Université Paris-Saclay
2023 – 2024

Master Mathématiques et Applications
Distributions et Analyse de Fourier

Chargés de TD : Blanche Buet et Thomas Letendre.

Feuille 3 – Distributions en plusieurs variables, support

Exercice 1 (Support d'une distribution)**.**

1. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, montrer que $\mathrm{supp}(T_f) = \mathrm{supp}(f)$.

   On rappelle la caractérisation suivante du support d'une distribution T : pour tout $x \in \Omega$,
   $$x \notin \mathrm{supp}(T) \iff \exists U \text{ voisinage ouvert de } x \text{ tel que } T_{|U} = 0.$$
   Soit $U \subset \Omega$ un ouvert, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(U) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a :
   $$\left\langle (T_f)_{|U} \,, \varphi \right\rangle = \langle T_f \,, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_U f_{|U}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \left\langle T_{(f_{|U})} \,, \varphi \right\rangle.$$
   Donc $(T_f)_{|U} = T_{(f_{|U})}$.

   Soit $x \notin \mathrm{supp}(f)$, il existe U ouvert contenant x tel que $f_{|U} = 0$. Alors $(T_f)_{|U} = T_{(f_{|U})} = 0$ et donc $x \notin \mathrm{supp}(T_f)$. Inversement, soit $x \notin \mathrm{supp}(T_f)$ il existe U ouvert contenant x tel que $(T_f)_{|U} = T_{(f_{|U})} = 0$. Par injectivité de $g \mapsto T_g$ de $L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ vers $\mathcal{D}'(U)$, on en déduit que $f_{|U} = 0$ et donc que $x \notin \mathrm{supp}(f)$. Finalement $x \notin \mathrm{supp}(T_f) \iff x \notin \mathrm{supp}(f)$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, montrer que $\mathrm{supp}(fT) \subset \mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(T)$.

   Soit $x \notin \mathrm{supp}(f)$, il existe U ouvert voisinage de x tel que $f_{|U} = 0$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(U) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ on a $f\varphi = 0$ et donc $\langle fT \,, \varphi \rangle = \langle T \,, f\varphi \rangle = 0$. Donc $(fT)_{|U} = 0$ et $x \notin \mathrm{supp}(fT)$. Donc $\mathrm{supp}(fT) \subset \mathrm{supp}(f)$.

   Soit $x \notin \mathrm{supp}(T)$ et soit U voisinage ouvert de x tel que $T_{|U} = 0$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ on a $f\varphi \in \mathcal{D}(U)$ et donc $\langle fT \,, \varphi \rangle = \langle T \,, f\varphi \rangle = 0$. Donc $x \notin \mathrm{supp}(fT)$. Donc $\mathrm{supp}(fT) \subset \mathrm{supp}(T)$.

3. Déterminer le support de $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$.

   L'idée est de montrer que $\mathbb{R}^* \subset \mathrm{supp}\big(\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)\big)$. Le support étant fermé on en déduit que $\mathrm{supp}\big(\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)\big) = \mathbb{R}$. Le fait que $\mathbb{R}^* \subset \mathrm{supp}\big(\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)\big)$ est naturel vu que $\big(\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)\big)_{|\mathbb{R}^*}$ est associée à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ (qui est L^1_{loc} sur $\mathbb{R}^*$) et que cette fonction ne s'annule pas.

   Soit $y \in \mathbb{R}^*$, soit I un voisinage ouvert de y. Quitte à réduire I on peut supposer que $0 \notin I$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction à support dans I, positive et non nulle. Alors $\big\langle \big(\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)\big) \,, \chi \big\rangle$ est l'intégrale de la fonction $x \mapsto \frac{\chi(x)}{x}$ qui est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, de signe constant et non nulle. Donc $\big\langle \big(\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)\big) \,, \chi \big\rangle \neq 0$, et donc $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)_{|I} \neq 0$. Comme I est quelconque, $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ ne s'annule sur aucun voisinage de y et donc $y \in \mathrm{supp}\big(\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)\big)$.

