Chargés de TD : Blanche Buet et Thomas Letendre.

Feuille 5 – Équations (différentielles) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, espaces de Sobolev $H^1(I)$

Exercice 1 (Équation dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)**.** Résoudre l'équation $x^2T = 1$ d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Indication. Déterminer une solution particulière puis se ramener à une équation homogène.

Si on pense à T comme à une fonction, on voudrait que T soit associée à $x \mapsto \frac{1}{x}^2$. Cette fonction n'est pas L^1_{loc}, mais on a vu dans l'exercice 6 de la feuille 2 qu'on pouvait définir sa partie finie par un procédé de renormalisation et que $x^2 \operatorname{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1$. On connait donc une solution particulière de l'équation ce qui permet de se ramener à une équation homogène. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ on a donc :

$$x^2T = 1 \iff x^2\left(T - \operatorname{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 0 \iff \exists a, b \in \mathbb{C},\ T = \operatorname{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) + a\delta_0 + b\delta_0',$$

où la seconde équivalence est donnée par un résultat du cours.

Exercice 2 (Équation différentielle dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)**.** Le but de l'exercice est de résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$2xT' - T = \delta_0. \tag{1}$$

On va d'abord considérer l'équation différentielle homogène associée :

$$2xT' - T = 0. \tag{2}$$

1. Résoudre l'équation différentielle (2) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$ (resp. $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-^*)$).
   En restriction à $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle homogène (2) se ré-écrit sous la forme équivalente $T' + \frac{1}{2x}T = 0$ qui est linéaire, à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ et résolue en la dérivée d'ordre maximale. D'après le cours, les solutions de cette équation dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$ sont exactement les solutions $\mathcal{C}^\infty$. Une primitive de la fonction $a : x \mapsto \frac{1}{2x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $A : x \mapsto \ln(\sqrt{x})$. Les solutions de (2) dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et donc dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont alors les fonctions de la forme $x \mapsto C\sqrt{x}$, avec $C \in \mathbb{C}$.
   Par le même raisonnement, les solutions de (2) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-^*)$ sont les distributions associées à des fonctions de la forme $x \mapsto C\sqrt{-x}$, avec $C \in \mathbb{C}$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner une expression plus simple de la distribution $x\delta_0^{(k+1)}$. En déduire l'ensemble des distributions solutions de (2) sur $\mathbb{R}$ dont le support est inclus dans $\{0\}$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\left\langle x\delta_0^{(k+1)}, \varphi\right\rangle = \left\langle \delta_0^{(k+1)}, x\varphi\right\rangle &= (-1)^{k+1}\left\langle \delta_0, x\varphi^{(k+1)} + (k+1)\varphi^{(k)}\right\rangle \\ &= (-1)^{k+1}(k+1)\varphi^{(k)}(0) = -(k+1)\left\langle \delta_0^{(k)}, \varphi\right\rangle.\end{aligned}$$

   Donc $x\delta_0^{(k+1)} = -(k+1)\delta_0^{(k)}$.
   Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de (2) supportée en 0. D'après le cours, il existe donc $n \in \mathbb{N}$ et des coefficients $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que $T = \sum_{k=0}^n a_k\delta_0^{(k)}$. En réinjectant dans (2) :

$$0 = 2x\left(\sum_{k=0}^n a_k\delta_0^{(k)}\right)' - \sum_{k=0}^n a_k\delta_0^{(k)} = \sum_{k=0}^n a_k\left(2x\delta_0^{(k+1)} - \delta_0^{(k)}\right) = -\sum_{k=0}^n a_k(2k+3)\delta_0^{(k)}.$$

Or, les $\left(\delta_0^{(k)}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ sont linéairement indépendants dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Pour le vérifier il suffit de remarquer que, si $\varphi_j : x \mapsto \frac{x^j}{j!}\chi(x)$ où χ est une fonction plateau constante à 1 au voisinage de 0, alors $\langle \delta_0^{(k)}, \varphi_j\rangle = 1$ si $j = k$ et $\langle \delta_0^{(k)}, \varphi_j\rangle = 0$ sinon. Donc $a_k = 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, et donc $T = 0$. Inversement 0 est bien solution de (2).

3. Déterminer l'ensemble des solutions de (2) sur $\mathbb{R}$ entier.

   L'équation différentielle (2) n'est pas résolue en T', ce qui créé une singularité en 0. Comme dans le cas d'une équation différentielle classique, on va donc d'abord raisonner séparément sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$. On cherchera ensuite à recoller les solutions obtenues en des solutions sur $\mathbb{R}$.
   Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de (2). Alors $T_{|\mathbb{R}_+^*}$ est solution de (2) sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\left\langle 2x(T_{|\mathbb{R}_+^*})' - T_{|\mathbb{R}_+^*}, \varphi\right\rangle &= \left\langle (T_{|\mathbb{R}_+^*})', 2x\varphi\right\rangle - \left\langle T_{|\mathbb{R}_+^*}, \varphi\right\rangle = \left\langle T_{|\mathbb{R}_+^*}, -(2x\varphi)' - \varphi\right\rangle \\ &= \big\langle T, -(2x\varphi)' - \varphi\big\rangle = \big\langle 2xT' - T, \varphi\big\rangle = 0.\end{aligned}$$

