Université Paris-Saclay
2023 – 2024

Master Mathématiques et Applications
Distributions et Analyse de Fourier

Chargés de TD : Blanche Buet et Thomas Letendre.

Feuille 6 – Espace de Schwartz et distributions tempérées

Définition. Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ on note

$$N_p(\varphi) = \sup\left\{ |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^d, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leqslant p, |\beta| \leqslant p \right\} \in [0, +\infty].$$

On rappelle que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $N_p(\varphi) < +\infty$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 1 (Densité de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{S}$)**.** Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi(x) = 1$ si $\|x\| \leqslant 1$, $\chi(x) = 0$ si $\|x\| \geqslant 2$ et $\chi(x) \in [0,1]$ si $1 \leqslant \|x\| \leqslant 2$. Pour tout $R > 0$, on note $\chi_R : x \mapsto \chi\big(\frac{x}{R}\big)$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\chi_R \varphi \xrightarrow[R\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} \varphi$.

Il s'agit de montrer que $N_p((1-\chi_R)\varphi) \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, on a $\left\| X^\alpha \partial^\beta ((1-\chi_R)\varphi) \right\|_\infty \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ et $R \geqslant 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} \left| x^\alpha \partial^\beta ((1-\chi_R)\varphi)(x) \right| &= \left| \left(1 - \chi\Big(\frac{x}{R}\Big)\right) x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) - \sum_{\gamma < \beta} \binom{\beta}{\gamma} x^\alpha \partial^\gamma \varphi(x) \left(\frac{1}{R}\right)^{|\beta| - |\gamma|} \partial^{\beta - \gamma} \chi\Big(\frac{x}{R}\Big) \right| \\ &\leqslant \left(1 - \chi\Big(\frac{x}{R}\Big)\right) \left| x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \right| + \frac{1}{R} \sum_{\gamma < \beta} \binom{\beta}{\gamma} \| X^\alpha \partial^\gamma \varphi \|_\infty \left\| \partial^{\beta-\gamma} \chi \right\|_\infty. \end{aligned}$$

Si $\|x\| \leqslant R$ alors $\chi\big(\frac{x}{R}\big) = 1$ et le premier terme est nul. Si $\|x\| \geqslant R$ on a $0 \leqslant 1 - \chi\big(\frac{x}{R}\big) \leqslant 1$ et

$$\left| x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \right| = \frac{1}{\|x\|^2} \left| \left(\sum_{i=1}^d x_i^2 \right) x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \right| \leqslant \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^d \left\| X_i^2 X^\alpha \partial^\beta \varphi \right\|_\infty.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\left| x^\alpha \partial^\beta ((1-\chi_R)\varphi)(x) \right| \leqslant \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^d \left\| X_i^2 X^\alpha \partial^\beta \varphi \right\|_\infty + \frac{1}{R} \sum_{\gamma < \beta} \binom{\beta}{\gamma} \| X^\alpha \partial^\gamma \varphi \|_\infty \left\| \partial^{\beta-\gamma} \chi \right\|_\infty.$$

Donc $\left\| X^\alpha \partial^\beta ((1-\chi_R)\varphi) \right\|_\infty = O\big(\frac{1}{R}\big)$, ce qui prouve le résultat.

Exercice 2 (Exemples de fonctions dans $\mathcal{S}'$)**.** Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on note $\langle x \rangle = \big(1 + \|x\|^2\big)^{\frac{1}{2}}$. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable telle que $\langle X \rangle^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

1. Montrer que $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $2k \geqslant -\alpha$. Pour tout $R > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\|x\| \leqslant R} |f(x)| \,\mathrm{d}x = \int_{\|x\| \leqslant R} \langle x \rangle^{-\alpha} \langle x \rangle^\alpha |f(x)| \,\mathrm{d}x &\leqslant \int_{\|x\| \leqslant R} \big(1 + \|x\|^2\big)^k \langle x \rangle^\alpha |f(x)| \,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \big(1 + R^2\big)^k \| \langle X \rangle^\alpha f \|_1 < +\infty. \end{aligned}$$

   Donc $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

2. Soit $S_f : \varphi \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{C}$, montrer que $S_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $(S_f)_{|\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} = T_f$.

   Indication. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists C \geqslant 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\left\| \left(1+\|X\|^2\right)^k \varphi \right\|_\infty \leqslant C N_{2k}(\varphi)$.

