Université Paris-Saclay
2023 – 2024

Master Mathématiques et Applications
Distributions et Analyse de Fourier

Chargés de TD : Blanche Buet et Thomas Letendre.

Feuille 2 – Fonctions-test, distributions, dérivées et ordre

Notations. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

- On appelle *multi-indice* tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$. On note $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ sa *longueur*, et $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ on note $x^\alpha = \prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i}$ et $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$.
- Soient $K \subset \Omega$ un compact et $f \in \mathcal{C}^l(\Omega)$, on note $N_{K,l}(f) = \sup\{|\partial^\alpha f(x)| \mid |\alpha| \leqslant l \text{ et } x \in K\}$.

Exercice 1 (Intégrales tronquées)**.** Soit (X, μ) un espace mesuré et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante ($A_{n+1} \subset A_n$ pour tout n) de parties mesurables de X telle que $\mu(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

1. Montrer que :
$$\forall f \in L^1(X, \mu), \qquad \int_{X\setminus A_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathbf{1}_{X\setminus A_n}$ la fonction indicatrice de $X \setminus A_n$. Soit $f \in L^1(X, \mu)$, on a :
$$\int_{X\setminus A_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \mathbf{1}_{X\setminus A_n}(x) f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$
Comme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0$ et
$$\mathbf{1}_{X\setminus A_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n, \\ 0 & \text{si } x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n. \end{cases}$$
Donc, μ-presque partout sur X, on a $\mathbf{1}_{X\setminus A_n}(x) f(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. Cette suite est dominée par $|f|$ qui est intégrable sur X. La conclusion découle alors du théorème de convergence dominée de Lebesgue.
2. (*facultatif*) Montrer que le résultat reste vrai si on enlève l'hypothèse de décroissance sur la suite $(A_n)_n$.
C'est une conséquence de la propriété suivante que nous allons prouver : soit $f \in L^1(X, \mu)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
$$\text{pour tout } A \subset X \text{ mesurable,} \quad \mu(A) < \delta \quad \Rightarrow \quad \int_A |f|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon\,.$$
Supposons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en prenant $\delta_n = 2^{-n}$), $A_n \subset X$ mesurable tel que
$$\mu(A_n) < \frac{1}{2^n} \quad \text{ et } \quad \int_{A_n} |f|\,\mathrm{d}\mu \geqslant \varepsilon\,.$$
Soit $N \in \mathbb{N}$, on définit $B_N = \cup_{n\geqslant N} A_n$, la suite $(B_N)_N$ ainsi définie est décroissante et pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\mu(B_N) \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \mu(A_n) \leqslant 2^{1-N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. On en déduit par la question 1 que
$$\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu - \varepsilon \geqslant \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu - \int_{A_N} |f|\,\mathrm{d}\mu = \int_{X\setminus A_N} |f|\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_{X\setminus B_N} |f|\,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu,$$
ce qui est absurde.

Exercice 2 (Lemme de Hadamard)**.** Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$.

1. Montrer qu'il existe des fonctions $(\psi_\alpha)_{|\alpha|=k}$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad f(x) = \sum_{|\alpha|<k} \partial^\alpha f(0) \frac{x^\alpha}{\alpha!} + \sum_{|\alpha|=k} x^\alpha \psi_\alpha(x). \tag{1}$$
Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^k$, on peut écrire la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et x à l'ordre $k-1$:
$$f(x) = \sum_{|\alpha|<k} \partial^\alpha f(0) \frac{x^\alpha}{\alpha!} + \sum_{|\alpha|=k} x^\alpha \frac{k}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} \partial^\alpha f(tx)\,\mathrm{d}t.$$
On obtient la formule souhaitée en posant pour tout multi-indice α de longueur k :
$$\psi_\alpha : x \longmapsto \frac{k}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} \partial^\alpha f(tx)\,\mathrm{d}t.$$

2. Soit $l \in \mathbb{N}$. Si $f \in \mathcal{C}^{k+l}(\mathbb{R}^d)$, montrer que les $(\psi_\alpha)_{|\alpha|=k}$ sont $\mathcal{C}^l$ sur $\mathbb{R}^d$ et expliciter leurs dérivées.
Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| = k$ et soit $h_\alpha : (x,t) \mapsto (1-t)^{k-1}\partial^\alpha f(tx)$ de $\mathbb{R}^d \times [0,1]$ dans $\mathbb{C}$. Comme $\partial^\alpha f \in \mathcal{C}^l(\mathbb{R}^d)$, pour tout $t \in [0,1]$ la fonction $h_\alpha(\cdot,t)$ est également de classe $\mathcal{C}^l$. Soit $\beta \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\beta| \leqslant l$, dans la suite on notera $\partial^\beta h_\alpha(x,t)$ la valeur en $x \in \mathbb{R}^d$ de $\partial^\beta(h_\alpha(\cdot,t))$. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,1]$ on a alors :
$$\partial^\beta h_\alpha(x,t) = (1-t)^{k-1} t^{|\beta|} \partial^{\alpha+\beta} f(tx).$$
Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $\partial^\beta h_\alpha(x,\cdot)$ est continue sur $[0,1]$, en particulier mesurable. Soit $R > 0$ et $B_R \subset \mathbb{R}^d$ la boule fermée de centre 0 et de rayon R. Pour tout $x \in B_R$ et $t \in [0,1]$:
$$\left|\partial^\beta h_\alpha(x,t)\right| \leqslant \left|\partial^{\alpha+\beta} f(tx)\right| \leqslant N_{B_R,k+l}(f).$$
Le terme de droite est intégrable sur $[0,1]$ et indépendant de $x \in B_R$. En appliquant de façon répétée le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, on obtient que
$$\psi_\alpha : x \longmapsto \frac{k}{\alpha!} \int_0^1 h_\alpha(x,t)\,\mathrm{d}t$$
admet des dérivées partielles continues sur l'intérieur de B_R à tout ordre inférieur à l. Donc ψ_α est $\mathcal{C}^l$ sur l'intérieur de B_R. Comme R est quelconque, $\psi_\alpha \in \mathcal{C}^l(\mathbb{R}^d)$. De plus, ses dérivées partielles s'obtiennent par dérivation sous l'intégrale : pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\beta| \leqslant l$,
$$\partial^\beta \psi_\alpha(x) = \frac{k}{\alpha!} \int_0^1 \partial^\beta h_\alpha(x,t)\,\mathrm{d}t = \frac{k}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} t^{|\beta|} \partial^{\alpha+\beta} f(tx)\,\mathrm{d}t. \tag{i}$$

