Université Paris-Saclay
2023 – 2024

Master Mathématiques et Applications
Distributions et Analyse de Fourier

Chargés de TD : Blanche Buet et Thomas Letendre.

Feuille 1 – Convolution

Notations.

- Soit (X,μ) un espace mesuré. Pour tout $p \in [1,+\infty]$, on munit $L^p(X,\mu)$ de sa norme d'espace de Banach $\|\cdot\|_p$ définie pour $f \in L^p(X,\mu)$ par :

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p < +\infty, \\ \inf\left\{M \geqslant 0 \mid |f(x)| \leqslant M \text{ pour presque tout } x \in X\right\} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

- Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, le *support* d'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$, noté $\operatorname{supp}(f)$, est l'adhérence de $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$ dans Ω.
- Pour tout $k \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$, on note $\mathcal{C}_c^k(\Omega)$ l'espace des fonctions de Ω dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^k$ à support compact. On note aussi $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.
- Soit $p \in [1,+\infty]$, on dit que $f \in L^p(\Omega)$ est *à support compact* s'il existe un compact $S \subset \Omega$ en dehors duquel f est nulle presque partout, i.e. si f admet un représentant à support compact.
- Pour tout $A \subset \Omega$, on note $\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0,1\}$ la fonction indicatrice de A.
- Soit $p \in [1,+\infty]$, on note $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$, modulo égalité presque partout, telles que $\mathbf{1}_K f \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.
- Pour tout $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, on note $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ sa *longueur* et $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}$.

Exercice 1 (Continuité des translations dans L^p pour $p < +\infty$)**.** Soit $p \in [1,+\infty[$, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ on définit l'opérateur de translation $\tau_a : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ par $\tau_a(f) : x \mapsto f(x-a)$. Le but de l'exercice est de prouver que, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\tau_a(f) - f\|_p \xrightarrow[a\to 0]{} 0. \tag{1}$$

1. Montrer que (1) est vrai lorsque $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$.

   Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ et soit $R > 0$ tel que $\operatorname{supp}(f) \subset B(0,R)$ la boule de centre 0 et de rayon R. Soit $a \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|a\| < 1$, alors $\tau_a(f)$ est à support dans $B(0,R+1)$. On a alors :

$$\|\tau_a(f) - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |\tau_a(f)(x) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_{B(0,R+1)} |f(x-a) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x.$$

   Comme $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ elle est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta \in]0,1[$ tel que pour tout $a \in B(0,\delta)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, $|f(x-a) - f(x)| < \varepsilon$. Donc, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|a\| \leqslant \delta$:

$$\|\tau_a(f) - f\|_p \leqslant \varepsilon \operatorname{Vol}(B(0,R+1))^{\frac{1}{p}}.$$

2. Conclure grâce à la densité de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

   Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ et $a \in \mathbb{R}^d$. On a :

$$\|\tau_a(f) - f\|_p \leqslant \|\tau_a(f) - \tau_a(g)\|_p + \|\tau_a(g) - g\|_p + \|g - f\|_p = 2\|f - g\|_p + \|\tau_a(g) - g\|_p.$$

   Soit $\varepsilon > 0$, par densité de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ dans $\left(L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p\right)$ il existe $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ tel que $\|f - g\|_p < \varepsilon$. D'après la question 1, il existe $\delta > 0$ tel que $\|\tau_a(g) - g\|_p < \varepsilon$ dès que $\|a\| < \delta$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|a\| < \delta$ on a donc $\|\tau_a(f) - f\| < 3\varepsilon$, ce qui établit (1).

Définition (Convolution)**.** Soient f et g deux fonctions mesurables de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Si $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est L^1, on note $f * g(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$. Un changement de variable montre qu'alors $g * f(x)$ est bien défini et égal à $f * g(x)$. La fonction $f * g$ est appelée la *convolée* de f et g.

Exercice 2 (Support d'une convolée)**.** Soient A et $B \subset \mathbb{R}^d$, on note $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

1. Si $A \subset \mathbb{R}^d$ est compact et $B \subset \mathbb{R}^d$ est fermé, montrer que $A + B$ est fermé. Est-ce encore vrai si on suppose seulement A et B fermés ?

   Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de points de $A + B$ qui converge dans $\mathbb{R}^d$ vers un certain x. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in A$ et $b_n \in B$ tels que $x_n = a_n + b_n$. Par compacité de A, on peut extraire de (a_n) une sous-suite $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ qui converge vers $a \in A$. Alors

$$b_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x - a = b.$$

   Comme B est fermé, on a $b \in B$. Donc $x = a + b \in A + B$. Donc $A + B$ est fermé.