   Commençons par prouver l'indication. Soit $k \in \mathbb{N}$, la fonction $\left(1+\|X\|^2\right)^k$ est un polynôme de degré $2k$ en $X = (X_1, \ldots, X_d)$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}\left(1+\|x\|^2\right)^k |\varphi(x)| &= \left(1+\sum_{i=1}^d x_i^2\right)^k |\varphi(x)| = \sum_{\alpha_0+\cdots+\alpha_d=k} \frac{k!}{\alpha!} \prod_{i=1}^d x_i^{2\alpha_i} |\varphi(x)| \\ &\leqslant \sum_{\alpha_0+\cdots+\alpha_d=k} \frac{k!}{\alpha!} \prod_{i=1}^d \|X_i^{2\alpha_i}\varphi\|_\infty \leqslant N_{2k}(\varphi) \sum_{\alpha_0+\cdots+\alpha_d=k} \frac{k!}{\alpha!} = (1+d)^k N_{2k}(\varphi).\end{aligned}$$

   Donc pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a $\left\| \left(1+\|X\|^2\right)^k \varphi \right\|_\infty \leqslant C N_{2k}(\varphi)$ avec $C = (1+d)^k$.

   Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$ tel que $2k \geqslant -\alpha$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}|f(x)\varphi(x)| &= \langle x\rangle^\alpha |f(x)| \langle x\rangle^{-\alpha} |\varphi(x)| \leqslant \langle x\rangle^\alpha |f(x)| \left(1+\|x\|^2\right)^k |\varphi(x)| \\ &\leqslant \left\| \left(1+\|X\|^2\right)^k \varphi \right\|_\infty \langle x\rangle^\alpha |f(x)| \leqslant C N_{2k}(\varphi) \langle x\rangle^\alpha |f(x)|.\end{aligned} \tag{i}$$

   Comme on a supposé $\langle X\rangle^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, cette majoration montre que $f\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Donc $S_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ est bien définie. Ensuite, d'après (i), pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$|\langle S_f\,, \varphi\rangle| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)\varphi(x)| \leqslant C N_{2k}(\varphi) \int_{\mathbb{R}^d} \langle x\rangle^\alpha |f(x)|\,\mathrm{d}x = C \|\langle X\rangle^\alpha f\|_1 N_{2k}(\varphi).$$

   Comme S_f est linéaire, cela prouve qu'elle est continue sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et donc $S_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

   Enfin, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a $\langle S_f\,, \varphi\rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle T_f\,, \varphi\rangle$.

On introduit les fonctions $g : x \mapsto e^{-x^2}$ et $h : x \mapsto x\cos(e^{x^2})e^{x^2}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3. Existe-t-il $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\langle X\rangle^\alpha h \in L^1(\mathbb{R})$?

   Indication. Considérer les propriétés d'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\widetilde{h} : x \mapsto \left|\cos\left(e^{x^2}\right)\right|$.

   Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\langle x\rangle^\alpha |h(x)| = \underbrace{\overbrace{|x|\langle x\rangle^\alpha}^{\sim |x|^{1+\alpha}} e^{x^2}}_{\xrightarrow[|x|\to+\infty]{} +\infty} \left|\cos(e^{x^2})\right|.$$

   Il existe donc $R_\alpha > 0$ tel que si $|x| \geqslant R_\alpha$ alors $\langle x\rangle^\alpha |h(x)| \geqslant \left|\cos(e^{x^2})\right| = \widetilde{h}(x)$. On va montrer que $\widetilde{h}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}\backslash[-R_\alpha, R_\alpha]$, ce qui équivaut à montrer que $\widetilde{h}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ car cette fonction est continue. Cela montrera que $\langle X\rangle^\alpha h$ n'est pas intégrable.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\frac{\pi}{4} < 1 \leqslant e^{x^2}$ on a les équivalences

$$\begin{aligned}\left|\cos(e^{x^2})\right| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \exists n \in \mathbb{N}^*,\ n\pi - \frac{\pi}{4} \leqslant e^{x^2} \leqslant n\pi + \frac{\pi}{4} \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(n\pi - \frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant |x| \leqslant \ln\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Remarquons que $1 \leqslant \frac{3\pi}{4} \leqslant n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, donc les bornes ci-dessus ont bien du sens. En notant $u_n = \ln\bigl(n\pi + \frac{\pi}{4}\bigr)^{\frac{1}{2}} - \ln\bigl(n\pi - \frac{\pi}{4}\bigr)^{\frac{1}{2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \widetilde{h}(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \sqrt{2}\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et il s'agit de montrer que u_n est le terme général d'une série divergente.

$$\begin{aligned}\ln\Bigl(n\pi + \frac{\pi}{4}\Bigr)^{\frac{1}{2}} &= \Bigl(\ln(n\pi) + \ln\Bigl(1 + \frac{1}{4n}\Bigr)\Bigr)^{\frac{1}{2}} = \Bigl(\ln(n\pi) + \frac{1}{4n} + O\Bigl(\frac{1}{n^2}\Bigr)\Bigr)^{\frac{1}{2}}\\ &= \sqrt{\ln(n\pi)}\Bigl(1 + \frac{1}{4n\ln(n\pi)} + O\Bigl(\frac{1}{n^2\ln(n\pi)}\Bigr)\Bigr)^{\frac{1}{2}}\\ &= \sqrt{\ln(n\pi)}\Bigl(1 + \frac{1}{8n\ln(n\pi)} + O\Bigl(\frac{1}{n^2\ln(n\pi)}\Bigr)\Bigr)\end{aligned}$$