3. Soit $B \subset \mathbb{R}^d$ une boule fermée centrée en 0. Pour tout α de longueur $|\alpha| = k$, montrer que $N_{B,l}(\psi_\alpha) \leqslant N_{B,l}(\partial^\alpha f) \leqslant N_{B,k+l}(f)$.
Soient α et $\beta \in \mathbb{N}^d$ tels que $|\alpha| = k$ et $|\beta| \leqslant l$. Pour tout $x \in B$, l'équation (i) donne que :
$$\left|\partial^\beta \psi_\alpha(x)\right| \leqslant \frac{k}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} t^{|\beta|} \left|\partial^{\alpha+\beta} f(tx)\right| \mathrm{d}t \leqslant N_{B,l}(\partial^\alpha f) \int_0^1 k(1-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t = N_{B,l}(\partial^\alpha f).$$
On obtient la première inégalité en passant au sup sur $x \in B$ et β de longueur au plus l. La seconde égalité est une conséquence directe de la définition de $N_{B,k+l}(f)$.

Remarque. Ici et dans les questions précédentes, on considère $\partial^\alpha f$ uniquement sur le segment joignant 0 à x. On peut donc raisonner de même en remplaçant $\mathbb{R}^d$ (resp. B) par un ouvert (resp. un compact) étoilé en 0.

4. Dans cette question on suppose que $d = 1$, de sorte que l'équation (1) se ré-écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(0)\frac{x^j}{j!} + x^k\psi_k(x).$$

On suppose que $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, à quelle condition a-t-on $\psi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$?

D'après la question 2, la fonction ψ_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il s'agit donc de savoir à quelle condition le support de ψ_k est compact (i.e. borné, vu qu'il est fermé par définition). Si ψ_k est à support compact, alors il en est de même du polynôme de Taylor de degré $k-1$ de f en 0 :

$$\sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(0)\frac{X^j}{j!} = f - X^k\psi_k.$$

Ce polynôme est donc nul. Inversement, si ce polynôme est nul alors ψ_k s'annule hors du compact $\operatorname{supp}(f) \cup \{0\}$, et donc $\psi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Ainsi $\psi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si toutes les dérivées de f d'ordre strictement inférieur à k s'annulent en 0.

Exercice 3 (Convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$)**.** 1. Soient $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui converge vers φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer que $\psi\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \psi\varphi$.

Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact contenant les supports des $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'inclusion $\operatorname{supp}(\psi\varphi_n) \subset \operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$. Donc la condition de support est vérifiée. Par ailleurs, comme $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \varphi$, on a $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc φ est nulle hors de K.

Notons $f = \psi\varphi$ et $f_n = \psi\varphi_n$ pour $n \geqslant 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$, par la règle de Leibniz on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \varphi^{(i)}(x)\psi^{(k-i)}(x)$$

et une formule similaire pour chaque f_n. Donc

$$\begin{aligned} \left|f_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)\right| &= \left|\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\varphi_n^{(i)}(x) - \varphi^{(i)}(x)\right)\psi^{(k-i)}(x)\right| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left|\varphi_n^{(i)}(x) - \varphi^{(i)}(x)\right|\left|\psi^{(k-i)}(x)\right|. \end{aligned}$$

Si $x \notin K$, chaque terme de la somme est nul. Sinon $\left|\psi^{(k-i)}(x)\right| \leqslant \left\|\psi^{(k-i)}\right\|_{\infty,K}$. Donc

$$\left\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left\|\psi^{(k-i)}\right\|_{\infty,K} \left\|\varphi_n^{(i)} - \varphi^{(i)}\right\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Et donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} f$.

2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, pour tout $t \neq 0$ on pose $\varphi_t : x \mapsto \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}$. Montrer que φ_t converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ lorsque $t \to 0$, vers une certaine fonction à déterminer.

   Si φ_t converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ lorsque $t \to 0$ vers une fonction ψ, alors elle converge uniformément et donc simplement vers ψ. On doit donc avoir $\psi = \varphi'$.

   Soit $M \geqslant 0$ tel que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-M, M]$. Comme on s'intéresse au cas $t \to 0$, on peut se restreindre à considérer $t \in [-1,1] \setminus \{0\}$. Pour tout $t \in [-1,1] \setminus \{0\}$ on a $\operatorname{supp}(\varphi_t) \subset [-M-1, M+1]$, donc la condition de support est vérifiée.

