Université Paris-Saclay
2023 – 2024

Master Mathématiques et Applications
Distributions et Analyse de Fourier

Chargés de TD : Blanche Buet et Thomas Letendre.

Feuille 7 – Transformée de Fourier et convolution

Définition. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, on dit que la fonction f est *à croissance lente* si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ il existe $C \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $|\partial^\alpha f(x)| \leqslant C\langle x \rangle^k$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, où on a noté $\langle x \rangle = \left(1 + \|x\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. On note $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$ le sous-espace de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ formé par les fonctions à croissance lente.

Exercice 1 (Transformée de Fourier des distributions à support compact)**.** Soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, on rappelle que $\widehat{S}$ est continue et qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C \geqslant 0$ tels que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, $|\widehat{S}(\xi)| \leqslant C\langle \xi \rangle^k$.

1. Montrer qu'en fait $\widehat{S} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$.

   En fait, le cours énonce qu'il existe $C \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $|\widehat{S}| \leqslant C(1 + \|\cdot\|)^k$. Mais $\xi \mapsto \frac{\langle \xi \rangle}{1+\|\xi\|}$ est une fonction continue strictement positive sur $\mathbb{R}^d$ qui tend vers 1 lorsque $\|\xi\| \to +\infty$. En particulier cette fonction est bornée entre deux constantes strictement positives, et la formulation du cours est donc équivalente à la formulation ci-dessus.

   Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$, au sens des distributions on a $\partial^\alpha \widehat{S} = \mathcal{F}((-iX)^\alpha S)$, par exemple par l'exercice 4 de la feuille 6. Comme S est à support compact, il en est de même de $S_\alpha = (-iX)^\alpha S$. Donc $\partial^\alpha \widehat{S} = \widehat{S_\alpha}$, et il existe $C_\alpha \geqslant 0$ et $k_\alpha \in \mathbb{N}$ tels que $|\widehat{S_\alpha}| \leqslant C_\alpha \langle X \rangle^{k_\alpha}$.

   Donc $\widehat{S}$ admet des dérivées partielles continues à tout ordre, au sens des distributions donc au sens usuel. Donc $\widehat{S}$ est $\mathcal{C}^\infty$, et les majorations précédentes montrent que $\widehat{S} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$.

2. (*facultatif*) On note $e : (\xi, x) \mapsto e^{-ix\cdot\xi}$ et $\partial_\xi^\alpha e$ la dérivée partielle de e d'ordre α rapport à la variable ξ. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha \widehat{S} : \xi \mapsto \left\langle S\,, (\partial_\xi^\alpha e)(\xi, \cdot) \right\rangle$.

   Il a été vu en cours que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\widehat{S}(\xi) = \langle S\,, e_{-\xi} \rangle = \langle S\,, e(\xi, \cdot) \rangle$, ce qui règle le cas $\alpha = 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$, en appliquant le résultat précédent à S_α, on obtient pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$:

   $$\partial^\alpha \widehat{S}(\xi) = \widehat{S_\alpha}(\xi) = \langle S_\alpha\,, e(\xi, \cdot) \rangle = \langle (-iX)^\alpha S\,, e(\xi, \cdot) \rangle = \langle S\,, (-iX)^\alpha e(\xi, \cdot) \rangle = \left\langle S\,, \left(\partial_\xi^\alpha e\right)(\xi, \cdot) \right\rangle.$$

Exercice 2 (Produit de $\mathcal{S}'$ par $\mathcal{O}_M$)**.** On sait par le cours que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ sont stables par multiplication par un polynôme. On va voir qu'en fait ils sont stables par multiplication par un élément de $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$.

1. Soient $\rho \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$ et $p \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $C \geqslant 0$ et $q \geqslant p$ tels que $N_p(\rho\varphi) \leqslant CN_q(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

   Soient α et $\beta \in \mathbb{N}^d$ de longueurs inférieures à p. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

   $$x^\alpha \partial^\alpha (\rho\varphi)(x) = \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} x^\alpha \partial^\gamma \rho(x) \partial^{\beta-\gamma} \varphi(x).$$

   Soit $\gamma \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\gamma| \leqslant p$. Comme $\rho \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$ il existe $C_\gamma \geqslant 0$ et $k_\gamma \in \mathbb{N}$ tels qu'on ait $|\partial^\gamma \rho| \leqslant C_\gamma \langle X \rangle^{k_\gamma} \leqslant C_\gamma \left(1 + \|X\|^2\right)^{k_\gamma}$. Par ailleurs, on a déjà vu dans l'exercice 2 de la feuille 6 qu'il existe $A_\gamma \geqslant 0$ tel que $\|\big(1+\|X\|^2\big)^{k_\gamma}\psi\|_\infty \leqslant A_\gamma N_{2k_\gamma}(\psi)$ pour tout $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Mais alors, si $\gamma \leqslant \beta$,

$$\begin{aligned}\left|x^\alpha \partial^\gamma \rho(x) \partial^{\beta-\gamma}\varphi(x)\right| \leqslant C_\gamma \big(1+\|x\|^2\big)^{k_\gamma} \left|x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\varphi(x)\right| &\leqslant C_\gamma \|\big(1+\|X\|^2\big)^{k_\gamma} X^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\varphi\|_\infty \\ &\leqslant C_\gamma A_\gamma N_{2k_\gamma}\Big(X^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\varphi\Big) \leqslant B_{\alpha,\beta,\gamma} N_{2k_\gamma+p}(\varphi),\end{aligned}$$

où la dernière inégalité a été vue en cours dans la preuve de la stabilité par $\psi \mapsto X^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\psi$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. En notant $q = \max\{p + 2k_\gamma \mid |\gamma| \leqslant p\}$ et $B = \max\{B_{\alpha,\beta,\gamma} \mid |\alpha| \leqslant p, |\beta| \leqslant p, \gamma \leqslant \beta\}$ on obtient $\left\|X^\alpha \partial^\gamma \rho \partial^{\beta-\gamma}\varphi\right\|_\infty \leqslant B_{\alpha,\beta,\gamma} N_{2k_\gamma+p}(\varphi) \leqslant B N_q(\varphi)$. Et donc

$$\|X^\alpha \partial^\alpha(\rho\varphi)\|_\infty \leqslant \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} \left\|X^\alpha \partial^\gamma \rho \partial^{\beta-\gamma}\varphi\right\|_\infty \leqslant B N_q(\varphi) \sum_{\gamma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\gamma} = C N_q(\varphi),$$

où $C \geqslant 0$ et $q \in \mathbb{N}$ dépendent de ρ et p mais pas de φ.

2. Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\rho \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$, montrer que la forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ définie par $\varphi \mapsto \langle T\,, \rho\varphi\rangle$ est une distribution tempérée. On la notera $\rho T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

   Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ il existe $q \in \mathbb{N}$ et $C \geqslant 0$ tels que $N_p(\rho\varphi) \leqslant C N_q(\varphi) < +\infty$, d'après la question 1. Donc $\rho\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Notons $M_\rho : \varphi \mapsto \rho\varphi$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même. Cette application est linéaire, et elle est continue par la question 1. Donc $T \circ M_\rho : \varphi \mapsto \langle T\,, \rho\varphi\rangle$ est linéaire continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ vers $\mathbb{C}$.

   À la main, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A \geqslant 0$ tels que $|\langle T\,, \psi\rangle| \leqslant A N_p(\psi)$ pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Donc pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on obtient

$$|\langle T\,, \rho\varphi\rangle| \leqslant A N_p(\rho\varphi) \leqslant AC N_q(\varphi),$$

   où $C \geqslant 0$ et $q \in \mathbb{N}$ sont donnés par la question 1. Ainsi $T \circ M_\rho : \varphi \mapsto \langle T\,, \rho\varphi\rangle$ définit bien une distribution tempérée.

Exercice 3 (Convolution $\mathcal{D}' * \mathcal{E}'$ — *facultatif*)**.** Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on rappelle que $T * \varphi : x \mapsto \langle \tau_x \check{T}\,, \varphi\rangle = \langle T\,, \varphi(x - \cdot)\rangle$ est $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$, et même $T * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. On rappelle également que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ alors $T * S$ est la distribution $\varphi \mapsto \langle T\,, \check{S} * \varphi\rangle$.

1. Montrer que la convolution est bilinéaire sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ puis sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.

   Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, λ et $\mu \in \mathbb{C}$. Par bilinéarité du crochet on a,

$$\begin{aligned}(T_1 + \lambda T_2) * (\varphi_1 + \mu\varphi_2)(x) &= \langle T_1 + \lambda T_2\,, (\varphi_1 + \mu\varphi_2)(x - \cdot)\rangle \\ &= \langle T_1\,, \varphi_1(x-\cdot)\rangle + \lambda\langle T_2\,, \varphi_1(x-\cdot)\rangle + \mu\langle T_1\,, \varphi_2(x-\cdot)\rangle + \lambda\mu\langle T_2\,, \varphi_2(x-\cdot)\rangle \\ &= T_1 * \varphi_1(x) + \lambda T_2 * \varphi_1(x) + \mu T_1 * \varphi_2(x) + \lambda\mu T_2 * \varphi_2(x)\end{aligned}$$

   pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Donc la convolution est bilinéaire de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ vers $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Par restriction, elle l'est aussi de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ vers $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

   Soient maintenant $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S_1, S_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, λ et $\mu \in \mathbb{C}$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a $(S_1 \check{+} \mu S_2) * \varphi = \check{S}_1 * \varphi + \mu\check{S}_2 * \varphi$ par le cas précédent. Par bilinéarité du crochet de nouveau,

$$\begin{aligned}\langle (T_1 + \lambda T_2) * (S_1 + \mu S_2)\,, \varphi\rangle = \Big\langle T_1 + \lambda T_2\,, (S_1 \check{+} \mu S_2) * \varphi\Big\rangle &= \big\langle T_1 + \lambda T_2\,, \check{S}_1 * \varphi + \mu\check{S}_2 * \varphi\big\rangle \\ &= \langle T_1\,, \check{S}_1 * \varphi\rangle + \lambda\langle T_2\,, \check{S}_1 * \varphi\rangle + \mu\langle T_1\,, \check{S}_2 * \varphi\rangle + \lambda\mu\langle T_2\,, \check{S}_2 * \varphi\rangle \\ &= \langle T_1 * S_1 + \lambda T_2 * S_1 + \mu T_1 * S_2 + \lambda\mu T_2 * S_2\,, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

   Donc la convolution est bilinéaire de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ vers $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

2. Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $a \in \mathbb{R}^d$, montrer que $\tau_a T * \varphi = \tau_a(T * \varphi) = T * \tau_a \varphi$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}\tau_a T * \varphi(x) &= \langle \tau_a T \,, \varphi(x - \cdot)\rangle = \langle T \,, \tau_{-a}(\varphi(x - \cdot))\rangle \\ &= \langle T \,, \varphi(x - a - \cdot)\rangle = T * \varphi(x - a) = \tau_a(T * \varphi)(x) \\ &= \langle T \,, \varphi(x - \cdot - a)\rangle = \langle T \,, (\tau_a \varphi)(x - \cdot)\rangle = T * \tau_a \varphi(x).\end{aligned}$$

D'où le résultat.

3. Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $a \in \mathbb{R}^d$, montrer que $\tau_a(T * S) = \tau_a T * S = T * \tau_a S$.
Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, en utilisant la question 2 on a

$$\begin{aligned}\langle \tau_a(T * S) \,, \varphi\rangle &= \langle T * S \,, \tau_{-a}\varphi\rangle = \langle T \,, \check{S} * \tau_{-a}\varphi\rangle \\ &= \langle T \,, \tau_{-a}\big(\check{S} * \varphi\big)\rangle = \langle \tau_a T \,, \check{S} * \varphi\rangle = \langle \tau_a T * S \,, \varphi\rangle \\ &= \langle T \,, \big(\tau_{-a}\check{S}\big) * \varphi\rangle = \langle T \,, (\check{\tau_a S}) * \varphi\rangle = \langle T * \tau_a S \,, \varphi\rangle,\end{aligned}$$

où on a utilisé la relation $\tau_{-a}\check{S} = (\check{\tau_a S})$. Le résultat est donc établi sous réserve que l'on prouve cette relation. Or, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}\langle \tau_{-a}\check{S} \,, \psi\rangle &= \langle \check{S} \,, \tau_a \psi\rangle = \langle S \,, \check{\tau_a \psi}\rangle = \langle S \,, \check{\psi(\cdot - a)}\rangle = \langle S \,, \psi(- \cdot - a)\rangle = \langle S \,, \check{\psi}(\cdot + a)\rangle \\ &= \langle S \,, \tau_{-a}\check{\psi}\rangle = \langle \tau_a S \,, \check{\psi}\rangle = \langle (\check{\tau_a S}) \,, \varphi\rangle,\end{aligned}$$

ce qui prouve la relation souhaitée.