   Donc il existe $C_+ \in \mathbb{C}$ telle que $T_{|\mathbb{R}_+^*} = C_+(R_+)_{|\mathbb{R}_+^*}$ où on a noté $R_+ \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ la distribution associée à la fonction $x \mapsto H(x)\sqrt{x}$. De même, il existe $C_- \in \mathbb{C}$ telle que $T_{|\mathbb{R}_-^*} = C_-(R_-)_{|\mathbb{R}_-^*}$ où on a noté $R_- \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ la distribution associée à la fonction $x \mapsto H(-x)\sqrt{-x}$.
   Vérifions que R_+ et R_- sont solutions de (2) sur $\mathbb{R}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\big\langle R_+', \varphi\big\rangle = -\big\langle R_+, \varphi'\big\rangle &= -\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{+\infty}\sqrt{x}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\big[\sqrt{x}\varphi(x)\big]_\varepsilon^{+\infty} + \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

   car $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi(x)$ est intégrable en 0. Donc

$$\big\langle 2xR_+' - R_+, \varphi\big\rangle = \big\langle R_+', 2x\varphi\big\rangle - \langle R_+, \varphi\rangle = \int_0^{+\infty}\left(\frac{2x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

   Donc R_+, et de même R_-, sont bien solutions de (2) sur $\mathbb{R}$ entier.
   Par linéarité de l'équation homogène, la distribution $T - C_+R_+ - C_-R_-$ est également solution de (2). On va vérifier que cette dernière est supportée en 0. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$, alors

$$\begin{aligned}\langle T - C_+R_+ - C_-R_-, \varphi\rangle &= \left\langle T_{|\mathbb{R}_+^*} - C_+(R_+)_{|\mathbb{R}_+^*}, \varphi\right\rangle - C_-\langle R_-, \varphi\rangle \\ &= -C_-\int_{-\infty}^0 \sqrt{-x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

   Donc $(T - C_+R_+ - C_-R_-)_{|\mathbb{R}_+^*} = 0$ et $\mathbb{R}_+^* \cap \operatorname{supp}(T - C_+R_+ - C_-R_-) = \emptyset$. De même, on vérifie que $\mathbb{R}_-^* \cap \operatorname{supp}(T - C_+R_+ - C_-R_-) = \emptyset$ et donc $\operatorname{supp}(T - C_+R_+ - C_-R_-) \subset \{0\}$. Par la question 2, on en déduit que $T = C_-R_- + C_+R_+$.
   Finalement, les solutions de (2) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont exactement les combinaisons linéaires de R_- et R_+. En particulier ce sont des fonctions continues, et même $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

4. Déterminer l'ensemble des solutions de (1) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   Par linéarité de l'équation, il suffit de trouver une solution particulière $T_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de (1). L'ensemble des solutions sera alors $\{T_0 + T \mid T \text{ est solution de (2)}\}$. Comme le second membre est δ_0, il est naturel de chercher une solution sous la forme $T_0 = \sum_{k=0}^n a_k \delta_0^{(k)}$ où $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. En utilisant les calculs de la question (2), on a :

$$2xT_0' - T_0 = \left(\sum_{k=0}^n a_k \delta_0^{(k)}\right) - \sum_{k=0}^n a_k \delta_0^{(k)} = \delta_0 \iff -\sum_{k=0}^n a_k (2k+3)\delta_0^{(k)} = \delta_0$$
$$\iff \begin{cases} a_0 = -\frac{1}{3}, \\ a_k = 0, \qquad \forall k \geqslant 1. \end{cases}$$

Une solution particulière de (1) est donc $T_0 = -\frac{1}{3}\delta_0$. Finalement les solutions de (1) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont exactement les distributions de la forme $-\frac{1}{3}\delta_0 + C_- R_- + C_+ R_+$ avec C_- et $C_+ \in \mathbb{C}$.

Exercice 3 (Convergence dominée L^p)**.** Soient (X, μ) un espace mesuré et $p \in [1, +\infty[$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ telle que :

- il existe $f : X \to \mathbb{C}$ telle que $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ pour μ-presque tout $x \in X$;
- il existe $g \in L^p(X, \mu)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant g$ presque partout.

Montrer que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ dans $L^p(X, \mu)$.

Quitte à modifier f, g et les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f partout sur X, et que cette suite elle est dominée par g partout sur X. En passant à la limite simple, on a $|f| \leqslant g$. En particulier f et les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $L^p(X, \mu)$. Alors, la suite $((f_n - f)^p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur X et y est dominée par $2^p g^p$ qui est intégrable. Par le théorème de convergence dominée, on a $\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n(x) - f(x)|^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} f$.

Exercice 4 (Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ — *facultatif*)**.** Soient I un intervalle ouvert, le but de l'exercice est de montrer que (l'espace des restrictions à I des fonctions de) $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $\big(H^1(I), \|\cdot\|_{H^1}\big)$.