   Soit $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [-1,1] \setminus \{0\}$,

$$\left|\varphi_t^{(k)}(x) - (\varphi')^{(k)}(x)\right| = \frac{1}{|t|}\left|\varphi^{(k)}(x+t) - \varphi^{(k)}(x) - t\varphi^{(k+1)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{|t|}\frac{t^2}{2}\left\|\varphi^{(k+2)}\right\|_\infty,$$

   où on a appliqué l'inégalité de Taylor–Lagrange entre x et $x+t$ à la fonction $\varphi^{(k)} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Donc

$$\left\|\varphi_t^{(k)} - \varphi^{(k+1)}\right\|_\infty \leqslant |t|\left\|\varphi^{(k+2)}\right\|_\infty \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

   Finalement, on a bien $\varphi_t \xrightarrow[t\to 0]{} \varphi'$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

3. Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\psi : x \mapsto x\varphi'(x)$. Pour tout $t \neq 1$ on définit $\varphi_t : x \mapsto \varphi(xt)$ et $\psi_t = \frac{\varphi_t - \varphi}{t-1}$. Montrer que $\psi_t \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour tout $t \notin \{0,1\}$ et que $\psi_t \xrightarrow[t\to 1]{\mathcal{D}} \psi$.

   Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, la fonction φ_t est $\mathcal{C}^\infty$ comme composée de fonction $\mathcal{C}^\infty$, donc $\psi_t \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Soit $M \geqslant 0$ tel que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-M, M]$, alors $\operatorname{supp}(\varphi_t) \subset \left[-\frac{M}{|t|}, \frac{M}{|t|}\right]$ si $t \neq 0$. Dans ce cas, on a $\operatorname{supp}(\psi_t) \subset \operatorname{supp}(\varphi_t) \cup \operatorname{supp}(\varphi) = [-K_t, K_t]$, où $K_t = \max(M, \frac{M}{|t|})$. Ainsi si $t \notin \{0,1\}$, on a bien $\psi_t \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Notons que $\psi_0 = \varphi - \varphi(0)$ n'est à support compact que si $\varphi(0) = 0$.

   Pour montrer la convergence, on peut se restreindre à considérer $t \geqslant \frac{1}{2}$. Pour tout $t \geqslant \frac{1}{2}$ on a $K_t \leqslant 2M$ et donc $\operatorname{supp}(\psi_t) \subset [-2M, 2M]$. Calculons les dérivées de ψ et ψ_t. Par la règle de Leibniz, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \operatorname{Id}^{(i)}(x)\varphi^{(1+k-i)}(x) = x\varphi^{(k+1)}(x) + k\varphi^{(k)}(x),$$

   et par ailleurs

$$\psi_t^{(k)}(x) = \frac{1}{t-1}\Big(\varphi_t^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)\Big) = \frac{1}{t-1}\Big(t^k\varphi^{(k)}(tx) - \varphi^{(k)}(x)\Big).$$

   On a donc

$$\begin{aligned}
\left|\psi_t^{(k)}(x) - \psi^{(k)}(x)\right| =& \left|\frac{t^k\varphi^{(k)}(tx) - \varphi^{(k)}(x)}{t-1} - x\varphi^{(k+1)}(x) - k\varphi^{(k)}(x)\right| \\
=& \left|\frac{t^k - 1}{t-1}\varphi^{(k)}(tx) + \frac{\varphi^{(k)}(tx) - \varphi^{(k)}(x) - (t-1)x\varphi^{(k+1)}(x)}{t-1} - k\varphi^{(k)}(x)\right| \\
\leqslant& \frac{1}{|t-1|}\left|\varphi^{(k)}(tx) - \varphi^{(k)}(x) - (tx-x)\varphi^{(k+1)}(x)\right| \\
&+ \left|\frac{t^k-1}{t-1}\right|\left|\varphi^{(k)}(tx) - \varphi^{(k)}(x)\right| + \left|\frac{t^k-1}{t-1} - k\right||\varphi^{(k)}(x)|.
\end{aligned}$$

Pour contrôler le premier terme, on applique Taylor–Lagrange pour $\varphi^{(k)}$ entre x et tx. On obtient :

$$\frac{1}{|t-1|}\left|\varphi^{(k)}(tx)-\varphi^{(k)}(x)-(tx-x)\varphi^{(k+1)}(x)\right| \leqslant x^2|t-1|\|\varphi^{(k+2)}\|_\infty.$$

De même, pour le second terme,

$$\left|\frac{t^k-1}{t-1}\right|\left|\varphi^{(k)}(tx)-\varphi^{(k)}(x)\right| \leqslant |t^k-1||x|\|\varphi^{(k+1)}\|_\infty.$$

Enfin, pour le troisième terme :

$$\left|\frac{t^k-1}{t-1}-k\right||\varphi^{(k)}(x)| \leqslant \left|\sum_{i=0}^{k-1} t^i - k\right|\|\varphi^{(k)}\|_\infty \leqslant \|\varphi^{(k)}\|_\infty \sum_{i=0}^{k-1}|t^i-1|.$$

Si $|x| \geqslant 2M$, alors $\left|\psi_t^{(k)}(x)-\psi^{(k)}(x)\right| = 0$. Sinon, les inégalités précédentes montrent que :

$$\left|\psi_t^{(k)}(x)-\psi^{(k)}(x)\right| \leqslant x^2|t-1|\|\varphi^{(k+2)}\|_\infty + |t^k-1||x|\|\varphi^{(k+1)}\|_\infty + \|\varphi^{(k)}\|_\infty \sum_{i=0}^{k-1}|t^i-1|.$$

Donc

$$\left\|\psi_t^{(k)}-\psi^{(k)}\right\|_\infty \leqslant 4M^2|t-1|\|\varphi^{(k+2)}\|_\infty + 2M|t^k-1|\|\varphi^{(k+1)}\|_\infty + \|\varphi^{(k)}\|_\infty \sum_{i=0}^{k-1}|t^i-1| \xrightarrow[t\to 1]{} 0.$$

Exercice 4 (Premiers exemples de distributions)**.** Montrer que les applications suivantes définissent des distributions et déterminer leur ordre.