   On peut aussi utiliser la méthode astucieuse suivante. Par la question 2,
   $$\mathbb{R} = \mathrm{supp}(x \mapsto 1) = \mathrm{supp}\left(x\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \subset \mathrm{supp}(x \mapsto x) \cap \mathrm{supp}\left(\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \mathrm{supp}\left(\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

4. Déterminer le support singulier de $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$.

   On a vu dans l'exercice 5 de la feuille 2 que $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)_{|\mathbb{R}^*}$ est la distribution associée à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est $\mathcal{C}^\infty$. Donc le support singulier de $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ est contenu dans $\{0\}$. S'il était vide, $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ serait associée à une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ entier, en particulier elle serait d'ordre 0. Comme on a montré que la valeur principale est d'ordre exactement 1 (exercice 5 feuille 2), son support singulier est non vide, donc est $\{0\}$.

Exercice 2 (Support et produit par une fonction $\mathcal{C}^\infty$)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, on note $Z = f^{-1}(0)$.

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ tel que $fT = 0$, montrer que $\mathrm{supp}(T) \subset Z$.
   Comme f est continue Z est fermé. Soit $x \notin Z$, on a alors $U = \mathbb{R}^d \setminus Z$ ouvert contenant x. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(U) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, la fonction f ne s'annule pas sur un voisinage de $\mathrm{supp}(\varphi)$ et donc $\frac{1}{f}\varphi$ est bien définie et dans $\mathcal{D}(U)$. Alors $\langle T\,,\varphi\rangle = \left\langle fT\,,\frac{1}{f}\varphi\right\rangle = 0$. Donc $T_{|U} = 0$ et $x \notin \mathrm{supp}(T)$. Donc $\mathrm{supp}(T) \subset Z$.
2. Soient $K \subset U \subset \mathbb{R}^d$ avec K compact et U ouvert, montrer qu'il existe $\chi \in \mathcal{D}(U)$ à valeurs dans $[0,1]$ et constante à 1 sur un voisinage de K.
   Comme U est ouvert, la distance entre le compact K et le fermé $\mathbb{R}^d \setminus U$ est $2\delta > 0$. Alors $\widetilde{K} = \left\{x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; d(x,K) \leqslant \delta\right\}$ est un voisinage compact de K inclus dans U. Il suffit alors de prendre pour $\chi \in \mathcal{D}(U)$ une fonction plateau égale à 1 sur $\widetilde{K}$.

Dans la suite, on fixe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution d'ordre 0 telle que $\mathrm{supp}(T) \subset Z$. L'objectif est de montrer que dans ce cas $fT = 0$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on note $K = \mathrm{supp}(\varphi) \cap \mathrm{supp}(T)$.

3. Pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, montrer qu'il existe U_ε ouvert contenant K tel que $\sup_{x\in U_\varepsilon}|f(x)| \leqslant \varepsilon$.
   Comme $K \subset \mathrm{supp}(T) \subset Z = f^{-1}(0)$, il suffit de prendre $U_\varepsilon = f^{-1}(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varepsilon\})$, qui est ouvert par continuité de f.
4. Construire une famille de fonctions $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon\in\,]0,1]}$ telle que :
   - $\forall \varepsilon \in\,]0,1]$, $\chi_\varepsilon \in \mathcal{D}(U_\varepsilon)$ et $\langle T\,,(1-\chi_\varepsilon)f\varphi\rangle = 0\,$;
   - $\langle T\,,\chi_\varepsilon f\varphi\rangle \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.

