Université Paris-Saclay
2023 – 2024

Master Mathématiques et Applications
Distributions et Analyse de Fourier

Chargés de TD : Blanche Buet et Thomas Letendre.

Feuille 4 – Convergence au sens des distributions

Exercice 1 (Lemme de Riemann–Lebesgue)**.** Le but de cet exercice est de prouver le lemme de Riemann–Lebesgue : pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0. \tag{1}$$

1. Prouver (1) pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. En déduire que $e_x \xrightarrow[|x|\to+\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} 0$, où on a noté $e_x : t \mapsto e^{ixt}$.

   Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on procède par intégration par parties, en utilisant le fait que f est nulle hors d'un compact. Soit $M > 0$ tel que $\mathrm{supp}(f) \subset [-M, M]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_{-2M}^{2M} f(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\left[\frac{1}{ix}f(t)e^{itx}\right]_{-2M}^{2M} - \frac{1}{ix}\int_{-2M}^{2M} f'(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t\right| \\ &= \frac{1}{|x|}\left|\int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\|f'\|_1}{|x|} \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction e_x est $\mathcal{C}^\infty$ donc définit bien une distribution. Comme (1) est vérifiée pour les fonctions-test, on a $\langle e_x\,, \varphi\rangle \xrightarrow[|x|\to 0]{} 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, i.e. $e_x \xrightarrow[|x|\to+\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} 0$.

2. En déduire que (1) est valable pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$.
   On utilise la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, pour tout $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|f-g\|_1 + \left|\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t\right|.$$

   Soit $\varepsilon > 0$. Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$, il existe $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. D'après la question 1 pour tout x suffisamment loin de zéro on a $\left|\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$ et donc $\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t\right| < 2\varepsilon$. D'où le résultat.

Exercice 2 (Convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $e_n : x \mapsto e^{inx}$. Montrer que les suites de distributions définies par les formules suivantes convergent dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand $n \to +\infty$ et déterminer leur limite.

1. $A_n = n^{100}e_n$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $e_n^{(k)} = (in)^k e_n$. Donc $A_n = e_n^{(100)}$ en tant que fonction $\mathcal{C}^\infty$ et donc dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle A_n\,, \varphi\rangle = \langle e_n^{(100)}\,, \varphi\rangle = \langle e_n\,, \varphi^{(100)}\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

   Donc $A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} 0$.

Remarque. On a utilisé ici le fait que la dérivation est un opérateur continue de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dans lui-même. Comme $e_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} 0$ alors $e_n^{(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. $B_n : x \mapsto \cos^2(nx)$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \left(\frac{e_n+e_{-n}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e_{2n} + e_{-2n})$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

   $$\langle e_{-2n}\,, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-2inx}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{2inx}\overline{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x} = \overline{\langle e_{2n}\,, \overline{\varphi}\rangle} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

   d'après l'exercice 1. Donc $e_{2n} \xrightarrow[n\to\pm\infty]{\mathcal{D}'} 0$ et donc $B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} \frac{1}{2}$.

3. $C_n : x \mapsto n\sin(nx)H(x)$, où H est la fonction de Heaviside.

   Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

   $$\begin{aligned}\langle C_n\,, \varphi\rangle &= \int_0^{+\infty} n\sin(nx)\varphi(x) = \big[-\cos(nx)\varphi(x)\big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \cos(nx)\varphi(x)'\,\mathrm{d}x \\ &= \varphi(0) + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{inx}\varphi(x)'\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-inx}\varphi(x)'\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(0),\end{aligned}$$

   en appliquant le lemme de Riemann–Lebesgue à la fonction $H\varphi' \in L^1(\mathbb{R})$. Donc $C_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} \delta_0$.

4. $D_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\frac{k}{n}}$.

   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

   $$\langle D_n\,, \varphi\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

   car on reconnait une somme de Riemann, la fonction φ étant continue sur le segment $[0, 1]$. On en déduit que $D_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} \mathbf{1}_{[0,1]}$.

5. $E_n = n\left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}\right)$.

   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

   $$\begin{aligned}\langle E_n\,, \varphi\rangle &= n\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right) = n\left(\varphi(0) + \frac{1}{n}\varphi'(0) - \varphi(0) + \frac{1}{n}\varphi'(0) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 2\varphi'(0) + O\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle -2\delta_0'\,, \varphi\rangle,\end{aligned}$$

   de sorte que $E_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} -2\delta_0'$.

   Remarque. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, E_n est d'ordre 0 car somme de Dirac, en revanche la limite est d'ordre 1. L'ordre n'est donc pas continu sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

6. (*facultatif*) $F_n = e_n\,\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$.