1. $T : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{x^2}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$

   Un argument rapide est de remarquer qu'il s'agit de la distribution T_f associée à la fonction $f : x \mapsto e^{x^2}$ qui est $\mathcal{C}^0$ donc L^1_{loc} : d'après le cours, T est une distribution d'ordre 0.

2. $T : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \int_0^{+\infty} \varphi(x^2)\,\mathrm{d}x.$

   Il s'agit bien d'une application linéaire de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$. Soit K un compact et soit $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$. Il existe $M \geqslant 0$ tel que $K \subset [-M, M]$ et alors :

   $$\left|\int_0^{+\infty} \varphi(x^2)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^{\sqrt{M}} \varphi(x^2)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sqrt{M}\|\varphi\|_\infty\,,$$

   de sorte que T définit une distribution d'ordre 0.

3. $T : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{(n)}(n).$

   On commence par vérifier que $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ définit une distribution. T est bien linéaire. Soit K un compact de $\mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset [-N, N]$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$, on a :

   $$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{(n)}(n)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} \varphi^{(n)}(n)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N}\|\varphi^{(n)}\|_\infty.$$

Déterminons à présent l'ordre de T. On observe que $T = \sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\delta_n^{(n)}$ et on rappelle que pour $m \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, la distribution $\delta_a^{(m)}$ est d'ordre exactement m. Supposons par l'absurde que T soit d'ordre fini $N \in \mathbb{N}$. Il existerait alors $C \geqslant 0$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ supportée dans $K = \left[N + \frac{1}{2}, N + \frac{3}{2}\right]$,

$$\left|\left\langle \delta_{N+1}^{(N+1)}\,, \varphi\right\rangle\right| = \left|\varphi^{(N+1)}(N+1)\right| = |\langle T\,, \varphi\rangle| \leqslant C\sum_{n=0}^{N}\|\varphi^{(n)}\|_\infty.$$

Soit $\chi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ et constante à 1 au voisinage de $N+1$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on aurait alors $\chi\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ et $(\chi\varphi)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\varphi^{(i)}\chi^{(n-i)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \delta_{N+1}^{(N+1)}\,, \varphi\right\rangle\right| = \left|\varphi^{(N+1)}(N+1)\right| = \left|(\chi\varphi)^{(N+1)}(N+1)\right| &= \left|\left\langle \delta_{N+1}^{(N+1)}\,, \chi\varphi\right\rangle\right| \\ \leqslant C\sum_{n=0}^{N}\|(\chi\varphi)^{(n)}\|_\infty &\leqslant C\sum_{n=0}^{N}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\|\varphi^{(i)}\|_\infty\|\chi^{(n-i)}\|_\infty \\ &\leqslant C'\sum_{i=0}^{N}\|\varphi^{(i)}\|_\infty\end{aligned}$$

Cela impliquerait que $\delta_{N+1}^{(N+1)}$ est d'ordre $\leqslant N$ ce qui est absurde. Donc T est d'ordre infini.

Exercice 5 (La valeur principale)**.** On rappelle la définition de la *valeur principale de* $\frac{1}{x}$:

$$\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) : \varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Rappeler l'argument montrant que $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ définit bien un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

   Soit $\psi : x \mapsto \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}$ définie sur $]0,+\infty[$. Il existe $M \geqslant 0$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-M, M]$. Pour tout $x > M$, $\psi(x) = 0$, donc ψ est bien intégrable sur $[\varepsilon, +\infty[$. Par ailleurs,

$$\psi(x) = \frac{1}{x}(\varphi(x) - \varphi(-x)) = \frac{1}{x}\big(\varphi(0) + x\varphi'(0) - \varphi(0) + x\varphi'(0) + o(x)\big) = 2\varphi'(0) + o(1).$$

   Donc ψ se prolonge continuement par $2\varphi'(0)$ en 0, et ψ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc, en utilisant le résultat de l'exercice 1,

$$\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{0}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

   Cela prouve que $\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle$ est bien défini. De plus cette expression est linéaire en φ.
   Soit $M \geqslant 0$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_{[-M,M]}(\mathbb{R})$ on a :

$$\left|\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle\right| = \left|\int_0^M\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^M\frac{|\varphi(x)-\varphi(-x)|}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Par le théorème des accroissements finis, $|\varphi(x)-\varphi(-x)| \leqslant 2x\|\varphi'\|_\infty$ pour tout $x \in [0, M]$. Donc
$$\left|\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle\right| \leqslant 2M\|\varphi'\|_\infty,$$
ce qui prouve que $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Déterminer l'ordre de la distribution $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.

   On vient de monter dans la question 1 que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_{[-M,M]}(\mathbb{R})$ on a :
$$\left|\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle\right| \leqslant 2M\|\varphi'\|_\infty,$$
   ce qui prouve que $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est d'ordre $\leqslant 1$. Si $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ était d'ordre 0, il existerait $C \geqslant 0$ tel que
$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle\right| \leqslant C\|\varphi\|_\infty$$
   pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ supportée dans $[-2, 2]$.