   Soit $\varepsilon \in\,]0,1]$, commençons par trouver une condition suffisante pour que $\langle T\,,(1-\chi_\varepsilon)f\varphi\rangle = 0$. D'après le cours, si $\mathrm{supp}((1-\chi_\varepsilon)f\varphi) \cap \mathrm{supp}(T) = \emptyset$ alors $\langle T\,,(1-\chi_\varepsilon)f\varphi\rangle = 0$. On a
   $$\mathrm{supp}((1-\chi_\varepsilon)f\varphi) \cap \mathrm{supp}(T) \subset \mathrm{supp}(1-\chi_\varepsilon) \cap \mathrm{supp}(\varphi) \cap \mathrm{supp}(T) = \mathrm{supp}(1-\chi_\varepsilon) \cap K.$$
   Il suffit donc que $\mathrm{supp}(1-\chi_\varepsilon) \cap K = \emptyset$, i.e. que χ_ε soit constante à 1 sur un voisinage de K. Supposons que l'on ait construit une fonction $\chi_\varepsilon \in \mathcal{D}(U_\varepsilon)$ vérifiant cette condition. Comme T est d'ordre 0, il existe $C \geqslant 0$ tel que $|\langle T\,,\psi\rangle| \leqslant C\|\psi\|_\infty$ pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ supporté dans le compact $\mathrm{supp}(\varphi)$. Comme $\chi_\varepsilon f\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathrm{supp}(\chi_\varepsilon f\varphi) \subset \mathrm{supp}(\varphi)$,
   $$|\langle T\,,\chi_\varepsilon f\varphi\rangle| \leqslant C\|\chi_\varepsilon f\varphi\|_\infty \leqslant C\|\varphi\|_\infty\|\chi_\varepsilon f\|_\infty.$$
   Pour $x \in \mathbb{R}^d \setminus U_\varepsilon$ on a $|\chi_\varepsilon(x)f(x)| = 0$. Si on suppose de plus que χ_ε est à valeurs dans $[0,1]$, alors pour tout $x \in U_\varepsilon$, $|\chi_\varepsilon(x)f(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant \varepsilon$ par la question 3. Donc $\|\chi_\varepsilon f\|_\infty \leqslant \varepsilon$ et
   $$|\langle T\,,\chi_\varepsilon f\varphi\rangle| \leqslant C\|\varphi\|_\infty\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$
   Il suffit donc de prendre $\chi_\varepsilon \in \mathcal{D}(U_\varepsilon)$ à valeurs dans $[0,1]$ et égale à 1 sur un voisinage de K, ce qui est possible d'après la question 2.
5. Conclure que $fT = 0$.
   Par la question 4, pour tout $\varepsilon \in]0,1]$,
   $$\langle fT\,,\varphi\rangle = \langle T\,,f\varphi\rangle = \langle T\,,(1-\chi_\varepsilon)f\varphi\rangle + \langle T\,,\chi_\varepsilon f\varphi\rangle = \langle T\,,\chi_\varepsilon f\varphi\rangle \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$
   Comme le terme de gauche ne dépend pas de ε, on a $\langle fT\,,\varphi\rangle = 0$. Comme on a choisi $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ quelconque, on a bien $fT = 0$.

6. Le résultat est-il encore vrai si on ne suppose pas que T est d'ordre 0 ?

   Si $\mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(T) = \emptyset$ avec $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ la question 2 de l'exercice 1 montre que $\mathrm{supp}(fT) = \emptyset$ et donc $fT = 0$. Dans la question 5, on a montré que, pour T d'ordre 0, si $\mathrm{supp}(T) \subset Z$ alors $fT = 0$. Cette condition est plus faible. En effet, si $\mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(T) = \emptyset$ alors $\mathrm{supp}(T) \subset Z$, mais si $\mathrm{supp}(T) \subset Z$ alors

$$\mathrm{supp}(T) \cap \mathrm{supp}(f) = \mathrm{supp}(T) \cap \overline{\mathbb{R}^d \setminus Z} = \mathrm{supp}(T) \setminus \mathring{Z} \subset Z \setminus \mathring{Z},$$

   c'est-à-dire que $\mathrm{supp}(T)$ peut rencontrer la frontière de Z, qui est aussi la frontière de $\mathrm{supp}(f)$. Si on ne suppose pas que T est d'ordre 0, cette condition est trop faible. Considérons par exemple $T = \delta_0' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, qui est d'ordre 1 et supporté par $\{0\}$, et $f : x \mapsto x$ de sorte que $Z = \{0\} = \mathrm{supp}(T)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle fT\,, \varphi \rangle = \langle \delta_0'\,, x\varphi \rangle = -\langle \delta_0\,, \varphi + x\varphi' \rangle = -\varphi(0) = \langle -\delta_0\,, \varphi \rangle.$$

   Donc $fT = -\delta_0 \neq 0$.

