\varphi(\theta)$ plus une erreur. Cela suggère que $\langle f_\varepsilon\,, \varphi\rangle$ doit converger vers $\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\varphi(\theta)\,\mathrm{d}\sigma(\theta)$. On va prouver que c'est bien le cas.
Soit $R > 0$, pour tout $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$, on a $|\varphi(R\theta) - \varphi(\theta)| \leqslant \|R\theta - \theta\|\|D\varphi\|_\infty \leqslant |R-1|\|D\varphi\|_\infty$ par le théorème des accroissements finis. Donc, pour tout $R \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ et $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$,

$$\begin{aligned}
\left|R^{d-1}\varphi(R\theta) - \varphi(\theta)\right| &\leqslant \left|R^{d-1}\varphi(R\theta) - \varphi(R\theta)\right| + |\varphi(R\theta) - \varphi(\theta)| \\
&\leqslant \left|R^{d-1} - 1\right|\|\varphi\|_\infty + |R-1|\|D\varphi\|_\infty \\
&\leqslant |R-1|\left(\|D\varphi\|_\infty + \left|\sum_{i=0}^{d-2} R^i\right|\|\varphi\|_\infty\right) \leqslant \varepsilon\underbrace{(\|D_\varphi\|_\infty + (d-1)2^d\|\varphi\|_\infty)}_{A_\varphi}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left|\langle f_\varepsilon\,, \varphi\rangle - \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\varphi(\theta)\,\mathrm{d}\sigma(\theta)\right| &= \frac{1}{2\varepsilon}\left|\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\left(R^{d-1}\varphi(R\theta) - \varphi(\theta)\right)\mathrm{d}\sigma(\theta)\,\mathrm{d}R\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\left|R^{d-1}\varphi(R\theta) - \varphi(\theta)\right|\mathrm{d}\sigma(\theta)\,\mathrm{d}R \\
&\leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\varepsilon A_\varphi\,\mathrm{d}\sigma(\theta)\,\mathrm{d}R = \varepsilon A_\varphi\sigma(\mathbb{S}^{d-1}).
\end{aligned}$$

Comme σ est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$, elle donne une masse finie aux compacts. Le dernier terme est donc un $O(\varepsilon)$. Donc, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\langle f_\varepsilon\,, \varphi\rangle \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\varphi(\theta)\,\mathrm{d}\sigma(\theta) = \langle\sigma\,, \varphi\rangle.$$

C'est-à-dire $f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \sigma$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. En particulier, pour la fonction-test $\varphi = \mathbf{1}$, on retrouve l'idée que le volume $(d-1)$-dimensionnel de $\mathbb{S}^{d-1}$ est obtenu comme limite des volumes d-dimensionnels des couronnes sphériques C_ε, renormalisés par leurs épaisseurs.