   Soit ψ une fonction $\mathcal{C}^\infty$, croissante, impaire et constante à 1 sur $[1, +\infty[$. Pour obtenir une telle fonction, on considère une primitive F d'une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ paire, positive et à support dans $[-1, 1]$ (bref une bosse). Alors $\psi = \frac{F-F(0)}{F(1)-F(0)}$ convient. Un choix possible d'un tel f est
$$f : x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction plateau (en particulier à valeurs dans $[0, 1]$) paire, à support dans $[-2, 2]$ et constante à 1 sur $[-1, 1]$. On pose $\psi_k : x \mapsto \psi(kx)\chi(x)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\psi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est impaire, positive sur $\mathbb{R}_+$, à support dans $[-2, 2]$ et bornée par 1. On a donc :
$$\begin{aligned} C \geqslant C\|\psi_k\|_\infty \geqslant \left|\int_0^{+\infty} \frac{\psi_k(x)-\psi_k(-x)}{x}\,\mathrm{d}x\right| = 2\int_0^{+\infty} \frac{\psi_k(x)}{x}\,\mathrm{d}x \geqslant 2\int_{\frac{1}{k}}^1 \frac{\psi(kx)}{x}\,\mathrm{d}x \\ \geqslant 2\int_1^k \frac{\psi(y)}{y}\,\mathrm{d}y = \int_1^k \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln(k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty. \end{aligned}$$
   C'est absurde. Donc $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est d'ordre 1 exactement.

3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, montrer que $\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, son support est un compact disjoint de $\{0\}$, donc il existe $\eta > 0$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}\backslash]-\eta, \eta[$. Pour tout $\varepsilon \in]0, \eta[$, on a :
$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{|x|\geqslant\eta} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$
   On obtient la formule voulu en passant à la limite $\varepsilon \to 0$ dans le terme de gauche.

4. La fonction $I : x \mapsto \frac{1}{x}$ définit une distribution $T_I \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$. Expliquer en quoi $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ peut être vu comme un prolongement de T_I en un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Un tel prolongement est-il unique ?

   La fonction I est continue donc L^1_{loc} sur $\mathbb{R}^*$ et donc $T_I \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$.

On a une inclusion $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$, obtenue en prolongeant les fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ par 0 en 0. Cette inclusion est continue, au sens où : si $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ alors cette convergence est aussi vraie dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et elle se restreint donc en une forme linéaire continue $T_{|\mathbb{R}^*}$ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$.

La question 3 montre que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, $\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \langle T_I , \varphi\rangle$. Donc $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)_{|\mathbb{R}^*} = T_I$. En ce sens $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ prolonge T_I en une distribution sur $\mathbb{R}$.

Un tel prolongement n'est pas unique : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$,

$$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + \delta_0 , \varphi \right\rangle = \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle + \langle \delta_0 , \varphi\rangle = \langle T_I , \varphi\rangle + \varphi(0) = \langle T_I , \varphi\rangle.$$

Donc $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + \delta_0$ est un autre prolongement de T_I à $\mathbb{R}$.

5. Existe-t-il un prolongement de T_I en une distribution sur $\mathbb{R}$ de la forme T_f avec $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$?

   On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ telle que $(T_f)_{|\mathbb{R}^*} = T_I$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, on a :

$$\langle T_f , \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^*} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^*} f_{|\mathbb{R}^*}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle T_{f_{|\mathbb{R}^*}} , \varphi\rangle.$$

   Donc $T_I = (T_f)_{|\mathbb{R}^*} = T_{(f_{|\mathbb{R}^*})}$. Or $f_{|\mathbb{R}^*} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^*)$, donc $f_{|\mathbb{R}^*} = I$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^*)$, par injectivité de $g \mapsto T_g$. Finalement $f_{|\mathbb{R}^*} = I$ presque partout sur $\mathbb{R}^*$, donc $f(x) = \frac{1}{x}$ presque partout sur $\mathbb{R}$. Cela contredit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Exercice 6 (Parties finies)**.** Notons H la *fonction de Heaviside*, qui est la fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+$. On considère les applications linéaires suivantes de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$, où pf se lit *partie finie*.

$$\begin{aligned}
\mathrm{pf}\left(\frac{H}{x}\right) &: \varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \varphi(0)\ln(\varepsilon),\\
\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) &: \varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathrm{pf}\left(\frac{H}{x}\right)$ et $\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ définissent des distributions sur $\mathbb{R}$.

   Ces deux applications sont bien linéaires en φ. Soit $M > 0$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}_{[-M,M]}(\mathbb{R})$. Pour tout $\varepsilon \in \,]0, M[$, on a $\int_\varepsilon^M \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(M) - \ln(\varepsilon)$, donc

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \varphi(0)\ln(\varepsilon) &= \int_{\varepsilon}^{M} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{\varepsilon}^{M} \frac{\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x + \varphi(0)\ln(M)\\
&= \int_{\varepsilon}^{M} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x + \varphi(0)\ln(M).
\end{aligned}$$

   Comme φ est continue et $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \varphi'(0)$, la fonction $x \mapsto \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ est intégrable sur $[0, M]$. Donc

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \varphi(0)\ln(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{0}^{M} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x + \varphi(0)\ln(M).$$

Donc $\langle \mathrm{pf}\left(\frac{H}{x}\right), \varphi\rangle$ est bien défini. Par l'inégalité des accroissements finis, $|\varphi(x)-\varphi(0)| \leqslant x\|\varphi'\|_\infty$ pour tout $x \in [0, M]$. Donc,

$$\left|\left\langle \mathrm{pf}\left(\frac{H}{x}\right), \varphi\right\rangle\right| \leqslant \int_0^M \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right| \mathrm{d}x + |\varphi(0)\ln(M)| \leqslant |\ln(M)|\|\varphi\|_\infty + M\|\varphi'\|_\infty,$$

ce qui montre que $\mathrm{pf}\left(\frac{H}{x}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et est d'ordre au plus 1.