1. On considère $I =]a, b[$, où $-\infty < a < b < +\infty$. Soit $u \in H^1(I)$, montrer qu'il existe $u_0 \in H_0^1(I)$ et $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tels que $u = u_0 + v_{|I}$. En déduire que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $H^1(I)$, au sens où pour tout $u \in H^1(I)$ il existe une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $(\psi_n)_{|I} \xrightarrow[n\to+\infty]{H^1} u$

   La classe de fonctions $u \in H^1(I)$ admet un unique représentant continu d'après le cours. Dans la suite on identifie u à ce représentant continu. On veut $u_0(a) = 0 = u_0(b)$, c'est-à-dire $v(a) = u(a)$ et $v(b) = u(b)$. Soit donc $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $v(a) = u(a)$ et $v(b) = u(b)$ (il en existe bien). On pose $u_0 = u - v_{|I}$. Comme $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, sa restriction est dans $H^1(I)$, et on a donc $u_0 \in H^1(I)$. Comme de plus $u_0(a) = 0 = u_0(b)$ on a $u_0 \in H_0^1(I)$.
   Par définition, $\mathcal{D}(I)$ est dense dans $H_0^1(I)$. Il existe donc une suite (φ_n) d'éléments de $\mathcal{D}(I)$ telle que $\|u_0 - \varphi_n\|_{H^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Rappelons qu'on peut voir $\mathcal{D}(I) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ en étendant les fonctions de $\mathcal{D}(I)$ par 0 hors de I (les fonctions de $\mathcal{D}(I)$ s'annulent *au voisinage de a* et b). Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $\psi_n = \varphi_n + v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a alors $\big\|u - (\psi_n)_{|I}\big\|_{H^1} = \|u_0 - \varphi_n\|_{H^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   Donc $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $H^1(I)$.

2. Considérons maintenant le cas $I = \mathbb{R}$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $[0, 1]$, constante à 1 sur $[-1, 1]$ et supportée dans $[-2, 2]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\chi_n : x \mapsto \chi(\frac{x}{n})$. Pour tout $u \in H^1(\mathbb{R})$, montrer que $\chi_n u \xrightarrow[n\to+\infty]{H^1} u$.

Soit $u \in H^1(\mathbb{R})$, on a en particulier $u \in L^2(\mathbb{R})$. Vérifions que $\chi_n u \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} u$. Soit $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \geqslant |x|$ on a $\chi_n(x) = 1$, donc $(\chi_n u)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers u sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\chi_n u| \leqslant |u| \in L^2(\mathbb{R})$. D'après l'exercice 3 on a donc $\|\chi_n u - u\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On s'intéresse maintenant aux dérivées. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on calcule la dérivée de $\chi_n u$ (au sens des distributions) par la règle de Leibniz, ce qui est licite car $\chi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

$$(\chi_n u)' = \chi_n' u + \chi_n u' = \chi_n u' + \frac{1}{n}\chi'\Big(\frac{\cdot}{n}\Big)u$$

Comme u et $u' \in L^2(\mathbb{R})$ et χ et χ' sont bornées, on a bien $(\chi_n u)' \in L^2(\mathbb{R})$. Alors, par l'inégalité triangulaire,

$$\|(\chi_n u)' - u'\|_2 \leqslant \|\chi_n u' - u'\|_2 + \left\|\frac{1}{n}\chi'\Big(\frac{\cdot}{n}\Big)u\right\|_2 \leqslant \|\chi_n u' - u'\|_2 + \frac{1}{n}\|\chi'\|_\infty \|u\|_2.$$

Dans le membre de droite, le premier terme tend vers 0 par le même argument que précédemment, car $u' \in L^2(\mathbb{R})$. Le second terme tend également vers 0. Donc $\|(\chi_n u)' - u'\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Finalement, on a bien $\|\chi_n u - u\|_{H^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3. Montrer que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R})$. Que dire de l'inclusion $H^1_0(\mathbb{R}) \subset H^1(\mathbb{R})$?

   Soient $u \in H^1(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. D'après la question 2, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|\chi_n u - u\|_{H^1} < \varepsilon$. Pour ce n, la fonction $\chi_n u$ est dans $H^1(\mathbb{R})$ et nulle hors de $J =]-2n, 2n[$. En particulier, $(\chi_n u)_{|J} \in H^1_0(J)$. Comme $\mathcal{D}(J)$ est dense dans $H^1_0(J)$ par définition, il existe $\varphi \in \mathcal{D}(J) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\|\chi_n u - \varphi\|_{H^1(\mathbb{R})} = \|\chi_n u - \varphi\|_{H^1(J)} < \varepsilon$. Par inégalité triangulaire, $\|u - \varphi\|_{H^1} < 2\varepsilon$. Donc $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R})$ et donc $H^1_0(\mathbb{R}) = H^1(\mathbb{R})$.

4. Pour $I \neq \mathbb{R}$, est-ce que $\mathcal{D}(I)$ est dense dans $H^1(I)$?

   Si $I \neq \mathbb{R}$, il a au moins une borne finie, disons par exemple que $a = \inf(I) > -\infty$. Pour tout $u \in H^1(I)$, en identifiant u à son unique représentant continue on a $|u(a)| \leqslant \|u\|_\infty \leqslant C\|u\|_{H^1}$ par l'inégalité de Sobolev. L'application d'évaluation $\Phi_a : u \mapsto u(a)$ est donc continue. Si $\mathcal{D}(I)$ était dense dans $H^1(I)$ on aurait donc $u(a) = 0$ pour tout $u \in H^1(I)$. Or, il existe $u \in H^1(I)$ tel que $u(a) \neq 0$. Par exemple $u = \chi_{|I}$, où $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est telle que $\chi(a) = 1$.