De même $\ln\bigl(n\pi - \frac{\pi}{4}\bigr)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\ln(n\pi)}\Bigl(1 - \frac{1}{8n\ln(n\pi)} + O\Bigl(\frac{1}{n^2\ln(n\pi)}\Bigr)\Bigr)$ donc $u_n \sim \frac{1}{4n\sqrt{\ln(n\pi)}}$. Comme $\ln(n\pi) = \ln(n) + \ln(\pi) \sim \ln(n)$, on a finalement $u_n \sim \frac{1}{4n\sqrt{\ln(n)}}$. Donc $\sum u_n$ diverge, donc $\widetilde{h}$ n'est pas intégrable, et donc pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\langle X\rangle^{\alpha} h \notin L^1(\mathbb{R})$.

4. Montrer qu'il existe $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tel que $S_{|\mathcal{D}(\mathbb{R})} = T_h$.
   D'après la question 3, la fonction h ne satisfait pas notre critère et il ne suffit donc pas d'utiliser la question 2. Cependant, on peut remarquer que $h = v'$, où on a noté $v : x \mapsto \frac{1}{2}\sin(e^{x^2})$.
   Comme $v \in L^\infty(\mathbb{R})$, on a $\langle X\rangle^{-2} v \in L^1(\mathbb{R})$. Donc $S_v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ par la question 2. On sait que $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est stable par dérivation et, par définition, $\langle S_v' \,, \varphi\rangle = -\langle S_v \,, \varphi'\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Si maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors
   $$\langle S_v' \,, \varphi\rangle = -\langle S_v \,, \varphi'\rangle = -\langle T_v \,, \varphi'\rangle = \langle T_v' \,, \varphi\rangle.$$
   Donc $(S_v')_{|\mathcal{D}(\mathbb{R})} = T_v' = T_{v'} = T_h$. Ainsi $S = S_v' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ répond à la question.
5. Peut-on dire que $S = S_h$?
   D'après la question 3, on ne peut pas appliquer le résultat de la question 2. Pour que la formule soit vraie, il faudrait déjà pouvoir donner un sens à S_h. Or S_h ne définit pas une distribution tempérée, ni même une fonction sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Par exemple, on sait que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $hg : x \mapsto x\cos(e^{x^2})$. Comme dans la question 3, pour $|x| \geqslant 1$ on a $|h(x)g(x)| \geqslant \widetilde{h}(x)$ et donc $hg \notin L^1(\mathbb{R})$. Donc $\langle S_h \,, g\rangle$ n'est pas définie. Donc $S \neq S_h$, puisque S_h n'a pas de sens.

   Remarque. Dans cet exemple, la fonction $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ définit une distribution $T_h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui s'étend en une (unique) distribution tempérée $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Cependant, il existe $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\langle S \,, \varphi\rangle \neq \int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$, simplement parce que l'intégrale n'est pas définie.
   Par abus de langage, on dira souvent qu'une fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ telle que T_f s'étende en une distribution tempérée définit une distribution tempérée, et on notera $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Cela ne signifie pas que l'extension est S_f, ni même que S_f est bien définie. Dans ce cadre, attention à ne pas écrire $\langle f \,, \varphi\rangle = \int f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ sans réfléchir pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

6. Calculer $\langle S \,, g\rangle$.
   On a $\langle S \,, g\rangle = \langle S_v' \,, g\rangle = -\langle S_v \,, g'\rangle = \int_{\mathbb{R}} v(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$, et on a vu que cette intégrale est bien définie, car $g' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Les fonctions g et v sont paires, donc g' est impaire et vg' est impaire. L'intégrale de cette fonction sur $\mathbb{R}$ est donc nulle. Finalement, $\langle S \,, g\rangle = 0$.

Exercice 3 (Mesures tempérées)**.** Dans cet exercice on considère une mesure de Radon (i.e. finie sur les compacts) positive μ sur $\mathbb{R}^d$. On note de nouveau $\langle x\rangle = \bigl(1 + \|x\|^2\bigr)^{\frac{1}{2}}$.

1. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\langle X\rangle^{\alpha} \in L^1(\mathrm{d}\mu)$. Montrer que $\varphi \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ définit une distribution tempérée, que l'on notera encore μ.