4. En déduire une expression simple de la distribution $T * (\partial^\alpha \delta_a)$ où $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $a \in \mathbb{R}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
Remarquons déjà que $\partial^\alpha \delta_a = \tau_a(\partial^\alpha \delta_0) = \partial^\alpha(\tau_a \delta_0)$. En utilisant la question 3 on obtient

$$T * \partial^\alpha \delta_a = T * \partial^\alpha(\tau_a \delta_0) = \partial^\alpha T * \tau_a \delta_0 = \tau_a(\partial^\alpha T) * \delta_0 = \tau_a(\partial^\alpha T) = \partial^\alpha(\tau_a T).$$

Exercice 4 (Convolution de fonctions au sens des distributions)**.** Soient p, q et $r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, de sorte que $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$. On suppose que g est nulle presque partout hors d'un compact $K \subset \mathbb{R}^d$. Montrer que $T_f * T_g = T_{f*g}$.
Comme $g_{|\mathbb{R}^d \setminus K} = 0$ presque partout, on a $\operatorname{supp}(T_g) \subset K$ et donc $T_g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\check{T}_g * \varphi(y) = \langle \tau_y T_g \,, \varphi\rangle = \langle T_g \,, \tau_{-y}\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} g(z)\varphi(z + y)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^d} g(x - y)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Donc, en raisonnant formellement dans un premier temps :

$$\begin{aligned}\langle T_f * T_g \,, \varphi\rangle &= \langle T_f \,, \check{T}_g * \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x - y)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle T_{f*g} \,, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de justifier l'échange des intégrales. On va pour cela prouver que la fonction $(x, y) \mapsto \varphi(x)f(y)g(x - y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, ce qui permettra d'appliquer le théorème de Fubini.

Par Fubini–Tonnelli, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |\varphi(x)||f(y)||g(x-y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)||g(x-y)|\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathrm{supp}(\varphi)} |\varphi(x)|(|f|*|g|)(x)\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant \|\varphi\|_\infty \int_{\mathrm{supp}(\varphi)} (|f|*|g|)(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Comme $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, on a $|f|*|g| \in L^r(\mathbb{R}^d) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Le support de φ étant compact le dernier terme est fini, ce qui prouve l'intégrabilité souhaitée.

Exercice 5 (Distributions harmoniques)**.** On sait par le cours que Δ admet une solution fondamentale (en particulier une paramétrix) $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathrm{supp}(E) = \mathbb{R}^d$ et $\mathrm{supp\,sing}(E) = \{0\}$. Cela implique pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ que $\mathrm{supp\,sing}(T) = \mathrm{supp\,sing}(\Delta T)$, en particulier les distributions harmoniques sont lisses. On va donner une démonstration plus élémenaire de ce dernier point.

1. Montrer que Δ admet une paramétrix $\Pi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.

   On a $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\Delta E = \delta_0$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ une fonction plateau constante à 1 sur la boule B de centre 0 et de rayon 1. On pose $\Pi = \chi E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. On a alors

   $$\delta_0 = \Delta E = \Delta(\chi E + (1-\chi)E) = \Delta\Pi + \underbrace{\Delta((1-\chi)E)}_{:=w}$$

   Comme $\chi \equiv 1$ sur B, on a $((1-\chi)E)_{|B} = 0 \in \mathcal{C}^\infty(B)$. Par ailleurs $((1-\chi)E)_{|\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}$ est $\mathcal{C}^\infty$ car E est lisse hors de 0. Donc au final $(1-\chi)E \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

2. En déduire que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est harmonique alors T est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$.

   On a $\Pi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ tels que $\Delta\Pi = \delta_0 + w$. Soit $R > 0$ tel que $\mathrm{supp}(\Pi) \subset \overline{B(0,R)}$, alors $w = \delta_0 - \Delta\Pi$ est nulle hors de $\overline{B(0,R)}$ et donc $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ on a donc

   $$T = T*\delta_0 = T*(\Delta\Pi - w) = \underbrace{T*\Delta\Pi}_{\mathcal{D}'*\mathcal{E}'} - \underbrace{T*w}_{\mathcal{D}'*\mathcal{D}} = \Delta T * \Pi - T*w$$

   Si $\Delta T = 0$ alors $T = -T*w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

3. Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est harmonique, montrer que T est un polynôme.

   C'est un cas particulier d'un résultat du cours. Notons $P = \sum_{i=1}^d X_i^2$, de sorte que $\Delta = P(\partial)$. Alors $-\|\cdot\|^2$ est le symbole de Δ, qui ne s'annule pas hors de 0. Les solutions de $\Delta T = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ sont donc polynômiales.

   À la main, soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ harmonique. On passe en Fourier dans l'équation $\Delta T = 0$ ce qui nous donne : $0 = \widehat{\Delta T} = \widehat{P(\partial)T} = P(i\xi)\widehat{T} = -\|\xi\|^2\widehat{T}$. Donc $\widehat{T}_{|\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} = 0$ et $\widehat{T}$ est supportée en 0. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ et une famille $(a_\alpha)_{|\alpha|\leqslant m}$ de complexes, indexée par les multi-indices $\alpha \in \mathbb{N}^d$ de longueur au plus m, telle que $\widehat{T} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0$. On applique la transformation de Fourier de part et d'autre. En utilisant la formule d'inversion on obtient :

   $$(2\pi)^d \check{T} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha \widehat{\partial^\alpha\delta_0} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha (ix)^\alpha \widehat{\delta_0} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha (ix)^\alpha.$$

   Finalement $T = (\frac{1}{2\pi})^d \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-i)^{|\alpha|} a_\alpha X^\alpha$.