Remarque. On peut traiter le cas de $\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ de même, en remplaçant l'inégalité des accroissements finis par l'inégalité de Taylor–Lagrange à l'ordre 2. On présente ci-dessous une méthode alternative utilisant le lemme de Hadamard (voir l'exercice 2). On aurait pu utiliser cette méthode alternative pour traiter le cas de $\mathrm{pf}\left(\frac{H}{x}\right)$ ou celui de $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ dans l'exercice 5.

Soit $M > 0$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}_{[-M,M]}(\mathbb{R})$. Par le lemme de Hadamard, il existe $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2\psi(x). \tag{ii}$$

Rappelons qu'en général $\psi \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et que

$$\|\psi\|_{\infty,[-M,M]} = N_{[-M,M],0}(\psi) \leqslant N_{[-M,M],2}(\varphi) \leqslant \|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty + \|\varphi''\|_\infty. \tag{iii}$$

Pour tout $\varepsilon \in \,]0, M[$, on a alors

$$\int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi(x)}{x^2} \mathrm{d}x = \int_{\varepsilon<|x|\leqslant M} \frac{\varphi(0)}{x^2} + \frac{\varphi'(0)}{x} + \psi(x)\,\mathrm{d}x = 2\varphi(0)\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{M}\right) + \int_{\varepsilon<|x|\leqslant M} \psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme ψ est continue donc intégrable sur $[-M, M]$, on a donc

$$\int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi(x)}{x^2} \mathrm{d}x - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} = -2\frac{\varphi(0)}{M} + \int_{\varepsilon<|x|\leqslant M} \psi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -2\frac{\varphi(0)}{M} + \int_{-M}^M \psi(x)\,\mathrm{d}x,$$

en utilisant l'exercice 1. Cela montre que $\langle \mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi\rangle$ est bien défini. De plus,

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi\right\rangle\right| &= \left|-2\frac{\varphi(0)}{M} + \int_{-M}^M \psi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{M}\|\varphi\|_\infty + 2M\|\psi\|_\infty \\ &\leqslant \left(\frac{2}{M} + 2M\right)\left(\|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty + \|\varphi''\|_\infty\right),\end{aligned}$$

et donc $\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et est d'ordre au plus 2.

2. Conjecturer puis démontrer des expressions plus simples des produits suivants dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

   (a) $x\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$, (b) $x\,\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, (c) $x^2\,\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, (d) $x\,\mathrm{pf}\left(\frac{H}{x}\right)$.

   Comme vu dans l'exercice 5, on veut penser à $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ comme une extension de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ en une distribution sur $\mathbb{R}$. N'étant pas L^1_{loc}, elle ne définit pas un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et on doit ruser pour définir $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. Néanmoins il est naturel de conjecturer que $x\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbf{1}$.

   Les distributions parties finies sont construites sur le même principe, en utilisant un procédé de renormalisation pour étendre des fonctions non localement L^1 en des distributions. On s'attend donc à avoir $x^2\,\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \mathbf{1}$ et $x\,\mathrm{pf}\left(\frac{H}{x}\right) = H$.

   Le cas 2b est un peu plus subtil. On voudrait penser à $x\,\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ comme à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, mais malheureusement celle-ci ne définit pas une distribution. Néanmoins on peut espérer que $x\,\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.

(a) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\left\langle x\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), x\varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{x\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle \mathbf{1}, \varphi\rangle.$$

Donc $x\,\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big) = \mathbf{1}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, comme conjecturé.

(b) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\left\langle x\,\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi\right\rangle = \left\langle \mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), x\varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle.$$

Donc $x\,\mathrm{pf}\big(\frac{1}{x^2}\big) = \mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$.

(c) D'après les deux cas précédents, $x^2\,\mathrm{pf}\big(\frac{1}{x^2}\big) = x\,\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big) = \mathbf{1}$.

(d) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\left\langle x\,\mathrm{pf}\left(\frac{H}{x}\right), \varphi\right\rangle = \left\langle \mathrm{pf}\left(\frac{H}{x}\right), x\varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle H, \varphi\rangle.$$

3. (*facultatif*) Montrer que l'application linéaire suivante définit bien une distribution sur $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{pf}\left(\frac{H}{x^2}\right) : \varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\ln(\varepsilon).$$

Déterminer des expressions plus simples des produits $x\,\mathrm{pf}\big(\frac{H}{x^2}\big)$ et $x^2\,\mathrm{pf}\big(\frac{H}{x^2}\big)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
De nouveau, l'expression est bien linéaire est φ. Soit $M > 0$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}_{[-M,M]}(\mathbb{R})$, on repart de l'expression (ii) donnée par le lemme de Hadamard. Pour tout $\varepsilon \in \,]0, M[$,

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\ln(\varepsilon) &= \int_{\varepsilon}^{M}\frac{\varphi(0)}{x^2} + \frac{\varphi'(0)}{x} + \psi(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\ln(\varepsilon)\\ &= \int_{\varepsilon}^{M}\psi(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varphi(0)}{M} + \varphi'(0)\ln(M)\\ &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^M\psi(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varphi(0)}{M} + \varphi'(0)\ln(M).\end{aligned}$$