   Comme μ est une mesure de Radon positive, on sait déjà qu'elle définit une distribution telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\langle \mu\,, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $2k \geqslant -\alpha$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, en utilisant l'indication de la question 2 de l'exercice 2, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|\varphi(x)| \leqslant \langle x\rangle^{-\alpha}|\varphi(x)|\langle x\rangle^{\alpha} \leqslant \big(1+\|x\|^2\big)^k|\varphi(x)|\langle x\rangle^{\alpha} \leqslant \Big\|\big(1+\|X\|^2\big)^k\varphi\Big\|_{\infty}\langle x\rangle^{\alpha} \leqslant CN_{2k}(\varphi)\langle x\rangle^{\alpha}. \tag{ii}$$

   Donc $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathrm{d}\mu)$, et $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ est une forme linéaire bien définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a :

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) \leqslant C\bigg(\int_{\mathbb{R}^d} \langle x\rangle^{\alpha}\,\mathrm{d}\mu(x)\bigg)N_{2k}(\varphi).$$

   Cette forme linéaire est donc continue. Donc μ définit bien un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

2. Inversement, on suppose désormais que $\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ s'étend en une distribution tempérée. Montrer qu'il existe $C \geqslant 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $\int_{\|x\|\leqslant R} \mathrm{d}\mu(x) \leqslant CR^p$ pour tout $R \geqslant 1$.

   Comme μ est tempérée, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A \geqslant 0$ tels que $|\langle \mu\,, \varphi\rangle| \leqslant AN_p(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On considère des fonctions plateaux χ_R comme celles de l'exercice 1. Alors, pour tout $R \geqslant 1$,

$$\int_{\|x\|\leqslant R} \mathrm{d}\mu(x) \leqslant \int_{\|x\|\leqslant R} \chi_R(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \leqslant \langle \mu\,, \chi_R\rangle = |\langle \mu\,, \chi_R\rangle| \leqslant AN_p(\chi_R).$$

   Soient α et $\beta \in \mathbb{N}^d$ tels que $|\alpha| \leqslant p$ et $|\beta| \leqslant p$. Pour tout $R \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|x\| \leqslant 2R$ on a

$$\Big|x^{\alpha}\partial^{\beta}(\chi_R)(x)\Big| = |x^{\alpha}|\frac{1}{R^{|\beta|}}\Big|\partial^{\beta}\chi\Big(\frac{x}{R}\Big)\Big| \leqslant \|x\|^{|\alpha|}\Big\|\partial^{\beta}\chi\Big\|_{\infty} \leqslant (2R)^p\sum_{|\beta|\leqslant p}\|\partial^{\beta}\chi\|_{\infty}.$$

   Comme χ_R et toutes ses dérivées sont nulles hors la boule de centre 0 et de rayon $2R$, on a donc $\|X^{\alpha}\partial^{\beta}\chi_R\|_{\infty} \leqslant (2R)^p\sum_{|\beta|\leqslant p}\|\partial^{\beta}\chi\|_{\infty}$ pour tout α et β de longueur inférieur à p. Donc $AN_p(\chi_R) \leqslant CR^p$ où $C = A2^p\sum_{|\beta|\leqslant p}\|\partial^{\beta}\chi\|_{\infty}$. D'où le résultat.

3. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\langle X\rangle^{\alpha} \in L^1(\mathrm{d}\mu)$.

   Si $\mu(\mathbb{R}^d) < +\infty$, il suffit de prendre $\alpha = 0$. Sinon, pour qu'un tel α existe, il doit nécessairement être négatif. Considérons donc $\alpha < 0$, de sorte que $x \mapsto \langle x\rangle^{\alpha}$ est décroissante radialement. D'après la question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\int_{n\leqslant\|x\|\leqslant n+1} \langle x\rangle^{\alpha}\,\mathrm{d}\mu(x) &\leqslant \big(1+n^2\big)^{\frac{\alpha}{2}}\int_{n\leqslant\|x\|\leqslant n+1} \mathrm{d}\mu(x) \leqslant \big(1+n^2\big)^{\frac{\alpha}{2}}\int_{\|x\|\leqslant n+1} \mathrm{d}\mu(x)\\ &\leqslant C(1+n^2)^{\frac{\alpha}{2}}(1+n)^p = O\big(n^{p+\alpha}\big).\end{aligned}$$

   Si $\alpha < -p-1$, alors ces intégrales sont le terme général d'une série convergente, et donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle x\rangle^{\alpha}\,\mathrm{d}\mu(x) \leqslant \sum_{n\geqslant 0}\int_{n\leqslant\|x\|\leqslant n+1} \langle x\rangle^{\alpha}\,\mathrm{d}\mu(x) < +\infty.$$

Exercice 4 (Propriétés fonctionnelles de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$)**.** Soient $a \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda > 0$, on rappelle que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ on a défini $\tau_a\varphi : x \mapsto \varphi(x-a)$ et $\varphi_\lambda : x \mapsto \varphi\big(\frac{x}{\lambda}\big)$, et pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on a défini $\tau_a T : \varphi \mapsto \langle T\,, \tau_{-a}\varphi\rangle$ et $\operatorname{dil}_\lambda T : \varphi \mapsto \lambda^d\langle T\,, \varphi_{\frac{1}{\lambda}}\rangle$. On note aussi $e_a : \xi \mapsto e^{ia\cdot\xi}$.