Exercice 3 (Intégrabilité des puissances de $|x|$)**.** Soit $B_R = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| < R \right\}$ la boule de centre 0 et de rayon $R > 0$ dans $\mathbb{R}^2$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que $\displaystyle\int_{B_R} |x|^\alpha \,\mathrm{d}x < +\infty$ si et seulement si $\alpha > -2$.

   On passe en coordonnées polaires pour se ramener à une intégrale en une variable :

$$\int_{B_R} |x|^\alpha \,\mathrm{d}x = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} r^\alpha r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta = 2\pi \int_0^R r^{\alpha+1} \,\mathrm{d}r.$$

   La dernière intégrale est finie si et seulement si $\alpha + 1 > -1$, c'est-à-dire $\alpha > -2$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R} |x|^\alpha \,\mathrm{d}x < +\infty$ si et seulement si $\alpha < -2$.

   Comme précédemment,

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R} |x|^\alpha \,\mathrm{d}x = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=R}^{+\infty} r^\alpha r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta = 2\pi \int_R^{+\infty} r^{\alpha+1} \,\mathrm{d}r.$$

   La dernière intégrale est finie si et seulement si $\alpha + 1 < -1$, c'est-à-dire $\alpha < -2$.

3. La fonction $x = (x_1, x_2) \mapsto \dfrac{x_1}{|x|^3}$ est-elle dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$?

   Cette fonction est continue donc L^1_{loc} sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. S'il y a un problème c'est donc en 0. On va montrer que la fonction n'est pas intégrable sur B_R, par un changement de variable polaire.

$$\int_{B_R} \left| \frac{x_1}{|x|} \right| \mathrm{d}x = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \frac{r|\cos(\theta)|}{r^3} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{2\pi} |\cos(\theta)| \,\mathrm{d}\theta \right) \left(\int_0^R \frac{1}{r} \,\mathrm{d}r \right) = +\infty.$$

Exercice 4 (Le retour de la valeur principale)**.** Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $B_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| < \varepsilon \right\}$. Soit $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{C}$ définie par :

$$T : \varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon} \frac{x_1}{|x|^3} \varphi(x) \,\mathrm{d}x.$$

1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, montrer que $\psi : x = (x_1, x_2) \mapsto \dfrac{x_1}{|x|^3}\big(\varphi(x_1, x_2) - \varphi(-x_1, x_2)\big)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^2)$.

   Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ il existe $R > 0$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B_R$. Hors de B_R, la fonction ψ est nulle. Par ailleurs, elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Il s'agit donc de vérifier l'intégrabilité au voisinage de 0. Pour tout $x = (x_1, x_2) \in B_R$ on a

$$|\psi(x)| = \frac{|x_1|}{|x|^3}|\varphi(x_1, x_2) - \varphi(-x_1, x_2)| \leqslant \frac{2|x_1|^2}{|x|^3}\|\partial_1\varphi\|_\infty \leqslant 2\|\partial_1\varphi\|_\infty \frac{1}{|x|},$$

   par le théorème des accroissements finis. D'après l'exercice 3, le terme de droite est intégrable sur $B \cap B_R$, donc ψ aussi. Finalement $\psi \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

2. En déduire que T définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$. Elle est appelée *valeur principale* de $\frac{x_1}{|x|^3}$.