Donc $\big\langle \mathrm{pf}\big(\frac{H}{x^2}\big), \varphi\big\rangle$ est bien défini et

$$\left|\left\langle \mathrm{pf}\left(\frac{H}{x^2}\right), \varphi\right\rangle\right| = \left|\int_0^M\psi(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varphi(0)}{M} + \varphi'(0)\ln(M)\right| \leqslant \frac{\|\varphi\|_\infty}{M} + |\ln(M)|\|\varphi'\|_\infty + M\|\psi\|_\infty.$$

En utilisant la majoration (iii), on obtient $\big|\big\langle \mathrm{pf}\big(\frac{H}{x^2}\big), \varphi\big\rangle\big| \leqslant \big(\frac{1}{M} + |\ln(M)| + M\big)\sum_{i=0}^2\|\varphi^{(i)}\|_\infty$.
Donc $\mathrm{pf}\big(\frac{H}{x^2}\big)$ définit bien une distribution qui est d'ordre au plus 2.
Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$$\left\langle x\,\mathrm{pf}\left(\frac{H}{x^2}\right), \varphi\right\rangle = \left\langle \mathrm{pf}\left(\frac{H}{x^2}\right), x\varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \varphi(0)\ln(\varepsilon) = \left\langle \mathrm{pf}\left(\frac{H}{x}\right), \varphi\right\rangle.$$

Donc $x\,\mathrm{pf}\big(\frac{H}{x^2}\big) = \mathrm{pf}\big(\frac{H}{x}\big)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et, par le cas 2d, $x^2\,\mathrm{pf}\big(\frac{H}{x^2}\big) = x\,\mathrm{pf}\big(\frac{H}{x}\big) = H$.

Exercice 7 (Calculs de dérivées). 1. Soit $f : x \mapsto \ln(|x|)$, calculer la dérivée de T_f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

On a bien $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction f est $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x}$. On s'attend donc à ce que $T_f' = \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. De fait, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T_f', \varphi\rangle = -\langle T_f, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \ln(|x|)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|} \ln(|x|)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Soient ε et M tels que $0 < \varepsilon < M$ et $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-M, M]$, alors

$$\int_{\varepsilon<|x|} \ln(|x|)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon<|x|\leqslant M} \ln(|x|)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-M}^{-\varepsilon} \ln(-x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{M} \ln(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

Comme ln et φ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, M]$ on peut intégrer par parties.

$$\int_{\varepsilon}^{M} \ln(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \big[\ln(x)\varphi(x)\big]_{\varepsilon}^{M} - \int_{\varepsilon}^{M} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\varphi(\varepsilon)\ln(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

De même,

$$\int_{-M}^{-\varepsilon} \ln(-x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \big[\ln(-x)\varphi(x)\big]_{-M}^{-\varepsilon} - \int_{-M}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \varphi(-\varepsilon)\ln(\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

donc

$$-\int_{\varepsilon<|x|} \ln(|x|)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \ln(\varepsilon)(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) = \int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + O(\varepsilon\ln(\varepsilon))$$
$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \left\langle \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle.$$

Donc $T_f' = \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ comme annoncé.

2. Calculer la dérivée de $\operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   En se basant sur ce qu'il se passe pour les fonctions, on peut espérer que $\operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right)' = -\operatorname{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Vérifions que c'est le cas. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\left\langle \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right)', \varphi\right\rangle = -\left\langle \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi'\right\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi'(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

   On intègre par parties sur $]-\infty, -\varepsilon]$ et $[\varepsilon, +\infty[$. C'est possible car φ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ y sont $\mathcal{C}^1$ et car φ est à support compact. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi'(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon}$$
$$= \int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0) + O(\varepsilon^2)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \left\langle \operatorname{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi\right\rangle.$$

   Finalement $\operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right)' = -\operatorname{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

3. Calculer la dérivée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la fonction $x \mapsto H(x)\ln(x)$, où H est la fonction de Heaviside.

   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle (H\ln)', \varphi\rangle = -\langle H\ln, \varphi'\rangle = -\int_0^{+\infty} \ln(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Par intégration par parties :

$$-\int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -[\ln(x)\varphi(x)]_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \ln(\varepsilon)\varphi(0) + O(\varepsilon\ln(\varepsilon)) + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \left\langle \mathrm{pf}\left(\frac{H}{x}\right), \varphi \right\rangle.$$

Donc $(H\ln)' = \mathrm{pf}\left(\frac{H}{x}\right)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer les dérivées successives dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de $x \mapsto \frac{x^n}{n!}H(x)$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note T_n la distribution associée à la fonction L^1_{loc} définie par $x \mapsto \frac{x^n}{n!}H(x)$.
   Pour $n = 0$, on a $T_0 = H$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle H', \varphi\rangle = -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle.$$

   Donc $T_0' = H' = \delta_0$, et donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $T_0^{(k)} = \delta_0^{(k-1)} : \varphi \mapsto (-1)^{k-1}\varphi^{(k-1)}(0)$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T_n', \varphi\rangle = -\langle T_n, \varphi'\rangle = -\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^n}{n!}\varphi(x)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \langle T_{n-1}, \varphi\rangle.$$

   Donc $T_n' = T_{n-1}$. Par récurrence, on en déduit que $T_n^{(k)} = T_{n-k}$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. En recollant ceci avec la formule obtenue pour les dérivées de T_0, on a pour tout n et $k \in \mathbb{N}$:

$$T_n^{(k)} = \begin{cases} T_{n-k} & \text{si } k \leqslant n, \\ T_0^{(k-n)} = \delta_0^{(k-n-1)} & \text{si } k \geqslant n+1. \end{cases}$$

Exercice 8 (Une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui n'est pas une distribution — *facultatif*)**.** Soit f la fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par

$$f : x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction plateau valant 1 sur $[-1, 1]$, supportée dans $[-2, 2]$ et positive, on note $\varphi = \psi f$. Soit $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ une fonction croissante, nulle sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$ et constante à 1 sur $[1, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi_n : x \mapsto \chi(nx)\varphi(x)$.