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, exprimer les distributions tempérées suivantes en fonction de $\widehat{T}$.

1. $\mathcal{F}(\partial^\alpha T)$, où $\alpha \in \mathbb{N}^d$.
   Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a $\partial^\alpha\widehat{\varphi} = \mathcal{F}((-iX)^\alpha\varphi)$ donc
   $$\langle \mathcal{F}(\partial^\alpha T)\,, \varphi\rangle = \langle \partial^\alpha T\,, \widehat{\varphi}\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T\,, \partial^\alpha\widehat{\varphi}\rangle = \langle T\,, \mathcal{F}((iX)^\alpha\varphi)\rangle = \langle (iX)^\alpha\widehat{T}\,, \varphi\rangle.$$
   Donc $\mathcal{F}(\partial^\alpha T) = (iX)^\alpha\widehat{T}$, comme dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
2. $\mathcal{F}(X^\alpha T)$, où $\alpha \in \mathbb{N}^d$.
   Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a $X^\alpha\widehat{\varphi} = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}(\partial^\alpha\varphi)$ donc
   $$\langle \mathcal{F}(X^\alpha T)\,, \varphi\rangle = \langle T\,, X^\alpha\widehat{\varphi}\rangle = (-i)^{|\alpha|}\langle T\,, \mathcal{F}(\partial^\alpha\varphi)\rangle = \Big\langle i^\alpha\partial^\alpha\widehat{T}\,, \varphi\Big\rangle.$$
   Donc $\mathcal{F}(X^\alpha T) = (i\partial)^\alpha\widehat{T}$, comme dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
3. $\mathcal{F}(\tau_a T)$.
   Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a $\tau_{-a}\widehat{\varphi} = \mathcal{F}(e_{-a}\varphi)$ donc
   $$\langle \mathcal{F}(\tau_a T)\,, \varphi\rangle = \langle T\,, \tau_{-a}\widehat{\varphi}\rangle = \langle T\,, \mathcal{F}(e_{-a}\varphi)\rangle = \Big\langle e_{-a}\widehat{T}\,, \varphi\Big\rangle.$$
   Donc $\mathcal{F}(\tau_a T) = e_{-a}\widehat{T}$, comme dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
4. $\mathcal{F}(e_a T)$.
   Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a $e_a\widehat{\varphi} = \mathcal{F}(\tau_{-a}\varphi)$ donc
   $$\langle \mathcal{F}(e_a T)\,, \varphi\rangle = \langle T\,, e_a\widehat{\varphi}\rangle = \langle T\,, \mathcal{F}(\tau_{-a}\varphi)\rangle = \Big\langle \tau_a\widehat{T}\,, \varphi\Big\rangle.$$
   Donc $\mathcal{F}(e_a T) = \tau_a\widehat{T}$, comme dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
5. $\mathcal{F}(\operatorname{dil}_\lambda T)$.
   Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,
   $$\widehat{\varphi_\lambda}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x = \lambda^d\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(y)e^{-iy\cdot\lambda\xi}\,\mathrm{d}y = \lambda^d\widehat{\varphi}(\lambda\xi).$$
   Donc $\widehat{\varphi_\lambda} = \lambda^d(\widehat{\varphi})_{\frac{1}{\lambda}}$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On a donc
   $$\langle \mathcal{F}(\operatorname{dil}_\lambda T)\,, \varphi\rangle = \langle \operatorname{dil}_\lambda T\,, \widehat{\varphi}\rangle = \lambda^d\Big\langle T\,, (\widehat{\varphi})_{\frac{1}{\lambda}}\Big\rangle = \langle T\,, \widehat{\varphi_\lambda}\rangle = \Big\langle \widehat{T}\,, \varphi_\lambda\Big\rangle = \lambda^d\langle \operatorname{dil}_{\frac{1}{\lambda}}\widehat{T}\,, \varphi\rangle.$$
   Donc $\mathcal{F}(\operatorname{dil}_\lambda T) = \lambda^d\operatorname{dil}_{\frac{1}{\lambda}}\widehat{T}$, comme dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 5 (Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$, calculs élémentaires)**.** Justifier que les distributions suivantes sont tempérées et calculer leurs transformées de Fourier.