5. Il reste à traiter le cas d'intervalles du type $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$. Soit $I =]0, +\infty[$, en combinant les arguments utilisés dans les questions 1 et 2 montrer que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $H^1(I)$.

   Soit $u \in H^1(I)$, identifié à son représentant continu sur $[0, +\infty[$. Il existe $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $v(0) = u(0)$. On pose $u_0 = u - v_{|I} \in H^1(I)$. En reprenant la même fonction χ qu'à la question 2, les mêmes calculs montrent que $\chi_n u_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} u_0$ dans $H^1(I)$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

   $$\big\|u - (v_{|I} - \varphi_{|I})\big\|_{H^1} = \big\|u_0 - \varphi_{|I}\big\|_{H^1} \leqslant \|u_0 - \chi_n u_0\|_{H^1} + \|\chi_n u_0 - \varphi_{|I}\|_{H^1}.$$

   Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|u_0 - \chi_n u_0\|_{H^1} < \varepsilon$. Alors $\chi_n u_0 \in H^1_0(]0, 2n[)$, car cette fonction s'annule en 0 et $2n$. Par définition de $H^1_0(]0, 2n[)$, il existe dans $\varphi \in \mathcal{D}(]0, 2n[) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\|\chi_n u_0 - \varphi\|_{H^1(I)} = \|\chi_n u_0 - \varphi\|_{H^1(]0,2n[)} < \varepsilon$. En posant $\psi = v + \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $\|u - \psi_{|I}\| < 2\varepsilon$. Ainsi $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est bien dense dans $H^1(I)$.

Exercice 5 (Dérivation d'un produit et intégration par parties dans H^1)**.** Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soient $u, v \in H^1(I)$.

1. Montrer que $uv \in H^1(I)$ et que $(uv)' = u'v + uv'$.

   D'après le cours, les fonctions u et v sont L^∞. Comme v, u' et v' sont des fonctions L^2, on a donc $uv \in L^2(I)$ et $u'v + uv' \in L^2(I)$. Il suffit donc de montrer que $(uv)' = u'v + uv'$ au sens des distributions.

   Si $u \in \mathcal{C}^\infty(I)$ alors $(uv)' = u'v + uv'$ en appliquant la règle de Leibniz pour le produit d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et d'une distribution. Dans le cas général, on va procéder par approximation en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $H^1(I)$.

   Comme $u \in H^1(I)$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{H^1} u$ (ici et dans la suite on écrit encore u_n pour la restriction à I de u_n). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(u_n v)' = u_n' v + u_n v'$. Il s'agit donc de prouver les convergences suivantes dans $\mathcal{D}'(I)$:

$$(u_n v)' \xrightarrow[n\to+\infty]{} (uv)', \qquad u_n' v \xrightarrow[n\to+\infty]{} u'v \qquad \text{et} \qquad u_n v' \xrightarrow[n\to+\infty]{} uv',$$

   ce qui impliquera la formule souhaitée.

   On a que $\|u_n v - uv\|_1 \leqslant \|u_n - u\|_2 \|v\|_2 \leqslant \|u_n - u\|_{H^1} \|v\|_2$. Donc $u_n v \xrightarrow[n\to+\infty]{L^1} uv$. La convergence dans $\big(L^1(I), \|\cdot\|_1\big)$ implique la convergence dans $\mathcal{D}'(I)$. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$,

$$|\langle u_n v - uv\,, \varphi\rangle| \leqslant \|u_n v - uv\|_1 \|\varphi\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

   Donc $u_n v \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} uv$, et par continuité de la dérivation $(u_n v)' \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} (uv)'$. Comme ci-dessus,

$$\|u_n v' - uv'\|_1 \leqslant \|u_n - u\|_2 \|v'\|_2 \leqslant \|u_n - u\|_{H_1} \|v'\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   donc $u_n v' \xrightarrow[n\to+\infty]{} uv'$ dans $L^1(I)$ et donc dans $\mathcal{D}'(I)$. Enfin,

$$\|u_n' v - u'v\|_1 \leqslant \|v\|_2 \|u_n' - u'\|_2 \leqslant \|v\|_2 \|u_n - u\|_{H^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{i}$$

   Donc $u_n' v \xrightarrow[n\to+\infty]{} u'v$ dans $L^1(I)$ et donc dans $\mathcal{D}'(I)$.

2. En déduire que pour tout $[a,b] \subset \overline{I}$ la formule d'intégration par parties suivantes est valide :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

   On vient de montrer que $uv \in H^1(I)$. On l'identifie désormais à son unique représentant continu sur $\overline{I}$. Comme $(uv)' \in L^1_{\mathrm{loc}}$ et uv en est une primitive sur I, on sait que uv est de la forme suivante sur I :

$$uv : x \longmapsto \int_{x_0}^x (uv)'(t)\,\mathrm{d}t + c, \tag{ii}$$

   où $x_0 \in I$ et $c \in \mathbb{C}$. Si la borne inférieure de I est $\alpha \in \mathbb{R}$, comme $(uv)' \in L^2(I)$ sa restriction à l'intervalle borné $]\alpha, x_0[$ est L^2 et donc L^1. Donc

$$uv(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} uv(x) = \lim_{x\to\alpha} \int_{x_0}^x (uv)'(t)\,\mathrm{d}t + c = \int_{x_0}^\alpha (uv)'(t)\,\mathrm{d}t + c$$

Donc la formule (ii) se prolonge en α. De même, elle se prolonge au niveau de la borne supérieure de I si celle-ci est finie. Finalement, la relation (ii) est donc valable sur $\overline{I}$. D'après la question 1, si $[a,b] \subset \overline{I}$ on a donc

$$[u(x)v(x)]_a^b = uv(b) - uv(a) = \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x,$$

ce qui établit (3).