1. Comprendre ces fonctions sur un dessin, puis montrer que $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

   Indication. On pourra utiliser sans démonstration que : pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_k de degré $2k$ tel que $f^{(k)} : t \mapsto t^{-2k}P_k(t)f(t)$.

   Par construction, $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathrm{supp}(\psi) \cap \mathrm{supp}(f) \subset [0, 2]$. Donc $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subset \mathrm{supp}(\varphi) \subset [0, 2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Cela règle la question de l'uniformité du support.
   Soit $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \big(\chi(n\cdot)\big)^{(k-i)}(x)\varphi^{(i)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{k-i}\chi^{(k-i)}(nx)\varphi^{(i)}(x)$$

et donc

$$\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x) = (\chi(nx) - 1)\varphi^{(k)}(x) + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} n^{k-i} \chi^{(k-i)}(nx)\varphi^{(i)}(x). \tag{iv}$$

Comme φ et χ sont nulles sur $]-\infty, 0]$, cette expression s'annule pour $x \leqslant 0$. Par ailleurs χ est constante à 1 sur $[1, +\infty[$, donc si $x \geqslant \frac{1}{n}$, $\chi(nx) = 1$ et les $\chi^{(k-i)}(nx)$ s'annulent pour $0 \leqslant i \leqslant k-1$. Donc (iv) est nulle si $x \in \mathbb{R}\backslash]0, \frac{1}{n}[$.
Si $x \in [0, \frac{1}{n}]$ alors

$$\left|\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)\right| \leqslant |\chi(nx) - 1||\varphi^{(k)}(x)| + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} n^{k-i} |\chi^{(k-i)}(nx)||\varphi^{(i)}(x)|$$

donc

$$\left\|\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \|\varphi^{(k)}\|_{\infty,[0,\frac{1}{n}]} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} n^{k-i} \|\chi^{(k-i)}\|_\infty \|\varphi^{(i)}\|_{\infty,[0,\frac{1}{n}]} \tag{v}$$

Sur $[0, \frac{1}{n}] \subset [0,1]$, on a $\varphi = f$. Soit $i \in \{0, \ldots, k\}$, suivant l'indication, pour tout $x \in]0, \frac{1}{n}]$ on écrit

$$n^{k-i}|\varphi^{(i)}(x)| = n^{k-i}|f^{(i)}(x)| = n^{k-i}\frac{|P_i(x)|}{x^{2i}} f(x) \leqslant \frac{\|P_i\|_{\infty,[0,1]}}{x^{k+i}} f(x) = \|P_i\|_{\infty,[0,1]} x^{-k-i} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Comme $x^{-k-i}e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, on a également $\sup_{0 < x \leqslant \frac{1}{n}} x^{-k-i}e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Donc

$$n^{k-i}\|\varphi^{(i)}\|_{\infty,[0,\frac{1}{n}]} \leqslant \|P_i\|_{\infty,[0,1]} \sup_{0 < x \leqslant \frac{1}{n}} x^{-k-i}e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

En réinjectant ces relations dans l'inégalité (v), on obtient bien que $\|\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}\|_\infty \xrightarrow[n \to 0]{} 0$.

2. Le sous-espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ est-il fermé dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$?

   La fonction χ est nulle sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \leqslant \frac{1}{2n}$ on a donc $\chi(nx) = 0$ et $\varphi_n(x) = 0$. Comme par ailleurs, $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subset \mathrm{supp}(\varphi) \subset [0, 2]$, on a $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subset [\frac{1}{2n}, 2] \subset \mathbb{R}^*$. Donc $(\varphi_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, qui converge vers φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

   Remarque. Cette convergence n'a pas lieu dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ car la condition d'uniformité du support n'est pas satisfaite par la suite $(\varphi_n)_{n \geqslant 1}$.

   On raisonne par l'absurde. Si $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ était un sous-espace fermé de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ on aurait $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ et donc $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}^*$. Or, pour tout $x \in]0, 1]$, $\varphi(x) = f(x) > 0$, donc $]0, 1] \subset \mathrm{supp}(\varphi)$. Comme le support est fermé $0 \in \mathrm{supp}(\varphi)$, ce qui est la contradiction recherchée. Donc $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ n'est pas fermé dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Soit E un supplémentaire de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit T la forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^*) \oplus E$ définie par :

$$T : g \longmapsto \begin{cases} \sum_{k \geqslant 1} e^k g\left(\frac{1}{k}\right) & \text{si } g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*) \\ 0 & \text{si } g \in E. \end{cases}$$

3. Montrer que $\langle T\,, \varphi_n \rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [\frac{1}{n}, 1]$, on a $\chi(nx) = 1$ et $\psi(x) = 1$, donc $\varphi_n(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. Comme φ_n est à valeurs positives, on a :

$$\langle T\,, \varphi_n\rangle = \sum_{k\geqslant 1} e^k \varphi_n\left(\frac{1}{k}\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} e^k \varphi_n\left(\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} e^k e^{-k} = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

4. En déduire que T ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$.

   Par l'absurde, si T définissait une distribution on aurait :

$$\langle T\,, \varphi_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T\,, \varphi\rangle \in \mathbb{C}$$

   par continuité et la question 1. En particulier, $(\langle T\,, \varphi\rangle_n)_{n\geqslant 1}$ serait bornée, ce qui contredit le résultat de la question 3.