1. $\partial^\alpha\delta_a$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et $a \in \mathbb{R}^d$.
   Soient $a \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. La distribution δ_a est supportée en $\{a\}$, donc $\partial^\alpha\delta_a$ aussi. Donc $\partial^\alpha\delta_a$ est tempérée car à support compact.
   On a $\partial^\alpha\delta_a = \partial^\alpha(\tau_a\delta_0) = \tau_a(\partial^\alpha\delta_0)$. En effet, translations et dérivées partielles commutent pour les fonctions test, donc pour les distributions par dualité. En utilisant l'exercice 4, on a donc
   $$\mathcal{F}(\partial^\alpha\delta_a) = \mathcal{F}(\tau_a(\partial^\alpha\delta_0)) = e_{-a}\mathcal{F}(\partial^\alpha\delta_0) = e_{-a}(iX)^\alpha\widehat{\delta_0} = e_{-a}(iX)^\alpha.$$
   Ainsi $\mathcal{F}(\partial^\alpha\delta_a) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ est la fonction $\xi \mapsto (i\xi)^\alpha e^{-ia\cdot\xi}$.

2. $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   La fonction cos est bornée, donc elle définit une distribution tempérée. En utilisant l'exercice 4 dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ on a :
   $$\mathcal{F}e_1 = \mathcal{F}(e_1 \mathbf{1}) = \tau_1 \widehat{\mathbf{1}} = \tau_1(2\pi\delta_0) = 2\pi\delta_1.$$
   De même, $\mathcal{F}e_{-1} = 2\pi\delta_{-1}$. Comme $\cos = \frac{1}{2}(e_{-1} + e_1)$, on a donc $\widehat{\cos} = \pi(\delta_{-1} + \delta_1)$.

3. $f = \mathbf{1}_{[-1,1]}$, la fonction indicatrice de $[-1,1]$.

   Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, elle définit une distribution tempérée et $\widehat{f}$ coïnicide avec sa transformée de Fourier usuelle : c'est la fonction continue définie par $\widehat{f} : \xi \mapsto \langle f \,, e_{-\xi} \rangle$. On peut faire le calcul direct en utilisant cette formule. Nous allons voir une méthode alternative.

   On a $f' = \delta_{-1} - \delta_1$. En appliquant la transformée de Fourier à cette égalité, on obtient :
   $$iX\widehat{f} = \widehat{f'} = \widehat{\delta_{-1}} - \widehat{\delta_1} = \mathcal{F}(\tau_{-1}\delta_0) - \mathcal{F}(\tau_1\delta_0) = e_1 - e_{-1}.$$
   Donc, pour tout $\xi \neq 0$, on a $\widehat{f}(\xi) = 2\frac{\sin(\xi)}{\xi} = 2\,\mathrm{sinc}(\xi)$. Comme les deux membres de cette égalités sont des fonctions $\mathcal{C}^0$, on en déduit que l'égalité est aussi valable en 0. D'où $\widehat{f} = 2\,\mathrm{sinc}$.

   Rappelons que sinc est la somme de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k X^{2k}}{(2k+1)!}$ qui est de rayon de convergence infini. Cette fonction est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4. (*facultatif*) $g_{ab} = \mathbf{1}_{[a,b]}$, la fonction indicatrice de $[a,b]$, où $-\infty < a < b < +\infty$.

   Comme dans la question précédente, $g_{ab} \in L^1(\mathbb{R})$ donc elle définit une distribution tempérée dont la transformée de Fourier est sa transformée de Fourier usuelle. On se ramène à $a = -1$ et $b = 1$ par translation et dilatation : $g_{ab} = \tau_{\frac{a+b}{2}}\left(f_{\frac{b-a}{2}}\right) = \tau_{\frac{a+b}{2}}\left(\mathrm{dil}_{\frac{b-a}{2}}(f)\right)$.

   En utilisant l'exercice 4 on a donc $\widehat{g_{ab}} = e_{-\frac{a+b}{2}}\mathcal{F}\left(\mathrm{dil}_{\frac{b-a}{2}}(f)\right) = e_{-\frac{a+b}{2}}\left(\frac{b-a}{2}\right)\mathrm{dil}_{\frac{2}{b-a}}\widehat{f}$. Donc finalement, $\widehat{g_{ab}} : \xi \mapsto (b-a)\exp\left(-i\frac{a+b}{2}\xi\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{b-a}{2}\xi\right)$.

Exercice 6 (Parité et transformée de Fourier)**.** Pour tout $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ on note $\check{\varphi} : x \mapsto \varphi(-x)$. Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on note $\check{T}$ la distribution définie par $\check{T} : \varphi \mapsto \langle T \,, \check{\varphi} \rangle$. En généralisant le cas des fonctions, on dit que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est *paire* (resp. *impaire*) si $\check{T} = T$ (resp. si $\check{T} = -T$).