   Indication. On pourra utiliser sans démonstration que $\displaystyle\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[R\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit $M \geqslant 0$ tel que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-M, M]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\langle F_n\,,\varphi\rangle = \left\langle \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right), e_n\varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon<|x|} \frac{e_n(x)\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon<|x|\leqslant M} \frac{e_n(x)\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Par le lemme de Hadamard, il existe $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\varphi : x \mapsto \varphi(0) + x\psi(x)$. Soit $\varepsilon \in \,]0, M]$,

$$\int_{\varepsilon<|x|\leqslant M} \frac{e_n(x)\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant M} e_n(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x + \varphi(0)\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant M} \frac{e_n(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Comme $e_n\psi$ est continue sur $[-M, M]$,

$$\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant M} e_n(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{-M}^{M} e_n(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Par ailleurs, comme $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{x}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, M]$,

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant M} \frac{e_n(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_{\varepsilon}^{M} \frac{e_n(x)-e_n(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = 2i\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant M} \frac{\sin(nx)}{x}\,\mathrm{d}x \\ &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2i\int_0^M \frac{\sin(nx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{nM} \frac{\sin(y)}{y}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\langle F_n\,,\varphi\rangle = \int_{-M}^{M} e_n(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x + 2i\varphi(0)\int_0^{nM} \frac{\sin(y)}{y}\,\mathrm{d}y.$$

En appliquant le lemme de Riemann–Lebesgue à $\psi\mathbf{1}_{[-M,M]} \in L^1(\mathbb{R})$, le premier terme tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. D'après l'indication, le second converge vers $i\pi\varphi(0)$. Ainsi, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle F_n\,,\varphi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle i\pi\delta_0\,,\varphi\rangle,$$

c'est-à-dire $F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} i\pi\delta_0$.

Définition (Translations et dilatations)**.** Soit $a \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

- Pour $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, on définit les fonctions $\tau_a\varphi$ et φ_λ comme suit :

$$\tau_a\varphi : x \mapsto \varphi(x-a) \quad \text{et} \quad \varphi_\lambda : x \mapsto \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

- Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on définit $\tau_a T$ et $\operatorname{dil}_\lambda T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ par les relations :

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \qquad \langle \tau_a T\,,\varphi\rangle = \langle T\,,\tau_{-a}\varphi\rangle \quad \text{et} \quad \langle \operatorname{dil}_\lambda T\,,\varphi\rangle = |\lambda|^d\left\langle T\,,\varphi_{\frac{1}{\lambda}}\right\rangle.$$

Exercice 3 (Translations et dilatations)**.** Soit $a \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

1. Vérifier que $\tau_a T$ et $\operatorname{dil}_\lambda T$ définissent bien des distributions sur $\mathbb{R}^d$.
   Tout d'abord, $\tau_a T$ et $\operatorname{dil}_\lambda T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ sont bien définies et linéaires. Vérifions à présent que ce sont des distributions. Comme $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$, il existe $C_K \geqslant 0$ et $m_K \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^d)$,

$$|\langle T\,,\varphi\rangle| \leqslant C_K \sum_{|\alpha|\leqslant m_K} \|\partial^\beta\varphi\|_\infty\,.$$

Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ compact et $M \geqslant 0$ tel que $K \subset \overline{B(0,M)}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^d)$, on a alors

$$\operatorname{supp} \tau_{-a}\varphi = -a + \operatorname{supp}\varphi \subset \overline{B(-a,M)} \quad \text{et} \quad \operatorname{supp}\varphi_{\frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda}\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{B\left(0, \frac{M}{|\lambda|}\right)}$$

On a de plus pour $\beta \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\beta(\tau_{-a}\varphi) = \tau_{-a}(\partial^\beta\varphi)$ et $\partial^\beta\left(\varphi_{\frac{1}{\lambda}}\right) = \lambda^{|\beta|}\left(\partial^\beta\varphi\right)_{\frac{1}{\lambda}}$ de sorte que

$$\|\partial^\beta(\tau_{-a}\varphi)\|_\infty = \|\partial^\beta\varphi\|_\infty \quad \text{et} \quad \|\partial^\beta(\varphi_{\frac{1}{\lambda}})\|_\infty = |\lambda|^{|\beta|}\|\partial^\beta\varphi\|_\infty\,.$$

On en déduit en notant $K_a = \overline{B(-a,M)}$ et $K_\lambda = \overline{B\left(0, \frac{M}{|\lambda|}\right)}$:

- $|\langle \tau_a T\,,\varphi\rangle| = |\langle T\,,\tau_{-a}\varphi\rangle| \leqslant C_{K_a}\displaystyle\sum_{|\beta|\leqslant m_{K_a}} \|\partial^\beta\varphi\|_\infty$
- $|\langle \operatorname{dil}_\lambda T\,,\varphi\rangle| = |\lambda|^d\left|\left\langle T\,,\varphi_{\frac{1}{\lambda}}\right\rangle\right| \leqslant C_{K_\lambda}\displaystyle\sum_{|\beta|\leqslant m_{K_\lambda}} |\lambda|^{|\beta|+d}\|\partial^\beta\varphi\|_\infty \leqslant C\sum_{|\beta|\leqslant m_{K_\lambda}}\|\partial^\beta\varphi\|_\infty$

  avec $C = C_{K_\lambda}\displaystyle\max_{j\in\{0,\ldots,m_{K_\lambda}\}}|\lambda|^{d+j}$,

ce qui montre bien que τ_a et $\operatorname{dil}_\lambda T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

2. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, identifier les distributions $\tau_a T_f$ et $\operatorname{dil}_\lambda T_f$.
Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle \tau_a T_f\,,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x+a)\,dx \underbrace{=}_{y=x+a} \int_{\mathbb{R}^d} f(y-a)\varphi(y)\,dy = \langle T_{\tau_a f}\,,\varphi\rangle$$

où $\tau_a f = f(\cdot - a) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Similairement,

$$\langle \operatorname{dil}_\lambda T_f\,,\varphi\rangle = |\lambda|^d\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi\left(\lambda x\right)\,dx \underbrace{=}_{x=\lambda y} \int_{\mathbb{R}^d} f\left(\frac{y}{\lambda}\right)\varphi(y)\,dy = \langle T_{f_\lambda}\,,\varphi\rangle$$

où $f_\lambda \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. On vérifie ainsi que la translation et la dilatation définies sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ prolongent ces opérations déjà connues pour des fonctions L^1_{loc} : pour $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$,

$$\tau_a T_f = T_{\tau_a f} \quad \text{et} \quad \operatorname{dil}_\lambda T_f = T_{f_\lambda}\,.$$

3. Dans cette question on suppose $d = 1$. Montrer dans ce cas que $\frac{1}{a}(T - \tau_a T) \xrightarrow[a\to 0]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T'$.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$,

$$\left\langle \frac{T-\tau_a,T}{a}\,,\varphi\right\rangle = \frac{1}{a}\big(\langle T\,,\varphi\rangle - \langle \tau_a T\,,\varphi\rangle\big) = \frac{1}{a}\big(\langle T\,,\varphi\rangle - \langle T\,,\tau_{-a}\varphi\rangle\big) = -\left\langle T\,,\frac{\tau_{-a}\varphi-\varphi}{a}\right\rangle.$$

On a $\psi_a := \frac{\tau_{-a}\varphi-\varphi}{a} : x \mapsto \frac{\varphi(x+a)-\varphi(x)}{a}$. On a montré dans l'exercice 3 question 2 du TD2 que ψ_a converge vers φ' dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ lorsque $a \to 0$. Par continuité de T sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a donc :

$$\left\langle \frac{T-\tau_a(T)}{a}\,,\varphi\right\rangle = -\langle T\,,\psi_a\rangle \xrightarrow[a\to 0]{} -\langle T\,,\varphi'\rangle = \langle T'\,,\varphi\rangle,$$

d'où le résultat.

4. Soit $h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\frac{1}{a}(T - \tau_{ah}T)$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ quand $a \to 0$ et identifier la limite.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, comme dans la question précédente,

$$\left\langle \frac{1}{a}(T - \tau_{ah}T)\,,\varphi \right\rangle = -\left\langle T\,, \frac{\tau_{-ah}\varphi - \varphi}{a} \right\rangle$$

et on va montrer que $\psi_a := \frac{\tau_{-ah}\varphi - \varphi}{a}$ converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ en se laissant guider par le cas $d = 1$ traité dans le TD2. Soit $M > 0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0, M)$, comme $a \to 0$, on peut supposer $|a| \leqslant 1$ et on a alors

$$\operatorname{supp}\psi_a \subset \operatorname{supp}\varphi \cup \operatorname{supp}\tau_{-ah}\varphi \subset B(0, M) \cup B(ah, M) \subset B(0, M + \|h\|)$$

et les fonctions $(\psi_a)_{|a|\leqslant 1}$ sont à support dans un même compact $\overline{B(0, M + \|h\|)}$. Soit $\beta \in \mathbb{N}^d$, il reste à établir la convergence uniforme de $\partial^\beta \psi_a$. Avant cela, on cherche le candidat limite en étudiant la convergence simple de (ψ_a) : soit $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\psi_a(x) = \frac{\varphi(x + ah) - \varphi(x)}{a} \xrightarrow[a\to 0]{} g'(0) = D_x\varphi \cdot h = \sum_{i=1}^{d} h_i \partial_i \varphi(x), \quad \text{où } g : t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(x + th)\,.$$

On note $\psi : x \in \mathbb{R}^d \mapsto D_x\varphi \cdot h$. Pour $\beta \in \mathbb{N}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\partial^\beta \psi_a(x) = \frac{\partial^\beta\varphi(x + ah) - \partial^\beta\varphi(x)}{a} \quad \text{et} \quad \partial^\beta\psi(x) = \sum_{i=1}^{d} h_i \partial^\beta \partial_i \varphi(x) \underbrace{=}_{\partial^\beta\partial_i = \partial_i\partial^\beta} D_x(\partial^\beta\varphi) \cdot h\,.$$