Exercice 6 (Singularité ponctuelle)**.** Soient $I =]a,b[$ et $J =]b,c[$, avec $-\infty \leqslant a < b < c \leqslant +\infty$. Soient $u \in H^1(I)$ et $v \in H^1(J)$, on note $w = u\mathbf{1}_I + v\mathbf{1}_J$.

1. À quelle condition a-t-on $w \in H^1(]a,c[)$?

   Indication. Calculer la dérivée de w.

   Dans la suite on identifie u et v à leurs représentants continus sur $]a,b]$ et sur $[b,c[$ respectivement. Si $w \in H^1(]a,c[)$ alors il coïncide presque partout sur $]a,c[$ avec une fonction continue. Cela suggère qu'on peut raccorder continuement u et v en b, c'est-à-dire que $v(b) = u(b)$. On va vérifier que $w \in H^1(]a,c[) \iff v(b) = u(b)$.
   Pour commencer $w \in L^2(]a,c[)$. En effet, $\int_a^c |w(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_a^b |u(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_b^c |v(x)|^2\,\mathrm{d}x < +\infty$.
   Suivant l'indication, on calcule la dérivée de w dans $\mathcal{D}'(]a,c[)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]a,c[) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

   $$\langle w', \varphi\rangle = -\langle w, \varphi'\rangle = -\langle \mathbf{1}_I u, \varphi'\rangle - \langle \mathbf{1}_J v, \varphi'\rangle = -\int_a^b u(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c v(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Comme u et $\varphi_{|I} \in H^1(I)$, on peut utiliser la formule d'intégration par parties (3) établie dans l'exercice 5. De même pour v et $\varphi_{|J} \in H^1(J)$. Donc, en identifiant u et v à leurs représentants continus,

   $$\begin{aligned}\langle w', \varphi\rangle &= -[u(x)\varphi(x)]_a^b + \int_a^b u'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - [v(x)\varphi(x)]_b^c + \int_b^c v'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -u(b)\varphi(b) + v(b)\varphi(b) + \int_a^c (u'\mathbf{1}_I + v'\mathbf{1}_J)(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \langle (v(b)-u(b))\delta_b, \varphi\rangle + \left\langle u'\mathbf{1}_I + v'\mathbf{1}_J, \varphi\right\rangle.\end{aligned}$$

   Ainsi $w' = u'\mathbf{1}_I + v'\mathbf{1}_J + (v(b)-u(b))\delta_b$. Comme ci-dessus, on a $u'\mathbf{1}_I + v'\mathbf{1}_J \in L^2(]a,c[)$ car $u' \in L^2(I)$ et $v' \in L^2(J)$. On a donc, comme annoncé,

   $$w \in H^1(]a,c[) \iff w' \in L^2(]a,c[) \iff (v(b)-u(b))\delta_b \in L^2(]a,c[) \iff v(b) = u(b).$$

   En effet $\delta_b \notin L^2(]a,c[) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(]a,c[)$. Une fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(]a,c[)$ telle que $T_f = \delta_b$ vérifierait $T_{f_{|]a,b[\cup]b,c[}} = (\delta_b)_{|]a,b[\cup]b,c[} = 0$, donc $f = 0$ presque partout sur $]a,b[\cup]b,c[$ par injectivité de $g \mapsto T_g$, et donc $\delta_b = T_f = 0$.

2. Expliquer comment prolonger $u \in H^1(\mathbb{R}_+^*)$ en $\widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R})$ tel que $\|\widetilde{u}\|_{H^1(\mathbb{R})} \leqslant \sqrt{2}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^*)}$.

   On identifie u à son représentant continu sur $[0,+\infty[$. Par la question 1, il est naturel de chercher le prolongement sous la forme $\widetilde{u} = v\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-^*} + u\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}$ avec $u(0) = v(0)$. Un choix naturel pour assurer la continuité en 0 et la condition sur les normes est de choisir $v : x \mapsto u(-x)$ de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{C}$.

Si on montre que $v \in H^1(\mathbb{R}_-^*)$ et $\|v\|_{H^1(\mathbb{R}_-^*)} = \|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^*)}$ on aura bien $\widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R})$ par la question 1, et même $\widetilde{u}' = v'\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-^*} + u'\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}$ vus les calculs ci-dessus. On aura alors :

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{u}\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{u}(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{u}'(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}_-^*} |v(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}_+^*} |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}_-^*} |v'(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}_+^*} |u'(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \|v\|_{H^1(\mathbb{R}_-^*)}^2 + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^*)}^2 = 2\|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^*)}^2,
\end{aligned}$$

ce qui prouvera que la condition sur les normes est satisfaite.