   La question 3 de l'exercice 3 montre que $x \mapsto \frac{x_1}{|x|^3}$ n'est pas L^1_{loc}. Comme dans le cas de $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$, c'est un phénomène de symétrie qui permet d'effacer la singularité pour définir T.
   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, montrons que $\langle T, \varphi\rangle$ est bien défini. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon} \frac{x_1}{|x|^3}\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\substack{|x|>\varepsilon\\ x_1<0}} \frac{x_1}{|x|^3}\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\substack{|x|>\varepsilon\\ x_1>0}} \frac{x_1}{|x|^3}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\substack{|x|>\varepsilon\\ x_1>0}} \frac{x_1}{|x|^3}\big(\varphi(x_1, x_2) - \varphi(-x_1, x_2)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\substack{|x|>\varepsilon\\ x_1>0}} \psi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \psi(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

   car ψ est intégrable. Donc $\langle T, \varphi\rangle$ est bien défini. De plus, cette expression est linéaire en φ. Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ compact et soit $R > 0$ tel que $K \subset B_R$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^2)$, on a en utilisant la majoration de la question 1 :

$$|\langle T, \varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \psi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{\substack{|x|<R\\ x_1>0}} |\psi(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant 2\|\partial_1\varphi\|_\infty \int_{\substack{|x|<R\\ x_1>0}} \frac{1}{|x|}\,\mathrm{d}x = \|\partial_1\varphi\|_\infty \int_{B_R} \frac{1}{|x|}\,\mathrm{d}x.$$

   L'intégrale dans le dernier terme est finie par l'exercice 3 (en fait elle vaut $2\pi R$). Donc T est une distribution d'ordre au plus 1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 (Dérivées, transverse ou pas)**.** Montrer que les deux formes linéaires sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ suivantes définissent des distributions et déterminer leur ordre.

$$T_1 : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \partial_1\varphi(t, 0)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad T_2 : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \partial_2\varphi(t, 0)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $i \in \{1, 2\}$. On commence par vérifier que T_i définit une distribution. Elle est linéaire. Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ compact et $R > 0$ tel que $K \subset B(0, R)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^2)$,

$$|\langle T_i, \varphi\rangle| \leqslant \int_{[-R,R]} |\partial_i\varphi(t, 0)|\,\mathrm{d}t \leqslant 2R\|\partial_i\varphi\|_\infty,$$

et T_i est une distribution d'ordre au plus 1.
Dans le cas où $i = 1$, on dérive φ dans la même direction qu'on intègre et on peut donc intégrer par parties : plus précisément, en notant $\psi : t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(t, 0)$, ψ est $\mathcal{C}^1$ à support compact dans $]-R, R[$ ($\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$) et $\psi' : t \mapsto \partial_1\varphi(t, 0)$, de sorte que $\langle T_1, \varphi\rangle = \int_{[-R,R]} \psi'(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Donc $T_1 = 0$.

Montrons à présent que T_2 est d'ordre 1. On sait que T_2 est d'ordre au plus 1 et supposons par l'absurde que T_2 est d'ordre 0. En appliquant la définition de distribution d'ordre 0 sur le compact $K = \overline{B(0,2)}$, il existe $C_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans K,

$$|\langle T_2\,,\varphi\rangle| \leqslant C_0\|\varphi\|_\infty\,. \tag{i}$$

On va construire une suite de fonctions test $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à support dans K qui contredit l'inégalité précédente à la limite : pour cela on doit faire exploser la dérivée partielle $\partial_2\varphi_n$ tout en conservant la norme $\|\varphi_n\|_\infty$ uniformément bornée en n.
Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ une fonction plateau : $\chi = 1$ sur $\overline{B(0,1)}$, $\chi = 0$ en dehors de $B(0,2)$ et $0 \leqslant \chi \leqslant 1$. On définit ensuite $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ par $\psi : (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \chi(x)x_2$ de sorte que pour tout $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_2\psi(x_1,x_2) = \partial_2\chi(x)x_2 + \chi(x)$ et pour $t \in \mathbb{R}$, $\partial_2\psi(t,0) = \chi(t,0)$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ par $\varphi_n : (x_1,x_2) \mapsto \psi(x_1,nx_2)$, de sorte que φ_n est à support dans K et $\partial_2\varphi_n : (x_1,x_2) \mapsto n\partial_2\psi(x_1,nx_2)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a alors $\partial_2\varphi_n(t,0) = n\partial_2\psi(t,0) = n\chi(t,0) \geqslant 0$ et

$$\langle T_2\,,\varphi_n\rangle = \int_{\mathbb{R}} \partial_2\varphi_n(t,0)\,\mathrm{d}t = n\int_{\mathbb{R}} \chi(t,0)\,\mathrm{d}t \geqslant n\int_{[-1,1]} 1\,\mathrm{d}t \geqslant 2n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

En revanche, $\|\varphi_n\|_\infty \leqslant \|\psi\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui contredit (i). Donc T_2 est d'ordre 1 exactement.