Par l'inégalité de Taylor–Lagrange à l'ordre 2, appliquée à $\partial^\beta\varphi$ entre x et $x + ah$, on a

$$\left| \partial^\beta\varphi(x + ah) - \partial^\beta\varphi(x) - D_x(\partial^\beta\varphi) \cdot (ah) \right| \leqslant \frac{1}{2}\|ah\|^2 \|D^2\partial^\beta\varphi\|_\infty\,.$$

On en déduit en divisant par a :

$$\|\partial^\beta\psi_a - \partial^\beta\psi\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}|a|\|h\|^2\|D^2\partial^\beta\varphi\|_\infty \xrightarrow[a\to 0]{} 0$$

et finalement $\psi_a \xrightarrow[a\to 0]{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \psi$. Comme $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on a alors

$$\left\langle \frac{1}{a}(T - \tau_{ah}T)\,,\varphi \right\rangle = -\langle T\,,\psi_a\rangle \xrightarrow[a\to 0]{} -\langle T\,,\psi\rangle = -\left\langle T\,, \sum_{i=1}^{d} h_i\partial_i\varphi \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{d} h_i\partial_i T\,,\varphi \right\rangle.$$

On conclut que $\frac{1}{a}(T - \tau_{ah}T)$ converge vers $\sum_{i=1}^{d} h_i\partial_i T$ quand $a \to 0$.

5. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\lambda \in]0, +\infty[\setminus\{1\}$. Montrer que $\dfrac{1}{\lambda - 1}\left(T - \dfrac{1}{\lambda}\operatorname{dil}_\lambda T\right)$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand $\lambda \to 1$ et identifier la limite.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\left\langle \frac{1}{\lambda - 1}\left(T - \frac{1}{\lambda}\operatorname{dil}_\lambda T\right)\,,\varphi \right\rangle = -\left\langle T\,, \frac{\varphi_{\frac{1}{\lambda}} - \varphi}{\lambda - 1} \right\rangle$$

et on reconnaît la famille $\psi_\lambda = \frac{\varphi(\lambda\cdot)-\varphi}{\lambda-1}$ étudiée dans l'exercice 3 question 3 du TD2. On avait montré que ψ_λ converge vers $\psi : x \mapsto x\varphi'(x)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et on en déduit que

$$\left\langle \frac{1}{\lambda-1}\left(T - \frac{1}{\lambda}\operatorname{dil}_\lambda T\right), \varphi\right\rangle = -\langle T, \psi_\lambda\rangle \xrightarrow[\lambda\to 1]{} -\langle T, \psi\rangle = -\big\langle xT, \varphi'\big\rangle = \big\langle (xT)', \varphi\big\rangle .$$

On peut conclure que $\frac{1}{\lambda-1}\left(T - \frac{1}{\lambda}\operatorname{dil}_{\frac{1}{\lambda}} T\right)$ converge vers $(xT)' = T + xT'$ quand $\lambda \to 1$.

Exercice 4 (Banach–Steinhaus)**.** 1. Rappeler l'énoncé du théorème de Banach–Steinhaus dans le cadre des espaces vectoriels normés.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé. Soit A une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Si $\forall v \in E$, $\sup_{\ell\in A}\|\ell(v)\|_F < +\infty$ alors $\sup_{\ell\in A}\|\ell\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$.

En particulier, si $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications linéaires continues de E vers F qui converge simplement vers ℓ alors ℓ est linéaire continue également.

2. On considère l'espace $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$L_n : f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mapsto n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right) .$$

Vérifier que $L_n : (\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue et que la suite $(L_n)_n$ converge simplement vers une forme linéaire L à identifier. La limite L est-elle continue ?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, L_n est linéaire et pour tout $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$,

$$|L_n(f)| \leqslant n\left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right| \leqslant 2n\|f\|_\infty ,$$

donc L_n est continue. On étudie à présent la convergence simple de $(L_n)_n$. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$,

$$L_n(f) = n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(0) .$$

Ainsi, L_n converge simplement vers la forme linéaire $L : f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mapsto f'(0)$.

Vérifions enfin que L n'est pas continue lorsqu'on munit $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ de $\|\cdot\|_\infty$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $C \geqslant 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, $|L(f)| = |f'(0)| \leqslant C\|f\|_\infty$ et considérons la suite $(f_k)_k$ de fonctions $\mathcal{C}^1$ dont la dérivée explose en 0, définie comme suit : pour $k \in \mathbb{N}$, $f_k : x \in [0,1] \mapsto \sin(kx)$. On a bien $f_k \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, $\|f_k\|_\infty \leqslant 1$ et $L(f_k) = f_k'(0) = k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est absurde.

Si on résume, les formes linéaires L_n sont continues et convergent simplement vers L, pourtant L n'est pas continue. Heureusement, cela ne met pas en défaut le théorème de Banach–Steinhaus puisque $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ n'est pas complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. C'est en revanche un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$.