On a

$$\int_{\mathbb{R}_-^*} |v(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_-^*} |u(-x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+^*} |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}_-^*} |-u'(-x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+^*} |u'(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Il suffit donc de montrer que v' est représentée par la fonction $x \mapsto -u'(-x)$. Cette fonction étant L^2 on aura bien $v \in H^1(\mathbb{R}_-^*)$ et $\|v\|_{H^1(\mathbb{R}_-^*)}^2 = \|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^*)}^2$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_-^*)$, on a

$$\langle v', \varphi \rangle = -\langle v, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}_-^*} u(-x)\varphi'(x) \,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}_+^*} u(x)\varphi'(-x) \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+^*} u(x)\check{\varphi}'(x) \,\mathrm{d}x,$$

où $\check{\varphi} : x \mapsto \varphi(-x)$ définit une fonction dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*) \subset H^1(\mathbb{R}_+^*)$. Comme $\check{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$, Le dernier terme est par définition $\langle u, \check{\varphi}' \rangle = -\langle u', \check{\varphi} \rangle$. On a donc :

$$\langle v', \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}_+^*} u'(x)\check{\varphi}(x) \,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}_+^*} u'(x)\varphi(-x) \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_-^*} -u'(-x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x.$$

D'où le résultat.

Exercice 7 (La règle de la chaîne)**.** Soit $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $G(0) = 0$. Soit I un intervalle ouvert, le but de l'exercice est de montrer que pour tout $u \in H^1(I)$, on a $G \circ u \in H^1(I)$ et

$$(G \circ u)' = \big(G' \circ u\big)u'. \tag{4}$$

1. Soit $u \in H^1(I)$, montrer que $G' \circ u$ est bornée. En déduire que $(G' \circ u)u'$ et $G \circ u$ sont L^2.
   D'après le cours, la fonction u est bornée sur I, par une constante $A \geqslant 0$. Comme G' est continue sur $[-A, A]$ elle y est bornée par une constante $B \geqslant 0$. Alors, pour tout $x \in I$ on a $|G'(u(x))| \leqslant B$. Donc $G' \circ u$ est bornée.
   On a $u' \in L^2(I)$ et $G' \circ u \in L^\infty(I)$ donc $(G' \circ u)u' \in L^2(I)$. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in I$, $|G(u(x))| = |G(u(x)) - G(0)| \leqslant B|u(x)|$. Donc $|G \circ u| \leqslant B|u| \in L^2(I)$.
2. Conclure en utilisant un argument de densité.
   Pour tout $u \in H^1(I)$ on a $G \circ u \in L^2(I)$ et $(G' \circ u)u' \in L^2(I)$. Il suffit donc de prouver (4) pour avoir $G \circ u \in H^1(I)$. La formule (4) est vrai si $u \in \mathcal{C}^\infty(I)$. Dans le cas général on procède par approximation, comme dans l'exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de (restrictions à I de fonctions de) $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\|u_n - u\|_{H^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(G \circ u_n)' = \big(G' \circ u_n\big)u_n'.$$

   Il s'agit donc de prouver que $(G \circ u_n)' \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} (G \circ u)'$ et $(G' \circ u_n)u_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} (G' \circ u)u'$, ce qui établira (4).

D'après le cours, il existe $C \geqslant 0$ tel que $\|\cdot\|_\infty \leqslant C\|\cdot\|_{H^1}$ sur $H^1(I)$. En particulier, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} u$ et donc il existe $\widetilde{A}$ tel que $\|u_n\|_\infty \leqslant \widetilde{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notons $\widetilde{B}$ le maximum de $|G'|$ sur $\left[-\widetilde{A}, \widetilde{A}\right]$. Pour tout $x \in I$,

$$|G(u_n(x)) - G(u(x))| \leqslant \widetilde{B}\|u_n - u\|_\infty \leqslant C\widetilde{B}\|u_n - u\|_{H^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc $G \circ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} G \circ u$ dans $L^\infty(I)$ donc dans $\mathcal{D}'(I)$. Par continuité de la dérivation, $(G \circ u_n)' \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} (G \circ u_n)'$

L'autre convergence à montrer est plus subtile, et on va passer par l'évaluation contre des fonctions-test. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément donc simplement vers u, où on identifie u et son représentant continu. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on a $(G' \circ u_n)\varphi \xrightarrow[n\to+\infty]{} (G' \circ u)\varphi$ simplement sur I. Cette suite est dominée par $\widetilde{B}|\varphi| \in L^2(I)$, donc par l'exercice 3 on a $(G' \circ u_n)\varphi \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} (G' \circ u)\varphi$. Par ailleurs, $\|u_n' - u'\|_2 \leqslant \|u_n - u\|_{H^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme le produit $(f, g) \mapsto fg$ est bilinéaire continu de $L^2(I) \times L^2(I)$ dans $L^1(I)$, on en déduit que $(G' \circ u_n)u_n'\varphi \xrightarrow[n\to+\infty]{} (G' \circ u)u'\varphi$ dans $L^1(I)$ et donc dans $\mathcal{D}'(I)$.

3. Que dire de l'hypothèse $G(0) = 0$ lorsque I est borné ?

   On a utilisé $G(0) = 0$ uniquement dans la question 1 pour montrer que $G \circ u$ est dominé par $|u|$ et en déduire $G \circ u \in L^2(I)$. Si I est borné, quitte à considérer le représentant de u qui est continu sur le compact $\overline{I}$, on a $G \circ u$ continue, donc bornée, et donc L^2 sur $\overline{I}$. Dans ce cas, l'hypothèse $G(0) = 0$ est donc inutile.