Exercice 6 (Calculs de dérivées)**.** On définit des formes linéaires T et T^+ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ par :

$$T : \varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(t,t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad T^+ : \varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t,t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que T et T^+ définissent des distributions sur $\mathbb{R}^2$.
   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, disons supportée dans $[-R,R]^2$, alors $t \mapsto \varphi(t,t)$ est $\mathcal{C}^\infty$ et supportée dans $[-R,R]$. En particulier, cette seconde fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc T et T^+ sont bien définies, et linéaires.
   Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ compact et soit $R > 0$ tel que $K \subset [-R,R]^2$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^2)$, on a :

$$|\langle T\,,\varphi\rangle| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t,t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-R}^{R} |\varphi(t,t)|\,\mathrm{d}t \leqslant 2R\|\varphi\|_\infty,$$
$$\left|\langle T^+\,,\varphi\rangle\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}_+} |\varphi(t,t)|\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{R} |\varphi(t,t)|\,\mathrm{d}t \leqslant R\|\varphi\|_\infty.$$

   Donc T et T^+ sont deux distributions d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^2$.
   Remarque. Notons $i : t \mapsto (t,t)$ l'injection diagonale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Si on note μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, par définition de la mesure image on a :

$$\langle i_*\mu\,,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x)\,\mathrm{d}i_*\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi\circ i(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t,t)\,\mathrm{d}t = \langle T\,,\varphi\rangle.$$

   Et de même T^+ est le poussé-en-avant par i de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Calculer $\partial_1 T + \partial_2 T$ et $\partial_1 T^+ + \partial_2 T^+$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on calcule :

$$\langle \partial_1 T + \partial_2 T\,,\varphi\rangle = \langle \partial_1 T\,,\varphi\rangle + \langle \partial_2 T\,,\varphi\rangle = -\langle T\,,\partial_1\varphi\rangle - \langle T\,,\partial_2\varphi\rangle = -\langle T\,,\partial_1\varphi + \partial_2\varphi\rangle.$$

Notons $i : t \mapsto (t,t)$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(\varphi \circ i)'(t) = d_{i(t)}\varphi \cdot i'(t) = d_{(t,t)}\varphi \cdot (1,1) = \partial_1\varphi(t,t) + \partial_2\varphi(t,t).$$

Donc

$$\langle \partial_1 T + \partial_2 T \,, \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \partial_1\varphi(t,t) + \partial_2\varphi(t,t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}} (\varphi \circ i)'(t)\,\mathrm{d}t = -[\varphi \circ i]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Ainsi, on obtient que $\partial_1 T + \partial_2 T = 0$. Pour T^+, le même calcul que précédemment mène à

$$\langle \partial_1 T^+ + \partial_2 T^+ \,, \varphi \rangle = -\langle T^+ \,, \partial_1\varphi + \partial_2\varphi \rangle = -\int_0^{+\infty} (\varphi \circ i)'(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(i(0)) = \varphi(0,0).$$

On obtient donc $\partial_1 T + \partial_2 T = \delta_0$.

3. Notons $D = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_2 \geqslant |x_1|\right\}$ et $\mathbf{1}_D$ sa fonction indicatrice, calculer $\partial_1\mathbf{1}_D - \partial_2\mathbf{1}_D$.
   On a $\mathbf{1}_D \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Comme cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ et localement constante sur $\mathbb{R}^2 \backslash \partial D$, on sait déjà que ses dérivées sont supportées sur ∂D. Cette fois on va traiter séparément $\partial_1\mathbf{1}_D$ et $\partial_2\mathbf{1}_D$, au moins dans un premier temps. Pour calculer $\partial_1\mathbf{1}_D$, on coupe D en tranches horizontales : $D = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_2 \geqslant 0, -x_2 \leqslant x_1 \leqslant x_2\right\}$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ on a alors :