Remarque. Attention, les polynômes sont tous dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et leurs transformées de Fourier sont supportées en 0, mais ils ne sont pas tous harmoniques. Par exemple $\Delta(\sum_{i=1}^d X_i^2) = 2d$.

4. Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est harmonique et bornée, montrer que T est constante.

   On a vu dans la question 2 que si $\Delta T = 0$ alors $T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Cela a alors du sens de dire que T est bornée. Si c'est le cas $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, et par la question 3 on a $T \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_d]$.

   Ainsi T est un polynôle borné donc constant. Précisons un peu, en raisonnant par l'absurde. Si T n'était pas constant, il existerait une droite vectorielle, disons $\mathbb{R}u$ avec $u \in \mathbb{S}^{d-1}$, sur laquelle il n'est pas constant. La fonction $P : t \mapsto T(tu)$ serait alors une fonction polynomiale d'une variable non constante. On aurait donc $|T(tu)| = |P(t)| \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, ce qui contredirait le fait que T est borné.

Exercice 6 (Fonctions propres du laplacien)**.** Dans cet exercice, on s'intéresse aux solutions de l'équation $\Delta T + \lambda T = 0$, où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est l'inconnue.

1. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\Delta T + \lambda T = 0$, montrer que $T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

   Notons $P = \lambda + \sum_{i=1}^d X_i^2$ de sorte que $\Delta + \lambda\,\mathrm{Id} = P(\partial)$. Comme $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ on peut passer en Fourier dans l'égalité $P(\partial)T = (\Delta + \lambda\,\mathrm{Id})T = 0$. On obtient $0 = P(i\xi)\widehat{T} = (\lambda - \|\xi\|^2)\widehat{T}$, et donc $\mathrm{supp}(\widehat{T}) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid \|\xi\|^2 = \lambda\}$. Le support de $\widehat{T}$ est donc inclus dans la sphère de rayon $\sqrt{\lambda}$ si $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $\emptyset$ sinon. Donc $\widehat{T} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Par la formule d'inversion de Fourier, $(2\pi)^d\check{T} = \mathcal{F}(\widehat{T})$. D'après l'exercice 1, cette fonction est lisse, et donc $T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

   On peut aussi sortir l'artillerie lourde. Le symbole principal de $P(\partial)$ est $-\|\cdot\|^2$ donc $P(\partial)$ est elliptique. D'après le cours il admet une paramétrix $\Pi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathrm{supp\,sing}(\Pi) = \{0\}$. Alors $\mathrm{supp\,sing}(T) = \mathrm{supp\,sing}(P(\partial)T) = \emptyset$ et donc T est lisse.

2. Pour quels $\lambda \in \mathbb{C}$ existe-t-il $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ non nulle telle que $\Delta T + \lambda T = 0$.

   On vient de voir que si $\Delta T + \lambda T = 0$ alors $\widehat{T}$ est telle que $\mathrm{supp}(\widehat{T}) \subset \big\{\xi \in \mathbb{R}^d \bigm| \|\xi\|^2 = \lambda\big\}$.

   Si $\lambda \notin \mathbb{R}_+$ on a $\mathrm{supp}(\widehat{T}) = \emptyset$, donc $\widehat{T} = 0$, et donc $T = 0$. Cela revient à reprouver dans un cas particulier le résultat du cours affirmant que si le symbole $\xi \mapsto P(i\xi) = \lambda - \|\xi\|^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^d$ alors $P(\partial) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est injectif.

   Si $\lambda = 0$, alors $\widehat{T}$ est supportée en 0. Par exemple, pour $\widehat{T} = \delta_0$ on obtient $T = (2\pi)^d$ qui est bien une solution non nulle de $\Delta T = 0$. Plus généralement, les polynômes harmoniques donnent des solutions non nulles de $\Delta T = 0$, voir exercice 5.

   On suppose désormais que $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et on procède par analyse-synthèse. Si $\Delta T + \lambda T = 0$ alors $\widehat{T}$ est supportée sur la sphère $\mathbb{S}_\lambda$ de rayon $\sqrt{\lambda}$ centrée en 0. Attention, la réciproque n'est pas vraie, on peut avoir $\widehat{T}$ supportée sur $\mathbb{S}_\lambda$ mais $(\lambda - \|\xi\|^2)\widehat{T} \neq 0$ et donc $\Delta T + \lambda T \neq 0$. Cependant, si on suppose de plus que $\widehat{T}$ est d'ordre 0, on a montré dans l'exercice 2 de la feuille 3 que $(\lambda - \|\xi\|^2)\widehat{T} = 0$, et donc $\Delta T + \lambda T = 0$. Il s'agit donc de construire $\widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ d'ordre 0 et supportée sur $\mathbb{S}_\lambda$.

   On peut considérer le cas où $\widehat{T} = \delta_a$ avec $\|a\|^2 = \lambda$, ce qui correspond à $T = (2\pi)^d e_a$. On vérifie d'ailleurs à la main que $\Delta e_a = -\|a\|^2 e_a$.

   On peut construire d'autres exemples. Dans l'exercice 7 de la feuille 6, on a construit une mesure de Radon $\mu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ supportée par la sphère unité (en fait la mesure de probabilité sur $\mathbb{S}_1$ uniforme sous l'action de $O_d(\mathbb{R})$). En mimant cette construction on définit de même la mesure de probabilité uniforme μ_λ sur $\mathbb{S}_\lambda$. Plus simplement μ_λ peut être obtenue par dilatation de μ en posant

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d), \qquad \langle \mu_\lambda , \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu_\lambda(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\Big(\sqrt{\lambda}x\Big)\,\mathrm{d}\mu(x) = \langle \mu , \varphi(\sqrt{\lambda}\cdot) \rangle.$$

On obtient ainsi $\mu_\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ qui est une une distribution d'ordre 0 supportée par $\mathbb{S}_\lambda$. Notamment $(\lambda - \|\xi\|^2)\mu_\lambda = 0$ par l'exercice 2 de la feuille 3. Soit $T_\lambda = (2\pi)^{-d}\widehat{\mu_\lambda}$, par inversion de Fourier on obtient que $\widehat{T_\lambda} = \check{\mu_\lambda} = \mu_\lambda$ (invariance de μ_λ par $-\mathrm{Id}$, ou calcul direct). Donc $\Delta T_\lambda + \lambda T_\lambda = 0$, et $T_\lambda \neq 0$ sinon on aurait $\mu_\lambda = 0$.