Exercice 8 (Inégalité de Poincaré)**.** Soit $I =]a, b[$ où $-\infty < a < b < +\infty$. Montrer que pour tout $u \in H_0^1(I)$ on a $\|u\|_2 \leqslant (b - a)\|u'\|_2$.
Soit $u \in H_0^1(I)$. On identifie $u \in H^1(I)$ avec son unique représentant continu sur $[a, b]$. D'après le cours on a de plus $u(a) = 0 = u(b)$. Soit $x_0 \in]a, b[$, comme $u' \in L^1_{\text{loc}}$, il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que

$$u : x \longmapsto \int_{x_0}^{x} u'(t)\,\mathrm{d}t + C.$$

Comme $u' \in L^2(]a, b[) \subset L^1(]a, b[)$, l'intégrale tend vers $\int_{x_0}^{a} u'(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque $x \to a$ et vers $\int_{x_0}^{b} u'(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque $x \to b$. Par continuité de u en a, on a $C = \int_a^{x_0} u'(t)\,\mathrm{d}t$ et finalement $u(x) = \int_a^x u'(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in [a, b]$. Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$|u(x)|^2 \leqslant \left(\int_a^x |u'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant (x - a)\int_a^x |u'(t)|^2\,\mathrm{d}t = (x - a)\|u'\|_2^2.$$

En intégrant par rapport à x, on obtient $\|u\|_2^2 \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\|u'\|_2^2 \leqslant (b - a)^2\|u'\|_2^2$.

Exercice 9 (Problème de Dirichlet)**.** Soit $I =]a, b[$ où $-\infty < a < b < +\infty$. Soient q et $f \in L^1(I)$, on suppose que q est une fonction positive. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une unique solution à l'équation différentielle $u'' = qu + f$ d'inconnue $u \in H_0^1(I)$, c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction u continue sur $[a, b]$ telle que $u(a) = 0 = u(b)$ et $(T_u)'' = T_{qu+f}$ dans $\mathcal{D}(I)$.

1. Montrer que $L_f : v \mapsto \int_a^b f(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ définit une forme linéaire continue sur $\left(H_0^1(I), \|\cdot\|_{H^1}\right)$.

L'application $L_f : H_0^1(I) \to \mathbb{C}$ est bien linéaire. Par Cauchy–Schwarz, pour tout $v \in H_0^1(I)$,

$$|L_f(v)| \leqslant \int_a^b |f(t)||v(t)| \,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_1 \|v\|_\infty \leqslant C\|f\|_1 \|v\|_{H^1},$$

d'après l'inégalité de Sobolev. Donc L_f est bien continue.

2. On définit $\langle u\,, v\rangle_q = \displaystyle\int_a^b \Big(\overline{u'(t)}v'(t) + q(t)\overline{u(t)}v(t)\Big) \,\mathrm{d}t$ pour tout $u, v \in H_0^1(I)$. Montrer que $\langle \cdot\,, \cdot\rangle_q$ définit un produit scalaire hermitien sur $H_0^1(I)$.
   D'une part $\langle \cdot\,, \cdot\rangle_q$ est $\mathbb{C}$-linéaire en la seconde variable et $\mathbb{C}$-anti-linéaire en la première. D'autre part, comme q est à valeurs réelles, $\langle v\,, u\rangle_q = \overline{\langle u\,, v\rangle_q}$ pour tout $u, v \in H_0^1(I)$. Enfin, d'après l'inégalité de Poincaré prouvée dans l'exercice 8, si $u \in H_0^1(I)$ on a
   $$\|u\|_2^2 \leqslant (b-a)^2 \|u'\|_2^2 \leqslant (b-a)^2 \langle u\,, u\rangle_q.$$
   Donc si $\langle u\,, u\rangle_q = 0$ alors $u = 0$ dans $L^2(I)$ et donc dans $H_0^1(I)$.
3. On note $\|\cdot\|_q$ la norme associée à $\langle \cdot\,, \cdot\rangle_q$. Montrer que $\|\cdot\|_q$ et $\|\cdot\|_{H^1}$ sont équivalentes.
   Pour tout $u \in H_0^1(I)$, grâce à l'inégalité de Poincaré :
   $$\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2 \leqslant \big(1 + (b-a)^2\big)\|u'\|_2^2 \leqslant \big(1 + (b-a)^2\big)\|u\|_q^2.$$
   Par ailleurs, en utilisant l'inégalité de Sobolev sur I :
   $$\|u\|_q^2 = \|u'\|_2^2 + \int_a^b q(t)|u(t)|^2 \,\mathrm{d}t \leqslant \|u'\|_2^2 + \|u\|_\infty^2 \int_a^b q(t) \,\mathrm{d}t \leqslant (1 + C\|q\|_1)\|u\|_{H^1}^2.$$
   D'où l'équivalence des normes $\|\cdot\|_q$ et $\|\cdot\|_{H^1}$ sur $H_0^1(I)$.
4. Soit $u \in H_0^1(I)$, montrer que $u'' = qu + f$ si et seulement si $\forall \varphi \in H_0^1(I)$, $\langle \overline{u}\,, \varphi\rangle_q = -L_f(\varphi)$.
   Comme $u' \in L^2(I)$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ on a $\langle u''\,, \varphi\rangle = -\langle u'\,, \varphi'\rangle = -\int_a^b u'(t)\varphi'(t) \,\mathrm{d}t$. Donc
   $$\langle -u'' + qu\,, \varphi\rangle = \int_a^b u'(t)\varphi'(t) + q(t)u(t)\varphi(t) \,\mathrm{d}t = \langle \overline{u}\,, \varphi\rangle_q.$$
   Par ailleurs, $\langle f\,, \varphi\rangle = L_f(\varphi)$.
   Si u est solution alors $-u''+qu = -f$ dans $\mathcal{D}'(I)$ et donc $\langle \overline{u}\,, \varphi\rangle_q = -L_f(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. D'après les questions 1 et 3, la forme linéaire $-L_f$ est continue pour $\|\cdot\|_q$ et $\mathcal{D}(I)$ est dense dans $\big(H_0^1(I), \|\cdot\|_q\big)$. Ainsi, $\langle \overline{u}\,, \cdot\rangle_q$ et $-L_f$ sont deux formes linéaires continues qui coïncident sur un sous-espace dense et donc partout. Donc $\langle \overline{u}\,, \varphi\rangle_q = -L_f(\varphi)$ pour tout $\varphi \in H_0^1(I)$.
   Inversement, si cette formule est valide pour tout $\varphi \in H_0^1(I) \supset \mathcal{D}(I)$ alors $-u'' + qu = -f$.
5. Conclure qu'il existe un unique $u \in H_0^1(I)$ tel que $u'' = qu + f$.
   D'après la question 4, il est équivalent de montrer qu'il existe un unique $u \in H_0^1(I)$ tel que $\langle \overline{u}\,, \cdot\rangle_q = -L_f$.
   Comme $H_0^1(I)$ est fermé dans $\big(H^1(I), \|\cdot\|_{H^1}\big)$, c'est un espace de Hilbert pour $\langle \cdot\,, \cdot\rangle_{H^1}$ et donc pour le produit scalaire équivalent $\langle \cdot\,, \cdot\rangle_q$. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $v \in H_0^1(I)$ tel que $\langle v\,, \cdot\rangle_q = -L_f$, et $u = \overline{v}$ est l'unique solution recherchée.