$$\begin{aligned}\langle \partial_1\mathbf{1}_D \,, \varphi \rangle = -\langle \mathbf{1}_D \,, \partial_1\varphi \rangle = -\int_D \partial_1\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_{x_2=0}^{+\infty} \left(\int_{x_1=-x_2}^{x_2} \partial_1\varphi(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 \\ &= -\int_0^{+\infty} \varphi(x_2,x_2) - \varphi(-x_2,x_2)\,\mathrm{d}x_2 = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(-t,t)\,\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t,t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

   Pour calculer $\partial_2\mathbf{1}_D$, on suit le même schéma en découpant D en tranches verticales :

$$\begin{aligned}\langle \partial_2\mathbf{1}_D \,, \varphi \rangle = -\int_D \partial_2\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_{x_1\in\mathbb{R}} \left(\int_{x_2=|x_1|}^{+\infty} \partial_2\varphi(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x_1,|x_1|)\,\mathrm{d}x_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x_1,x_1)\,\mathrm{d}x_1 + \int_{\mathbb{R}_-} \varphi(x_1,-x_1)\,\mathrm{d}x_1 = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t,t)\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(-t,t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

   Finalement,

$$\langle \partial_1\mathbf{1}_D - \partial_2\mathbf{1}_D \,, \varphi \rangle = -2\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t,t)\,\mathrm{d}t = -2\langle T^+ \,, \varphi \rangle$$

   pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et donc $\partial_1\mathbf{1}_D - \partial_2\mathbf{1}_D = -2T^+$.

4. Calculer $\partial_1^2\mathbf{1}_D - \partial_2^2\mathbf{1}_D$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
   En utilisant les questions 2 et 3, on obtient :

$$\begin{aligned}\partial_1^2\mathbf{1}_D - \partial_2^2\mathbf{1}_D = \left(\partial_1^2 - \partial_2^2\right)\mathbf{1}_D = (\partial_1 + \partial_2)(\partial_1 - \partial_2)\mathbf{1}_D &= (\partial_1 + \partial_2)(\partial_1\mathbf{1}_D - \partial_2\mathbf{1}_D) \\ &= -2(\partial_1 T^+ + \partial_2 T^+) = -2\delta_0.\end{aligned}$$

Définition (Mesure-image)**.** Soit $f : (X,\mathcal{A}) \to (Y,\mathcal{B})$ une application mesurable entre deux espaces mesurés et soit ν une mesure sur $(X,\mathcal{A})$. On rappelle que la mesure-image $f_*\nu$ est la mesure sur $(Y,\mathcal{B})$ définie par $f_*\nu(B) = \nu\big(f^{-1}(B)\big)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$.
C'est l'unique mesure telle que $\displaystyle\int_A \varphi \circ f(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \int_B \varphi(y)\,\mathrm{d}f_*\nu(y)$ pour toute fonction mesurable $\varphi : B \to \mathbb{C}$ qui est positive ou telle que $\varphi \circ f$ est intégrable.

Exercice 7 (Mesure uniforme sur la sphère)**.** Soit γ la restriction à $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ de la mesure gaussienne standard, i.e. γ admet la densité $x \mapsto (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $\mu = \pi_*\gamma$ la mesure image de γ par la projection radiale $\pi : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{R}^d$.