Finalement $\Delta T + \lambda T = 0$ a des solutions non nulles dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ (donc dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$) si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 7 (Solution fondamentale de l'opérateur de la chaleur)**.** Soit $H = \mathbf{1}_{]0,+\infty[}$ la fonction de Heaviside, on considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F : (t,x) \longmapsto \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

1. Vérifier que $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

   Il suffit de vérifier que $F \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact, il existe $M > 0$ tel que $K \subset [-M,M]^2$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_K |F(t,x)| \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{[-M,M]^2} |F(x,t)| \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_{t=0}^{M}\int_{x=-M}^{M} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant 2M \int_0^M \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,\mathrm{d}t \\ \leqslant \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_0^M \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t < +\infty.\end{aligned}$$

   Donc $F \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

2. Montrer que $\partial_t F - \partial_x^2 F = 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

   Sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, la fonction F est $\mathcal{C}^\infty$. En particulier, ses dérivées au sens des distributions coïncident avec ses dérivées usuelles. Il suffit donc de faire le calcul. Pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\partial_t F(t,x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}^3} 4\pi \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\frac{x^2}{4t^2} = F(t,x)\left(\frac{x^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right).$$

   Et d'autre part,

$$\begin{aligned}\partial_x F(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\left(-\frac{2x}{4t}\right) = -\frac{x}{2t}F(t,x) \\ \partial_x^2 F(t,x) &= -\frac{1}{2t}F(t,x) - \frac{x}{2t}\partial_x F(t,x) = F(t,x)\left(\frac{x^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right).\end{aligned}$$

   On obtient donc bien $\partial_t F(t,x) - \partial_x^2 F(t,x) = 0$.

3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, prouver que

$$\left\langle \partial_t F - \partial_x^2 F \,, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon, x)\varphi(\varepsilon, x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

   Sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, la fonction F est $\mathcal{C}^\infty$ et $\partial_t F - \partial_x^2 F = 0$. Sur $\mathbb{R}^2$ entier, il faut calculer $\partial_t F - \partial_x^2 F$ au sens des distributions. Comme $F \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned}\left\langle \partial_t F - \partial_x^2 F \,, \varphi \right\rangle = \langle \partial_t F \,, \varphi \rangle - \left\langle \partial_x^2 F \,, \varphi \right\rangle = -\langle F \,, \partial_t \varphi \rangle - \left\langle F \,, \partial_x^2 \varphi \right\rangle = -\left\langle F \,, \partial_t \varphi + \partial_x^2 \varphi \right\rangle \\ = -\int_{\mathbb{R}^2} F(t,x)\big(\partial_t \varphi(t,x) + \partial_x^2 \varphi(t,x)\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{i}$$

Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, la fonction $\partial_t \varphi + \partial_x^2 \varphi$ est bornée, et nulle hors de $\operatorname{supp}(\varphi)$. Par ailleurs F est intégrable sur le compact $\operatorname{supp}(\varphi)$. Donc au final, $F\big(\partial_t \varphi + \partial_x^2 \varphi\big)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} F(t,x)\big(\partial_t \varphi(t,x) + \partial_x^2 \varphi(t,x)\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x &= \int_{]0,+\infty[\times\mathbb{R}} F(t,x)\big(\partial_t \varphi(t,x) + \partial_x^2 \varphi(t,x)\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{]\varepsilon,+\infty[\times\mathbb{R}} F(t,x)\big(\partial_t \varphi(t,x) + \partial_x^2 \varphi(t,x)\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{ii}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$, par intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{+\infty} F(t,x)\partial_t \varphi(t,x)\,\mathrm{d}t &= [F(t,x)\varphi(t,x)]_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \partial_t F(t,x)\varphi(t,x)\,\mathrm{d}t \\ &= -F(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x) - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \partial_t F(t,x)\varphi(t,x)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Donc

$$\int_{]\varepsilon,+\infty[\times\mathbb{R}} F(t,x)\partial_t \varphi(t,x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x - \int_{]\varepsilon,+\infty[\times\mathbb{R}} \partial_t F(t,x)\varphi(t,x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.$$

Soit $t > \varepsilon$, en intégrant deux fois par parties et en utilisant le fait que φ est à support compact :

$$\int_{\mathbb{R}} F(t,x)\partial_x^2 \varphi(t,x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} \partial_x F(t,x)\partial_x \varphi(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 F(t,x)\varphi(t,x)\,\mathrm{d}x.$$

Donc

$$\int_{]\varepsilon,+\infty[\times\mathbb{R}} F(t,x)\partial_x^2 \varphi(t,x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_{]\varepsilon,+\infty[\times\mathbb{R}} \partial_x^2 F(t,x)\varphi(t,x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.$$

Finalement, en utilisant la question 2,

$$\begin{aligned}&\int_{]\varepsilon,+\infty[\times\mathbb{R}} F(t,x)\big(\partial_t \varphi(t,x) + \partial_x^2 \varphi(t,x)\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &\qquad = -\int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x + \int_{]\varepsilon,+\infty[\times\mathbb{R}} \big(\partial_x^2 F(t,x) - \partial_t F(t,x)\big)\varphi(t,x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &\qquad = -\int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{iii}$$

En combinant les équations (i), (ii) et (iii), on obtient bien la relation (1).