1. Montrer que $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est paire et que $\mathrm{vp}\left(\dfrac{1}{x}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est impaire.

   Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a $\langle \check{\delta_0} \,, \varphi \rangle = \langle \delta_0 \,, \check{\varphi} \rangle = \check{\varphi}(0) = \varphi(0)$. Donc $\check{\delta_0} = \delta_0$ et δ_0 est paire. Par ailleurs, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,
   $$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \check{\varphi} \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} - \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle$$
   et donc $\check{\mathrm{vp}}\left(\frac{1}{x}\right) = -\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\check{\widehat{\varphi}} = \widehat{\check{\varphi}}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
   $$\check{\widehat{\varphi}}(\xi) = \widehat{\varphi}(-\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)e^{ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(-x)e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \check{\varphi}(x)e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x = \widehat{\check{\varphi}}(\xi).$$
   Donc $\check{\widehat{\varphi}} = \widehat{\check{\varphi}}$.

3. Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\widehat{\check{S}} = \check{\widehat{S}}$.

   Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\left\langle \widehat{\check{S}}\,, \varphi \right\rangle = \left\langle \widehat{S}\,, \check{\varphi} \right\rangle = \left\langle S\,, \widehat{\check{\varphi}} \right\rangle = \left\langle S\,, \check{\widehat{\varphi}} \right\rangle = \langle \check{S}\,, \widehat{\varphi} \rangle = \left\langle \widehat{\check{S}}\,, \varphi \right\rangle,$$

   et donc $\check{\widehat{S}} = \widehat{\check{S}}$.

   Remarque. En particulier, la transformée de Fourier d'une fonction ou d'une distribution paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire).

Exercice 7 (Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$, calculs moins élémentaires)**.** On note $H = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}$ la fonction de Heaviside et $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction signe, définie par $S(x) = -1$ si $x < 0$, $S(0) = 0$ et $S(x) = 1$ si $x > 0$.

1. Justifier que S définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$ et montrer que $x\widehat{S} = -2i$.

   On a $S \in L^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est stable par transformée de Fourier et multiplication par une fonction polynomiale, on a $x\widehat{S} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\left\langle x\widehat{S}\,, \varphi \right\rangle = \left\langle \widehat{S}\,, x\varphi \right\rangle = \langle S\,, \widehat{x\varphi} \rangle = \left\langle S\,, i\widehat{\varphi}' \right\rangle = -i\left\langle S'\,, \widehat{\varphi} \right\rangle = -2i\langle \delta_0\,, \widehat{\varphi} \rangle = -2i\left\langle \widehat{\delta_0}\,, \varphi \right\rangle$$

   On en conclut que $x\widehat{S} = -2i\widehat{\delta_0} = -2i$.

2. En déduire que $\widehat{S} = -2i\,\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$.

   Indication. Montrer que $\widehat{S} + 2i\,\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ est un multiple de δ_0 et utiliser un argument de parité.

   On rappelle que $x\,\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big) = 1$. On vient de voir que $x\widehat{S} = -2i$, donc $x\Big(\widehat{S} + 2i\,\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)\Big) = 0$. On sait que les solutions de l'équation $xT = 0$ d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont les multiples des δ_0. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\widehat{S} = -2i\,\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big) + \lambda\delta_0$. Il reste à déterminer λ, ce que l'on va faire par des considérations de parité.

   La fonction S est impaire. Comme l'opération $\check{\cdot}$ sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ prolonge celle sur les fonctions, on a $\check{S} = -S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Par la question 3 de l'exercice 6, on a donc : $\check{\widehat{S}} = \widehat{\check{S}} = -\widehat{S}$. En utilisant les propriétés de parité de δ_0 et $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ prouvée dans la question 1 de l'exerice 6, on obtient :

$$2i\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) - \lambda\delta_0 = -\widehat{S} = \check{\widehat{S}} = \left(-2i\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + \lambda\delta_0\right)^{\vee} = -2i\mathrm{vp}\check{\left(\frac{1}{x}\right)} + \lambda\check{\delta_0} = 2i\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + \lambda\delta_0.$$

   Cela impose $2\lambda\delta_0 = 0$ et donc $\lambda = 0$. Finalement, on a donc $\widehat{S} = -2i\,\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$.

3. Calculer $\widehat{H}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

   On écrit la fonction de Heaviside sous la forme $H = \frac{1}{2}(1 + S)$. D'où $H \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et :

$$\widehat{H} = \frac{1}{2}\left(\widehat{1} + \widehat{S}\right) = \frac{1}{2}\left(2\pi\delta_0 - 2i\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \pi\delta_0 - i\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. Justifier que $\mathrm{vp}\left(\dfrac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et calculer sa transformée de Fourier.