Exercice 5 (Banach–Steinhaus dans $\mathcal{D}'$)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert.

1. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}'(\Omega)$, on suppose que $(\langle T_n, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Rappeler l'énoncé du théorème de Banach–Steinhaus dans ce cadre.

On suppose ici que la suite de distributions (T_n) converge simplement vers la forme linéaire T définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ par

$$T(\varphi) = \lim_{n\to+\infty}\langle T_n, \varphi\rangle .$$

Le théorème de Banach–Steinhaus assure alors que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, T_n converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et de plus, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle T_n \,, \varphi\rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty \,.$$

2. Soit $I : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$. Pour $\varepsilon > 0$, on considère la distribution T_ε associée à la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} I$. Rappeler pourquoi $(T_\varepsilon)_\varepsilon$ converge simplement quand $\varepsilon \to 0_+$, que dire de la limite ?

   On rappelle que pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T_\varepsilon \,, \varphi\rangle = \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^{+\infty} \psi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^{+\infty} \psi(x)\,\mathrm{d}x$$

   car $\psi : x \mapsto \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x} \in L^1(\mathbb{R}_+)$. D'une part, par le théorème de Banach–Steinhaus dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, la limite simple T de T_ε est une distribution et d'autre part, on a par définition

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \langle T_\varepsilon \,, \varphi\rangle = \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle,$$

   donc $T = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. On aurait pu montré que $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ définit une distribution par cet argument.

Définition (Dual topologique)**.** Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on note $L^p(\mathbb{R})'$ l'espace des formes linéaires continues sur $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$. Cet espace est muni de la norme d'opérateur associée à $\|\cdot\|_p$.

Définition (Convergence faible dans L^p)**.** On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $L^p(\mathbb{R})$ *converge faiblement* vers $f \in L^p(\mathbb{R})$ si : $\forall \Phi \in L^p(\mathbb{R})'$, $\Phi(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(f)$. On note alors $f_n \rightharpoonup f$.

On rappelle le résultat de dualité important suivant, qui servira dans l'exercice 6.

Théorème 1 (Théorème de représentation)**.** *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$, on note $I_f \in L^q(\mathbb{R})'$ la forme linéaire $I_f : g \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.*

- *L'application $I : f \mapsto I_f$ de $L^p(\mathbb{R})$ dans $L^q(\mathbb{R})'$ est isométrique, en particulier injective.*
- *Si $q < +\infty$ alors I est surjective.*

Exercice 6 (Convergence faible et convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)**.** Soit $p \in [1, +\infty]$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $L^p(\mathbb{R})$. Le but de l'exercice est de comparer les notions de convergence faible et de convergence au sens des distributions pour la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Si $f_n \rightharpoonup f \in L^p(\mathbb{R})$, montrer que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} f$ et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$.

   Notons $q \in [1, +\infty]$ l'exposant conjugué de p, caractérisé par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $\varphi \in L^q(\mathbb{R})$. Alors, comme $f_n \rightharpoonup f$,

$$\langle f_n \,, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = I_\varphi(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} I_\varphi(f) = \langle f \,, \varphi\rangle.$$

   Donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} f$.

Par le théorème 1, on a $\|f_n\|_p = \|I_{f_n}\|_{(L^q)'}$. Il s'agit donc de vérifier que $(I_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Soit $g \in L^q(\mathbb{R})$, alors

$$I_{f_n}(g) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = I_g(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} I_g(f).$$

Donc, pour tout $g \in L^q(\mathbb{R})$, la suite $(I_{f_n}(g))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par le théorème de Banach–Steinhaus, on a donc $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|I_{f_n}\|_{(L^q)'} < +\infty$. Et donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien bornée dans $L^p(\mathbb{R})$.

2. On suppose que $p \in \,]1, +\infty[$. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(\mathbb{R})$ et s'il existe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} T$, montrer qu'il existe $f \in L^p(\mathbb{R})$ telle que $T = T_f$ et que $f_n \rightharpoonup f$.

   On cherche d'abord à construire le $f \in L^p(\mathbb{R})$ limite. La distribution T est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Comme $p > 1$, on a $q < +\infty$, et on a vu dans l'exercice 7 de la feuille 1 que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^q(\mathbb{R})$. On va montrer que T est continu sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour la topologie de $L^q(\mathbb{R})$, ce qui permettra de l'étendre uniquement en un élément de $L^q(\mathbb{R})'$. Le théorème de représentation 1 nous donnera alors le f recherché.

   Notons $M = \sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_p < +\infty$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset L^q(\mathbb{R})$, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\langle f_n\,,\varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \|f_n\varphi\|_1 \leqslant \|f_n\|_p\|\varphi\|_q \leqslant M\|\varphi\|_q.$$

   En passant à la limite dans le terme de gauche, $|\langle T\,,\varphi\rangle| \leqslant M\|\varphi\|_q$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. La forme linéaire T est donc continue pour la norme $\|\cdot\|_q$ sur le sous-espace dense $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Donc il existe un unique prolongement de T en un élément de $L^q(\mathbb{R})'$ de même norme. Comme $p > 1$, on a $q < +\infty$ et il existe un unique $f \in L^p(\mathbb{R})$ tel que ce prolongement soit I_f et $\|f\|_p = \|I_f\|_{(L^q)'} \leqslant M$. En particulier, T est la restriction de I_f à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $T = T_f$.