4. Soit $P = T - X^2 \in \mathbb{R}[T,X]$, afin que $P(\partial) = \partial_t - \partial_x^2$. Déduire de ce qui précède que $P(\partial)F = \delta_0$.
On utilise la question 3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on a $\big\langle \partial_t F - \partial_x^2 F\,,\varphi\big\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x$. Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $F(\varepsilon,\cdot)$ est la densité gaussienne de variance 2ε. En particulier, $F(\varepsilon,\cdot) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}F(1,\frac{\cdot}{\sqrt{\varepsilon}}) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on peut espérer avoir la convergence $\varphi(\varepsilon,\cdot) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \varphi(0,\cdot)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par bicontinuité du crochet on aurait alors

$$\int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x = \langle F(\varepsilon,\cdot)\,,\varphi(\varepsilon,\cdot)\rangle \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \langle \delta_0\,,\varphi(0,\cdot)\rangle = \varphi(0,0) = \langle \delta_0\,,\varphi\rangle.$$

La convergence de $\varphi(\varepsilon,\cdot)$ vers $\varphi(0,\cdot)$ étant pénible à établir au sens de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on va suivre un chemin différent, par un calcul direct. Soit $\varepsilon > 0$, par le théorème des accroissements finis,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x - \varphi(0,0)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)(\varphi(\varepsilon,x)-\varphi(0,0))\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)|\varphi(\varepsilon,x)-\varphi(0,0)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)\|(\varepsilon,x)\|\|D\varphi\|_\infty\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \|D\varphi\|_\infty\left(\varepsilon\int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}}|x|F(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &\leqslant \|D\varphi\|_\infty\left(\varepsilon + \int_{\mathbb{R}}|x|F(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}}|x|F(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\int_{\mathbb{R}}|x|e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\left[-2\varepsilon e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}\right]_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{4\varepsilon}{\pi}}.$$

Donc

$$\left|\int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x - \varphi(0,0)\right| = O\big(\sqrt{\varepsilon}\big) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Ainsi, on a bien

$$\langle \partial_t F - \partial_x^2 F\,,\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0,0) = \langle\delta_0\,,\varphi\rangle,$$

et donc $\partial_t F - \partial_x^2 F = \delta_0$.

5. Soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, montrer qu'il existe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ tel que $\partial_t T - \partial_x^2 T = S$.
   Comme $P(\partial)$ possède une solution fondamentale $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, on peut construire par convolution les solutions de l'équation $P(\partial)T = S$. Soit $T = F * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, on a

$$P(\partial)T = P(\partial)(F*S) = P(\partial)F * S = \delta_0 * S = S.$$

6. Décrire les $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ telles que $\partial_t S - \partial_x^2 S = 0$.
   D'après le cours, comme $P(\partial)$ admet une solution fondamentale, cet opérateur linéaire est injectif de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même. Rappelons rapidement l'argument. Soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ on a

$$S = \delta_0 * S = P(\partial)F * S = F * P(\partial)S.$$

   Donc si $P(\partial)S = 0$ alors $S = 0$.
7. Existe-t-il des $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ non nulles telles que $\partial_t T - \partial_x^2 T = 0$?
   Oui, les fonctions constantes par exemple.
8. (*facultatif*) Montrer que $\operatorname{supp}\operatorname{sing}(F) = \{0\}$.
   Indication. Montrer par récurrence sur $|\alpha|$ que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$ il existe $Q_\alpha \in \mathbb{R}[T,X]$ et $k_\alpha \in \mathbb{N}$ tels que $\partial^\alpha F(t,x) = t^{-k_\alpha}F(t,x)Q_\alpha(t,x)$ pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Déjà $0 \in \operatorname{supp\,sing}(F)$. Sinon il existerait un voisinage de 0 sur lequel F est $\mathcal{C}^\infty$, mais alors $P(\partial)F = \delta_0$ serait $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, ce qui est absurde. On va montrer que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, c'est-à-dire que $\operatorname{supp\,sing}(F) = \{0\}$.
Il est clair que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Prouvons l'indication. Pour $\alpha = 0$ c'est vrai avec $Q_0 = 1$ et $k_0 = 0$. Supposons le résultat vrai pour tous les multi-indices de longueur l, soit $\alpha \in \mathbb{N}^2$ tel que $|\alpha| = l + 1$. Il existe $\beta \in \mathbb{N}^2$ tel que $|\beta| = l$ et $\partial^\alpha = \partial_t \partial^\beta$ ou $\partial^\alpha = \partial_x \partial^\beta$. En reprenant les calculs de la question 2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, dans le premier cas on a :

$$\begin{aligned}\partial^\alpha F(t,x) &= \partial_t \Big(t^{-k_\beta} F Q_\beta\Big)(t,x) \\ &= -k_\beta t^{-k_\beta - 1} F(t,x) Q_\beta(t,x) + t^{-k_\beta} \partial_t F(t,x) Q_\beta(t,x) + t^{-k_\beta} F(t,x) \partial_t Q_\beta(t,x) \\ &= t^{-k_\beta - 2} F(t,x) \underbrace{\left(-k_\beta t Q_\beta(t,x) + \frac{x^2 - 2t}{4} Q_\beta(t,x) + t^2 \partial_t Q_\beta(t,x)\right)}_{=Q_\alpha(t,x)}.\end{aligned}$$

Dans le second cas :

$$\begin{aligned}\partial^\alpha F(t,x) &= \partial_x \Big(t^{-k_\beta} F Q_\beta\Big)(t,x) = t^{-k_\beta} \partial_x F(t,x) Q_\beta(t,x) + t^{-k_\beta} F(t,x) \partial_x Q_\beta(t,x) \\ &= t^{-k_\beta - 1} F(t,x) \underbrace{\left(-\frac{x}{2} Q_\beta(t,x) + t \partial_x Q_\beta(t,x)\right)}_{=Q_\alpha(t,x)}.\end{aligned}$$

Ces formules sont immédiatement vraies sur $\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$ où tous les termes sont nuls. Ceci établit l'hérédité, et prouve le résultat souhaité par récurrence.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$ on a $t^{-k_\alpha} F(t,x) \xrightarrow[(t,x)\to(0,x_0)]{} 0$. Comme Q_α est continu sur $\mathbb{R}^2$, on a donc $\partial^\alpha F(t,x) \xrightarrow[(t,x)\to(0,x_0)]{} 0$. Donc $\partial^\alpha F$ se prolonge continuement par 0 sur $\{0\} \times \mathbb{R}^* \subset \mathbb{R}^2$.
Soit $\alpha \in \mathbb{N}^2$. Pour tout $x \neq 0$, $t \mapsto \partial^\alpha F(t,x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée se prolonge continument par 0 en 0. Cette fonction est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée en 0 est nulle. Donc $\partial_t \partial^\alpha F$ est bien définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et coincide avec l'extension continue de $\partial_t \partial^\alpha F_{|\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}}$. Dans l'autre direction, $\partial_x \partial^\alpha F$ est directement bien définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et continue. Donc F admet des dérivées partielles continues à tout ordre sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Donc F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Donc $\operatorname{supp\,sing}(F) = \{0\}$.

9. Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ telle que $\partial_t T - \partial_x^2 T = f$, montrer que $T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.
L'opérateur $P(\partial) = \partial_t - \partial_x^2$ admet une solution fondamentale (donc une paramétrix) dont le support singulier est $\{0\}$. Par le cours, $\operatorname{supp\,sing}(T) = \operatorname{supp\,sing}(P(\partial)T) = \operatorname{supp\,sing}(f) = \emptyset$ dans ce cas. Donc T est lisse.

Remarque. • L'équation de la chaleur régit l'évolution de la température, ou de façon équivalente de l'énergie thermique, dans un matériau au cours du temps. Si $U(t,x)$ dénote l'énergie thermique au point x à l'instant t, en l'absence de source de chaleur dans le milieu, cette énergie évolue selon l'équation $\partial_t U - \Delta_x U = 0$. En présence de sources de chaleur, cette équation devient $\partial_t U - \Delta_x U = f$, où le terme de source $f(t,x)$ correspond à l'énergie apportée au système au point x à l'instant t. Dans le cas d'un système à une dimension d'espace, une tige ou un fil par exemple, cette équation s'écrit $\partial_t U - \partial_x^2 U = f$.

- Dans l'exercice 7 on a résolu l'équation de la chaleur unidimensionnelle avec terme de source $\delta_{(0,0)}$, et la solution obtenue est nulle à l'infini. On pourra penser à un fil, initialement avec un profil de température uniforme, que l'on chauffe brutalement en un point, par exemple par une impulsion laser apportant ponctuellement une unité d'énergie.

Exercice 8 (Transformation de Fourier et convolution dans $\mathcal{S}'$)**.** Dans cet exercice on s'intéresse aux interactions entre transformation de Fourier et convolution.

1. Soient $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $p \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $N_p(\varphi * \rho) \leqslant C N_p(\varphi)$.
   Soient α et $\beta \in \mathbb{N}^d$ de longueur au plus p. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a :
   $$\begin{aligned} x^\alpha \partial^\beta(\varphi * \rho)(x) = x^\alpha \Big((\partial^\beta \varphi) * \rho \Big)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} (x - y + y)^\alpha \partial^\beta \varphi(y) \rho(x-y) \,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{\gamma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \int_{\mathbb{R}^d} y^\gamma \partial^\beta \varphi(y) (x-y)^{\alpha-\gamma} \rho(x-y) \,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$
   Donc
   $$\begin{aligned} \Big| x^\alpha \partial^\beta(\varphi * \rho)(x) \Big| &\leqslant \sum_{\gamma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \Big\| y^\gamma \partial^\beta \varphi \Big\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{\alpha-\gamma} |\rho(x-y)| \,\mathrm{d}y \\ &\leqslant N_p(\varphi) \sum_{\gamma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \int_{\mathbb{R}^d} |z|^{\alpha-\gamma} |\rho(z)| \,\mathrm{d}z \leqslant C_\alpha N_p(\varphi), \end{aligned}$$
   où $C_\alpha > 0$ est une constante ne dépendant que de ρ et α. Dans la dernière étape, on a utilisé le fait que $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ implique l'intégrabilité de $z \mapsto |z|^{\alpha-\gamma}|\rho(z)|$.
   On pose $C = \max_{|\alpha| \leqslant p} C_\alpha$. D'après le calcul précédent, pour tout α et $\beta \in \mathbb{N}^d$ de longueur au plus p on a :
   $$\Big\| x^\alpha \partial^\beta (\varphi * \rho) \Big\|_\infty \leqslant C N_p(\varphi),$$
   ce qui prouve le résultat.
2. Soient φ et $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\varphi * \rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et que $\widehat{\varphi * \rho} = \widehat{\varphi}\, \widehat{\rho}$.
   Soient α et $\beta \in \mathbb{N}^d$ et notons $p = \max(|\alpha|, |\beta|)$. D'après la question précédente, on a :
   $$\Big\| x^\alpha \partial^\beta (\varphi * \rho) \Big\|_\infty \leqslant C N_p(\varphi) < +\infty.$$
   Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $N_p(\varphi * \rho) < +\infty$ et $\varphi * \rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Calculons la transformée de Fourier de $\varphi * \rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,
   $$\begin{aligned} \widehat{\varphi * \rho}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \rho(x-y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\cdot\xi} \varphi(y) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x-y)\cdot\xi} \rho(x-y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\cdot\xi} \varphi(y) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iz\cdot\xi} \rho(z) \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y = \widehat{\rho}(\xi) \widehat{\varphi}(\xi). \end{aligned}$$
   Il reste à justifier qu'on peut bien intervertir les intégrales par Fubini. C'est le cas car
   $$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |e^{-ix\cdot\xi} \varphi(y) \rho(x-y)| \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(y)||\rho(x-y)| \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \leqslant \|\varphi\|_{L^1} \|\rho\|_{L^1} < +\infty.$$

3. Soient $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $S * \rho \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a $\langle S * \rho\,, \varphi\rangle = \langle S\,, \check{\rho} * \varphi\rangle$.

   Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$, la convolée $S * \rho : x \mapsto \langle \tau_x \check{S}\,, \varphi\rangle$ est bien définie. D'après le cours, c'est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\langle S * \rho\,, \varphi\rangle = \langle S\,, \check{\rho} * \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. En d'autres termes, l'élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ associé à la fonction $S * \rho$ est $\varphi \mapsto \langle S\,, \check{\rho} * \varphi\rangle$.

   Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, par la question 2 on a $\check{\rho} * \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Comme $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, l'expression $\langle S\,, \check{\rho} * \varphi\rangle$ a bien du sens. Donc $\varphi \mapsto \langle S\,, \check{\rho} * \varphi\rangle$ définit une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui prolonge $S * \rho \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

   Montrons que ce prolongement est continu. Comme $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, il existe $A \geqslant 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $|\langle S\,, \psi\rangle| \leqslant AN_p(\psi)$ pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a

   $$|\langle S\,, \check{\rho} * \varphi\rangle| \leqslant AN_p(\check{\rho} * \varphi) \leqslant ACN_p(\varphi),$$

   d'après la question 1. Le prolongement définit donc bien un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Dorénavant on notera encore ce prolongement $S * \rho$, de sorte que $S * \rho \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\langle S * \rho\,, \varphi\rangle = \langle S\,, \check{\rho} * \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

4. Montrer que $\widehat{S * \rho} = \widehat{S}\widehat{\rho}$ et en déduire qu'en fait $S * \rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

   Comme $S * \rho \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ sa transformée de Fourier est bien définie. Par ailleurs $\widehat{S} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$ d'après l'exercice 1 et donc $\widehat{S}\widehat{\rho} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par la question 1 de l'exercice 2. Les deux termes de l'égalité à démontrer on donc bien du sens dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

   Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a :

   $$\left\langle \widehat{S * \rho}\,, \varphi\right\rangle = \langle S * \rho\,, \widehat{\varphi}\rangle = \langle S\,, \check{\rho} * \widehat{\varphi}\rangle = \left\langle \widehat{S}\,, \mathcal{F}^{-1}(\check{\rho} * \widehat{\varphi})\right\rangle.$$

   La formule d'inversion de Fourier dit que $\mathcal{F}^{-1} : \psi \mapsto \frac{1}{(2\pi)^d}\widehat{\psi}(-\cdot)$. En utilisant le résultat de la question 2, on a :

   $$\mathcal{F}^{-1}(\check{\rho} * \widehat{\varphi}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\widehat{(\check{\rho} * \widehat{\varphi})}(-\cdot) = \frac{1}{(2\pi)^d}\widehat{\widehat{\varphi}}(-\cdot)\widehat{\check{\rho}}(-\cdot) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi})\widehat{\check{\rho}}(-\cdot) = \varphi\widehat{\rho}.$$

   Finalement $\left\langle \widehat{S * \rho}\,, \varphi\right\rangle = \left\langle \widehat{S}\,, \varphi\widehat{\rho}\right\rangle = \left\langle \widehat{\rho}\widehat{S}\,, \varphi\right\rangle$, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, d'où $\widehat{S * \rho} = \widehat{S}\widehat{\rho}$. Puisque $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ induit une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, $S * \rho = \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{S}\widehat{\rho}\right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

5. Soient $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $p \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $C \geqslant 0$ et $q \geqslant p$ tels que $N_p(S * \varphi) \leqslant CN_q(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

   Indication. Utiliser les questions précédentes et la continuité de $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

   On sait par le cours que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $C_{k,d} \geqslant 0$ tel que $N_k(\widehat{\psi}) \leqslant C_{k,d}N_{k+d+1}(\psi)$ pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On a aussi $N_k(\psi) \leqslant C_{k,d}N_{k+d+1}(\check{\widehat{\psi}}) = C_{k,d}N_{k+d+1}(\widehat{\psi})$ car $\psi = \mathcal{F}\left((2\pi)^{-d}\check{\widehat{\psi}}\right)$. On va utiliser ces inégalité qui traduisent la continuité de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$.

   Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, comme $S * \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a $N_p(S * \varphi) \leqslant C_{p,d}N_{p+d+1}\left(\widehat{S * \varphi}\right) = C_{p,d}N_{p+d+1}\left(\widehat{S}\widehat{\varphi}\right)$ par la question 4. Comme $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, sa transformée de Fourier est dans $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$ par l'exercice 1. En appliquant la question 1 de l'exercice 2 avec $\rho = \widehat{S}$, il existe A et $r \in \mathbb{N}$ tels que $N_{p+d+1}\left(\widehat{S}\widehat{\varphi}\right) \leqslant AN_r(\widehat{\varphi}) \leqslant AC_{r,d}N_{r+d+1}(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

   Finalement, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a $N_p(S * \varphi) \leqslant C_{p,d}AC_{r,d}N_{r+d+1}(\varphi) = CN_q(\varphi)$.

6. Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, montrer que $T * S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et que $\langle T * S\,, \varphi\rangle = \langle T\,, \check{S} * \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

   Comme $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, la convolée $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est définie par $T * S : \varphi \mapsto \langle T\,, \check{S} * \varphi\rangle$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{C}$.

   Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\check{S} * \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par la question 4 et donc $\langle T\,, \check{S} * \varphi\rangle$ est bien définie. Donc $\varphi \mapsto \langle T\,, \check{S} * \varphi\rangle$ définit une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui étend $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

   Comme $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, il existe $A \geqslant 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $|\langle T\,, \psi\rangle| \leqslant A N_p(\psi)$ pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. En appliquant la question 5 à $\check{S} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ on alors pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

   $$|\langle T\,, \check{S} * \varphi\rangle| \leqslant A N_p\big(\check{S} * \varphi\big) \leqslant A C N_q(\varphi),$$

   ce qui prouve que $\varphi \mapsto \langle T\,, \check{S} * \varphi\rangle$ définit une distribution tempérée qui prolonge $T * S$. Dans la suite on notera encore $T * S$ pour le prolongement. On a donc $T * S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\langle T * S\,, \varphi\rangle = \langle T\,, \check{S} * \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

7. Montrer que $\widehat{T * S} = \widehat{S}\widehat{T}$.

   Comme $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ on a $\widehat{S} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$ et donc $\widehat{S}\widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est bien défini. Ensuite, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a

   $$\langle \widehat{T * S}\,, \varphi\rangle = \langle T * S\,, \widehat{\varphi}\rangle = \langle T\,, \check{S} * \widehat{\varphi}\rangle = \Big\langle \widehat{T}\,, \mathcal{F}^{-1}\big(\check{S} * \widehat{\varphi}\big)\Big\rangle$$

   En utilisant la question 4 et la formule d'inversion de Fourier,

   $$\mathcal{F}^{-1}\big(\check{S} * \widehat{\varphi}\big) = \frac{1}{(2\pi)^d}\widehat{\check{S} * \widehat{\varphi}}(-\cdot) = \frac{1}{(2\pi)^d}\widehat{\widehat{\varphi}}(-\cdot)\widehat{S} = \varphi\widehat{S}.$$

   Donc $\langle T * S\,, \varphi\rangle = \langle \widehat{T}\,, \widehat{S}\varphi\rangle = \langle \widehat{S}\widehat{T}\,, \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, ce qui établit la formule souhaitée.