   Comme $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ on a $\widehat{S} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. D'après la question 2, on a $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big) = \frac{i}{2}\widehat{S} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Alternativement, $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ est somme d'une distribution à support compact et d'une fonction bornée. Par inversion de Fourier, on obtient : $\widehat{\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)} = \frac{i}{2}\widehat{\widehat{S}} = \frac{i}{2}(2\pi)\check{S} = -i\pi S$.

Exercice 8 (Transformée de Fourier des distributions à support compact — *facultatif*). Soient $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $R > 0$ tel que $\operatorname{supp}(T) \subset]-R, R[$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\chi \equiv 1$ sur $[-R, R]$ et $\operatorname{supp}(\chi) \subset [-2R, 2R]$. On rappelle que $\widehat{T}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que $\widehat{T}(\xi) = \langle T, e_{-\xi} \rangle = \langle T, \chi e_{-\xi} \rangle$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\xi \in \mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $f_k : x \mapsto (-i\xi)^k \chi(x) \frac{x^k}{k!}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, montrer que $\sum_{k \geqslant 0} f_k^{(p)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
   Déjà, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $f_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{supp}(f_k) \subset \operatorname{supp}(\chi) \subset [-2R, 2R]$. Soit $p \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [-2R, 2R]$, on a
   $$\left| f_k^{(p)}(x) \right| = \left| (-i\xi)^k \sum_{q=0}^{\min(p,k)} \binom{p}{q} \chi^{(p-q)}(x) \frac{x^{k-q}}{(k-q)!} \right| \leqslant \|\chi\|_{\mathcal{C}^p} |\xi|^k \sum_{q=0}^{\min(p,k)} \binom{p}{q} \frac{(2R)^{k-q}}{(k-q)!},$$
   où $\|\chi\|_{\mathcal{C}^p} = \sum_{i=0}^{p} \|\chi^{(i)}\|_\infty$. Comme $f_k^{(p)}$ est nulle hors de $[-2R, 2R]$, on en déduit l'inégalité $\|f_k^{(p)}\|_\infty \leqslant \|\chi\|_{\mathcal{C}^p} |\xi|^k \sum_{q=0}^{\min(p,k)} \binom{p}{q} \frac{(2R)^{k-q}}{(k-q)!}$. Donc
   $$\begin{aligned} \sum_{k \geqslant 0} \|f_k^{(p)}\|_\infty &\leqslant \|\chi\|_{\mathcal{C}^p} \sum_{k \geqslant 0} \sum_{q=0}^{\min(p,k)} \binom{p}{q} |\xi|^q \frac{(2R|\xi|)^{k-q}}{(k-q)!} = \|\chi\|_{\mathcal{C}^p} \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} |\xi|^q \sum_{k \geqslant q} \frac{(2R|\xi|)^{k-q}}{(k-q)!} \\ &\leqslant \|\chi\|_{\mathcal{C}^p} e^{2R|\xi|} \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} |\xi|^q = \|\chi\|_{\mathcal{C}^p} e^{2R|\xi|} (1 + |\xi|)^p < +\infty. \end{aligned}$$
2. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} f_k \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} \chi e_{-\xi}$.
   D'après la question 1, la série de fonction $f = \sum_{k \geqslant 0} f_k$ définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)} = \sum_{k \geqslant 0} f_k^{(p)}$ avec convergence normale donc uniforme sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\left\| f^{(p)} - \sum_{k=0}^{n} f_k^{(p)} \right\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, et donc $\sum_{k=0}^{n} f_k \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} f$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k \geqslant 0} f_k(x) = \chi(x) \sum_{k \geqslant 0} \frac{(-i\xi x)^k}{k!} = \chi(x) e^{-i\xi x}$. Donc $f = \chi e_{-\xi}$.
3. Montrer que $\widehat{T}$ est la somme sur $\mathbb{R}$ d'une série entière de rayon de convergence infini.
   Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la question 2 montre que
   $$\widehat{T}(\xi) = \langle T, \chi e_{-\xi} \rangle = \lim_{n \to +\infty} \left\langle T, \sum_{k=0}^{n} f_k \right\rangle = \sum_{k \geqslant 0} \langle T, f_k \rangle = \sum_{k \geqslant 0} \frac{(-i)^k}{k!} \langle T, \chi X^k \rangle \xi^k.$$
   En particulier, la série entière dans le terme de droite converge simplement en tout $\xi \in \mathbb{R}$. Cela assure que son rayon de convergence est infini.

Remarque. On vient de montrer que si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ alors $\widehat{T}$ est une fonction entière, en particulier de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ce résultat reste valable pour $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Réciproquement, le théorème de Paley–Wiener affirme qu'une fonction entière sur $\mathbb{C}^d$ satisfaisant certaines hypothèses de croissance à l'infini est la transformée de Fourier d'une distribution $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.