1. Montrer que μ définit une distribution d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^d$.
   Comme π est continue, elle est mesurable de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{R}^d$ équipés de leurs tribus boréliennes. La mesure-image $\pi_*\gamma$ est donc une mesure borélienne bien définie. Par ailleurs, $\mu(\mathbb{R}^d) = \gamma\big(\pi^{-1}(\mathbb{R}^d)\big) = \gamma\big(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}\big) = 1$. Donc μ est une mesure borélienne, positive et finie sur les compacts. C'est donc une mesure de Radon, et elle définit une distribution d'ordre 0 par $\langle \mu\,, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$.
   Alternativement, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ alors $\varphi \circ \pi$ est continue sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et bornée par $\|\varphi\|_\infty$. Par définition de la mesure-image on a :
   $$|\langle \mu\,, \varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \varphi\circ\pi(x)\,\mathrm{d}\gamma(x)\right| \leqslant \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \mathrm{d}\gamma(x) = \|\varphi\|_\infty.$$
2. Déterminer le support de μ.
   La mesure μ est la loi de $\frac{X}{|X|}$, où X est un vecteur gaussien centré réduit dans $\mathbb{R}^d$. C'est donc la mesure uniforme de probabilité uniforme sur $\mathbb{S}^{d-1}$. Il est donc naturel que $\operatorname{supp}(\mu) = \mathbb{S}^{d-1}$. Prouvons-le.
   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ à support dans $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{S}^{d-1}$. Comme l'image de π est contenue dans $\mathbb{S}^{d-1}$, $\varphi \circ \pi = 0$. Alors,
   $$\langle \mu\,, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \varphi\circ\pi(x)\,\mathrm{d}\gamma(x) = 0.$$
   Donc $\mu_{|\mathbb{R}^d\setminus\mathbb{S}^{d-1}} = 0$ et $\operatorname{supp}(\mu) \subset \mathbb{S}^{d-1}$.
   Dans la suite on note $B(x, R)$ la boule ouverte de centre $x \in \mathbb{R}^d$ et de rayon $R > 0$. Soit $x \in \mathbb{S}^{d-1}$, montrons que $x \in \operatorname{supp}(\mu)$. Soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, il existe une fonction-plateau $\chi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $[0, 1]$ et telle que $\operatorname{supp}(\chi_\varepsilon) \subset B(x, 2\varepsilon)$ et χ_ε est vaut 1 sur $B(x, \varepsilon)$. Comme χ_ε est à valeurs positives,
   $$\begin{aligned}\langle \mu\,, \chi_\varepsilon\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \chi_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \chi_\varepsilon\circ\pi(x)\,\mathrm{d}\gamma(x) \geqslant \int_{\pi^{-1}(B(x,\varepsilon))} \chi_\varepsilon\circ\pi(x)\,\mathrm{d}\gamma(x)\\ &\geqslant \gamma\big(\pi^{-1}(B(x,\varepsilon))\big).\end{aligned}$$
   Comme $B(x, \varepsilon)$ est un ouvert non-vide c'est aussi le cas de sa pré-image, π étant continue. Comme γ admet une densité positive par rapport à Lebesgue, $\gamma\big(\pi^{-1}(B(x,\varepsilon))\big) > 0$. Remarquons que $\pi^{-1}(B(x,\varepsilon))$ est le cône engendré par $B(x,\varepsilon) \cap \mathbb{S}^{d-1}$ (faire un dessin).
   Ainsi, pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ on a construit une fonction $\chi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ supportée dans $B(x, 2\varepsilon)$ et telle que $\langle \mu\,, \chi_\varepsilon\rangle > 0$. Donc μ n'est nulle en restriction à aucun voisinage de x, et $x \in \operatorname{supp}(\mu)$. Finalement, $\operatorname{supp}(\mu) = \mathbb{S}^{d-1}$.
3. Existe-t-il $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mu = T_f$?
   Par l'absurde, supposons qu'il existe $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mu = T_f$. On aurait alors
   $$T_{(f_{|\mathbb{R}^d\setminus\mathbb{S}^{d-1}})} = (T_f)_{|\mathbb{R}^d\setminus\mathbb{S}^{d-1}} = \mu_{|\mathbb{R}^d\setminus\mathbb{S}^{d-1}} = 0.$$
   Par injectivité de $g \mapsto T_g$ de $L^1_{\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{S}^{d-1}\big)$ vers $\mathcal{D}\big(\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{S}^{d-1}\big)$ on aurait f nulle sur $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{S}^{d-1}$, c'est-à-dire presque partout sur $\mathbb{R}^d$. Mais alors $f = 0$, ce qui est absurde car $\operatorname{supp}(\mu) \neq \emptyset$.