   Soit $g \in L^q(\mathbb{R})$, pour tout $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}
|I_g(f_n) - I_g(f)| =& \left|\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant& \left|\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f_n(x)h(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} f_n(x)h(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f(x)h(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&+ \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)h(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant& \|f_n\|_p\|g-h\|_q + |\langle f_n\,,h\rangle - \langle f\,,h\rangle| + \|f\|_p\|g-h\|_q \\
\leqslant& 2M\|g-h\|_q + |\langle f_n\,,h\rangle - \langle f\,,h\rangle|.
\end{aligned}$$

   Soit $\varepsilon > 0$, par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^q(\mathbb{R})$, il existe $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $M\|g-h\|_q \leqslant \varepsilon$. Comme $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} f$, on a $|\langle f_n\,,h\rangle - \langle f\,,h\rangle| \leqslant \varepsilon$ pour tout n assez grand. Donc $|I_g(f_n) - I_g(f)| \leqslant 3\varepsilon$ pour tout n assez grand. Et donc $I_g(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} I_g(f)$ pour tout $g \in L^q(\mathbb{R})$. D'après le thm. 1, comme $p < +\infty$ toute forme linéaire continue sur $L^p(\mathbb{R})$ est de la forme I_g avec $g \in L^q(\mathbb{R})$. Donc $f_n \rightharpoonup f$.

3. Toujours dans le cas $p \in \,]1, +\infty[$, donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} 0$ et qui ne converge pas faiblement dans $L^p(\mathbb{R})$.

   D'après les questions 1 et 2, il faut et il suffit de construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non bornée dans $L^p(\mathbb{R})$ et telle que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} 0$. Une façon de faire cela est d'envoyer de la masse à l'infini.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n = n\mathbf{1}_{[n,n+1]}$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors

$$\langle f_n \,, \varphi\rangle = n\langle \mathbf{1}_{[n,n+1]} \,, \varphi\rangle = n\int_n^{n+1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

par compacité du support de φ. Donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} 0$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait faiblement, alors elle serait bornée dans $L^p(\mathbb{R})$ par la question 1. Or $\|f_n\|_p = n\|\mathbf{1}_{[n,n+1]}\|_p = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

4. Dans le cas $p = 1$, donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge au sens des distributions mais pas faiblement dans $L^1(\mathbb{R})$ et telle que $\|f_n\|_1 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Sur le même principe qu'à la question précédente, on pose $f_n = \mathbf{1}_{[n,n+1]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $\|f_n\|_1 = 1$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle f_n \,, \varphi\rangle = \int_n^{n+1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

   donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} 0$.
   Par l'absurde, supposons que $f_n \rightharpoonup f$. D'après la question 1 on a aussi convergence au sens des distributions, donc $T_f = 0$ par unicité de la limite et donc $f = 0$ par injectivité de $g \mapsto T_g$. On a donc $\Phi(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour toute forme linéaire continue sur $L^1(\mathbb{R})$. Prenons par exemple $\Phi = I_{\mathbf{1}}$, c'est-à-dire $\Phi : g \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\Phi(f_n) = 1$, contradiction. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement dans $L^1(\mathbb{R})$.

L'exercice suivant est adapté de l'examen partiel de 2021.

Exercice 7 (Une distribution d'ordre 2)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ on définit $T_n : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ par

$$T_n : \varphi \mapsto \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{1}{k}\right) - n\varphi(0) - \ln(n)\varphi'(0).$$