Exercice 10 (Inégalité de Gagliardo–Nirenberg — *facultatif*)**.** On considère un intervalle ouvert I non borné. Le but de l'exercice est de prouver que pour tout $u \in H^1(I)$

$$\|u\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\|u\|_2^{\frac{1}{2}} \|u'\|_2^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

1. Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pour tout x et $y \in I$, montrer que $u(x)^2 = u(y)^2 + 2\int_x^y u(t)u'(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire que la restriction de u à I vérifie (5).

   Comme u^2 est $\mathcal{C}^1$, on a $u(x)^2 - u(y)^2 = \int_x^y (u^2)'(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x, y \in I$, ce qui montre la relation souhaitée.

   Comme $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et I n'est pas borné, il existe $y \in I$ tel que $u(y) = 0$. Grâce à la relation précédente, pour tout $x \in I$ on a :

   $$|u(x)|^2 = 2\left|\int_x^y u(t)u'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\left|\int_x^y |u(t)|^2\,\mathrm{d}t\right|^{\frac{1}{2}}\left|\int_x^y |u'(t)|^2\,\mathrm{d}t\right|^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\|u\|_2\|u'\|_2,$$

   par Cauchy–Schwarz, ce qui prouve (5) pour $u_{|I}$.

2. Montrer que (5) est vérifiée pour tout $u \in H^1(I)$.

   Dans le cas général on utilise une fois de plus la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $H^1(I)$. Soit $u \in H^1(I)$, il existe (u_n) telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{H^1} u$. La convergence dans $H^1(I)$ implique la convergence dans $L^\infty(I)$ via l'inégalité de Sobolev. Elle implique aussi la convergence de (u_n) vers u et de (u_n') vers u' dans $L^2(I)$, par définition. Donc $\|u_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|u\|_\infty$, $\|u_n\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|u\|_2$ et $\|u_n'\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|u'\|_2$.

   D'après la question 1, la fonction u_n vérifie l'inégalité (5) pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite, c'est aussi le cas de u.

3. En considérant $I =]0, +\infty[$, montrer que la constante $\sqrt{2}$ apparaissant dans (5) est optimale.

   Pour montrer l'optimalité de la constante $\sqrt{2}$, on peut chercher une fonction $u \in H^1(I)$ telle que (5) soit une égalité.

   Pour démontrer l'inégalité (5), on a appliqué l'inégalité de Cauchy–Schwarz à u et u'. Il est donc naturel de considérer le cas d'égalité dans cette inégalité, c'est-à-dire lorsque u' et u sont colinéaires, par exemple $u : x \mapsto e^{Ax}$ avec $A \in \mathbb{R}$. Comme on veut $u \in L^2(]0, +\infty[)$, il faut $A < 0$. Considérons donc $u : x \mapsto e^{-x}$.

   On a bien $u \in H^1(I)$. D'un côté $\|u\|_\infty = 1$. De l'autre,

   $$\|u'\|_2^2 = \|u\|_2^2 = \int_0^{+\infty} e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

   Donc $\|u\|_\infty = 1 = \sqrt{2}\|u\|_2^{\frac{1}{2}}\|u'\|_2^{\frac{1}{2}}$. Cela prouve l'optimalité de $\sqrt{2}$.