1. Pour tout $n \geqslant 2$, montrer que T_n est une distribution d'ordre 1 exactement.
   Soit $n \geqslant 2$. On peut montrer à la main que T est une distribution d'ordre au plus 1. On peut aussi remarquer que $T_n = \left(\sum_{k=1}^n \delta_{\frac{1}{k}}\right) - n\delta_0 - \ln(n)\delta_0'$ et que donc $T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   On rappelle que $\delta_a^{(k)}$ est d'ordre exactement k pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, d'après le cours. Comme une somme de distributions d'ordre $\leqslant 1$ est d'ordre $\leqslant 1$, on a bien T_n d'ordre $\leqslant 1$.
   Si T_n était d'ordre 0 alors, par le même argument, $\delta_0' = \frac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^n \delta_{\frac{1}{k}} - T_n - n\delta_0\right)$ serait d'ordre 0, ce qui est absurde. Donc T_n est d'ordre 1.
2. Déterminer le support de T_n, pour tout $n \geqslant 2$.
   Soit $n \geqslant 2$, on note $S_n = \{0\} \sqcup \left\{\frac{1}{k} \;\middle|\; 1 \leqslant k \leqslant n\right\}$. Montrons que $\operatorname{supp}(T_n) = S_n$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R} \setminus S_n$, alors $\langle T_n \,, \varphi\rangle = 0$. Donc $(T_n)_{|\mathbb{R}\setminus S_n} = 0$ et donc $\operatorname{supp}(T_n) \subset S_n$.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$, soit I un voisinage de $\frac{1}{k}$. Quitte à restreindre I, on peut supposer que I est un intervalle ouvert et $I \subset \left]\frac{1}{k+\frac{1}{2}}, \frac{1}{k-\frac{1}{2}}\right[$. D'après le cours, il existe $\chi \in \mathcal{D}(I)$ égale à 1 au voisinage $\frac{1}{k}$. On a donc $\langle T_n \,, \chi\rangle = \left\langle \delta_{\frac{1}{k}} \,, \chi\right\rangle = 1$. C'est valable pour tout I voisinage de $\frac{1}{k}$, donc $\frac{1}{k} \in \operatorname{supp}(T_n)$.
   De même, soit I un voisinage de 0, quitte à le réduire, on peut supposer que c'est un intervalle ouvert inclus dans $\left]-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right[$. Il existe alors $\chi \in \mathcal{D}(I)$ égale à 1 au voisinage de 0 et on a $\langle T_n \,, \chi\rangle = -n\chi(0) - \ln(n)\chi'(0) = -n$. C'est valable pour tout voisinage de 0, donc $0 \in \operatorname{supp}(T_n)$ et $S_n \subset \operatorname{supp}(T_n)$. D'où l'égalité.

3. Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'ordre inférieur ou égal à 2 telle que $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} T$.

   Indication. On rappelle qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$, appelée *constante d'Euler–Mascheroni*, tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ lorsque $n \to +\infty$.

   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\langle T_n \,, \varphi\rangle = \sum_{k=1}^{n}\left(\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi(0) - \frac{1}{k}\varphi'(0)\right) + \varphi'(0)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right)$$

   D'après l'indication, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$. Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi(0) - \frac{1}{k}\varphi'(0)\right| \leqslant \frac{1}{k^2}\|\varphi''\|_\infty \tag{i}$$

   par l'inégalité de Taylor–Lagrange. Le terme de droite étant sommable, la série converge et

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi(0) - \frac{1}{k}\varphi'(0)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k\geqslant 1}\left(\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi(0) - \frac{1}{k}\varphi'(0)\right).$$

   Donc, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T_n \,, \varphi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k\geqslant 1}\left(\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi(0) - \frac{1}{k}\varphi'(0)\right) + \gamma\varphi'(0) \in \mathbb{C}.$$

   D'après le théorème de Banach–Steinhaus, le terme de droite définit une distribution T, et $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} T$. De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a grâce à la majoration (i) :

$$|\langle T \,, \varphi\rangle| = \left|\sum_{k\geqslant 1}\left(\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi(0) - \frac{1}{k}\varphi'(0)\right) + \gamma\varphi'(0)\right| \leqslant \gamma\|\varphi'\|_\infty + \|\varphi''\|_\infty \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}.$$

   Donc T est bien d'ordre au plus 2.

4. Déterminer le support de T.

   Montrons que $\mathrm{supp}(T) = S := \{0\} \sqcup \left\{\frac{1}{k} \;\middle|\; k \in \mathbb{N}^*\right\}$.

   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}\setminus S$. Comme $S_n \subset S$ pour tout $n \geqslant 2$, on a $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}\setminus S_n$ et donc $\langle T_n \,, \varphi\rangle = 0$. En passant à la limite, $\langle T \,, \varphi\rangle = 0$. Donc T est nulle en restriction à $\mathbb{R}\setminus S$, et $\mathrm{supp}(T) \subset S$.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on montre exactement comme à la question 2 que $\frac{1}{k} \in \mathrm{supp}(T)$. Donc $\left\{\frac{1}{k} \;\middle|\; k \in \mathbb{N}^*\right\} \subset \mathrm{supp}(T)$. Donc $\overline{\left\{\frac{1}{k} \;\middle|\; k \in \mathbb{N}^*\right\}} = S \subset \mathrm{supp}(T)$, ce qui montre l'égalité.

Dans la suite de l'exercice, on cherche à prouver que T est d'ordre 2 exactement. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction plateau sur $[-1,1]$, i.e. χ est à valeurs dans $[0,1]$ et est constante à 1 sur $[-1,1]$. On définit $\varphi_k : x \mapsto \frac{1}{k}\chi(x)\sin(kx)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

5. Montrer que les suites $(\|\varphi_k\|_\infty)_{k\geqslant 1}$ et $(\|\varphi_k'\|_\infty)_{k\geqslant 1}$ sont bornées.

   Soit $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|\varphi_k(x)| = \left|\frac{1}{k}\chi(x)\sin(kx)\right| \leqslant \frac{1}{k}\|\chi\|_\infty\|\sin\|_\infty = \frac{1}{k} \leqslant 1$$
$$|\varphi_k'(x)| = \left|\frac{1}{k}\chi'(x)\sin(kx) + \chi(x)\cos(kx)\right| \leqslant \frac{1}{k}\|\chi'\|_\infty + \|\chi\|_\infty = 1 + \|\chi'\|_\infty.$$

   Donc les suites $(\|\varphi_k\|_\infty)_{k\geqslant 1}$ et $(\|\varphi_k'\|_\infty)_{k\geqslant 1}$ sont bornées.

6. En utilisant la formule de Taylor–Lagrange pour sin en 0, montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall k \in [\![1, n-1]\!], \qquad \left| \sum_{j=k+1}^{n} \varphi_k\left(\frac{1}{j}\right) - \ln(n) + \ln(k) \right| \leqslant C.$$

Indication. On pourra vérifier que $\sum_{j>k} \frac{1}{j^2} \leqslant \frac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Commençons par vérifier l'indication. On fait une comparaison série intégrale. Pour tout $j \geqslant 2$, $\frac{1}{j^2} \leqslant \int_{j-1}^{j} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ par positivité et décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a donc

$$\sum_{j>k} \frac{1}{j^2} \leqslant \int_{k}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_k^{+\infty} = \frac{1}{k}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0,1]$, on a $\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\sin(kx)$. Par l'inégalité de Taylor–Lagrange appliquée à sin entre 0 et kx, $|\sin(kx) - kx| \leqslant k^2x^2$. Donc $|\varphi_k(x) - x| \leqslant kx^2$.

Soient $n \geqslant 2$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$, pour tout $j \geqslant k+1$ on a $\left|\varphi_k\left(\frac{1}{j}\right) - \frac{1}{j}\right| \leqslant \frac{k}{j^2}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=k+1}^{n} \varphi_k\left(\frac{1}{j}\right) - \ln(n) + \ln(k) \right| &\leqslant \left| \sum_{j=k+1}^{n} \varphi_k\left(\frac{1}{j}\right) - \frac{1}{j} \right| + \left| \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j} - \ln(n) + \ln(k) \right| \\
&\leqslant k \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j^2} + \left| \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln(n) \right) - \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} - \ln(k) \right) \right| \\
&\leqslant 1 + \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln(n) \right| + \left| \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} - \ln(k) \right|,
\end{aligned}$$

où on a utilisé la majoration de l'indication. Comme $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$, cette suite est bornée, disons par M. En posant $C = 1 + 2M$ on obtient bien :

$$\left| \sum_{j=k+1}^{n} \varphi_k\left(\frac{1}{j}\right) - \ln(n) + \ln(k) \right| \leqslant C.$$

7. Montrer que la suite $\left(\langle T\,, \varphi_k\rangle + \ln(k)\right)_{k\geqslant 1}$ est bornée.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $n > k$, en utilisant les formules explicites de φ_k et φ_k' calculées à la question 5, on obtient :

$$\begin{aligned}
|\langle T_n\,, \varphi_k\rangle + \ln(k)| &= \left| \sum_{j=1}^{n} \varphi_k\left(\frac{1}{j}\right) - n\varphi_k(0) - \ln(n)\varphi_k'(0) + \ln(k) \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{n} \varphi_k\left(\frac{1}{j}\right) - \ln(n) + \ln(k) \right| \\
&\leqslant \left| \sum_{j=1}^{k} \varphi_k\left(\frac{1}{j}\right) \right| + \left| \sum_{j=k+1}^{n} \varphi_k\left(\frac{1}{j}\right) - \ln(n) + \ln(k) \right| \\
&\leqslant k\|\varphi_k\|_\infty + C,
\end{aligned}$$

où C est la constante obtenue à la question 6. La majoration de la question 5 montre que $\|\varphi_k\|_\infty \leqslant \frac{1}{k}$ et donc $|\langle T_n\,, \varphi_k\rangle + \ln(k)| \leqslant C + 1$ pour tout $n > k$. En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient $|\langle T\,, \varphi_k\rangle + \ln(k)| \leqslant C + 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

8. En conclure que T est d'ordre 2.

   On sait déjà par la question 3 que T est d'ordre au plus 2. On raisonne par l'absurde. Si T était d'ordre $\leqslant 1$, il existerait une constante $M \geqslant 0$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans le compact $\operatorname{supp}(\chi)$:
   $$|\langle T\,, \varphi\rangle| \leqslant M\big(\|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty\big).$$
   En particulier, d'après la question 5, la suite $\big(\langle T\,, \varphi_k\rangle\big)_{k\in\mathbb{N}}$ serait bornée par $2M$. Or, la question 7, on a $\langle T\,, \varphi_k\rangle = \ln(k) + O(1) \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$. On obtient donc une contradiction, et T est bien d'ordre 2 exactement.