   Si on suppose seulement A et B fermés, le résultat est faux en général. Par exemple, pour $A = \mathbb{Z}$ et $B = \sqrt{2}\mathbb{Z}$ qui sont fermés dans $\mathbb{R}$, on a que $A + B = \mathbb{Z} \oplus \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$), et $A + B \neq \mathbb{R}$ (car $A + B$ est dénombrable).

2. Soient f et g deux fonctions continues telles que $f * g$ soit bien définie sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que si $x \notin \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$ alors $f * g(x) = 0$.

   Notons $A = \operatorname{supp}(f)$ et $B = \operatorname{supp}(g)$. Soit $x \notin A + B$, comme f est nulle hors de A et g est nulle hors de B on a :

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_B f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\{x\}-B} f(z)g(x-z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{(\{x\}-B)\cap A} f(z)g(x-z)\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

   Si on avait $(\{x\} - B) \cap A \neq \emptyset$, il existerait $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x - b = a$, i.e. $x = a + b \in A + B$ ce qui est absurde. Donc $(\{x\} - B) \cap A = \emptyset$ et $f * g(x) = 0$.

3. Si de plus f ou g est à support compact, montrer que $\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$.

   Sans hypothèse sur les supports, la contraposée de la question 2 montre que si $f * g(x) \neq 0$ alors $x \in A + B$. Donc $\left\{x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; f * g(x) \neq 0\right\} \subset A + B$. En prenant l'adhérence, il vient :

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{A + B}.$$

   Supposons maintenant que f ou g est à support compact. Par symétrie, on peut supposer A compact. Comme B est fermé par définition, la question 1 montre que $A + B$ est fermé, donc égal à son adhérence. Donc $\operatorname{supp}(f * g) \subset A + B$ comme voulu.

Exercice 3 (Convolution et dérivation). 1. Soient $f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, montrer que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\frac{\partial}{\partial x_i}(f*g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g$ pour tout $i \in [\![1,d]\!] = \{1,\dots,d\}$.

Comme $f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a $f(x-\cdot)g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Donc $f*g$ est bien définie sur $\mathbb{R}^d$. De même, pour tout $i \in [\![1,d]\!]$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}^d$. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètres à $h : (x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $h(x,\cdot)$ est L^1 car produit d'une fonction L^∞ et d'une fonction L^1.
- Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $h(\cdot,y)$ est $\mathcal{C}^1$ et $\frac{\partial}{\partial x_i}h(\cdot,y) : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)g(y)$.
- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x_i}(x,y)\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)\right||g(y)| \leqslant \left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_\infty |g(y)|. \tag{i}$$

  Donc $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ est dominée uniformément en x par une fonction intégrable par rapport à y.

Donc $f*g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} h(x,y)\,\mathrm{d}y$ admet une dérivée partielle par rapport à x_i donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f*g) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial h}{\partial x_i}(\cdot,y)\,\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g.$$

Le théorème de continuité des intégrales à paramètres et la domination (i) montrent de plus que cette application est continue sur $\mathbb{R}^d$. On en conclut que $f*g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$.

2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Il suffit de vérifier le résultat sur tout ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un tel ouvert borné. Soit $x \in \Omega$, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ on a

$$f(x-y) \neq 0 \implies \exists z \in \mathrm{supp}(f), z = x-y \implies y = x - z \in \overline{\Omega} - \mathrm{supp}(f).$$

Donc, par contraposée, $f(x-\cdot)$ est nulle hors de $K = \overline{\Omega} - \mathrm{supp}(f)$. Donc

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_K f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = f*(\mathbf{1}_K g)(x).$$

Ainsi, en restriction à Ω, on $f*g = f*(\mathbf{1}_K g)$. Le même raisonnement prouve que, pour tout $i \in [\![1,d]\!]$, on a $\frac{\partial f}{\partial x_i} * g = \frac{\partial f}{\partial x_i} * (\mathbf{1}_k g)$ sur Ω.

L'ensemble K est compact comme image du compact $\overline{\Omega} \times \mathrm{supp}(f)$ par l'application continue $(a,b) \mapsto a-b$. Si $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ on a donc $\mathbf{1}_K g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. D'après la question 1, la convolée $f*(\mathbf{1}_K g)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^d$, en particulier sur Ω. Donc $f*g$ est $\mathcal{C}^1$ sur Ω. De plus, sur Ω,

$$\forall i \in [\![1,d]\!], \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(f*g) = \frac{\partial}{\partial x_i}\big(f*(\mathbf{1}_K g)\big) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * (\mathbf{1}_K g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g. \tag{ii}$$

3. Soient $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $f*g$ est $\mathcal{C}^\infty$ et expliciter ses dérivées partielles.

On va montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que si $f \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^d)$ alors $f*g$ est $\mathcal{C}^k$ et ses dérivées partielles sont données par : $\partial^\alpha(f*g) = \partial^\alpha f * g$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ de longueur $|\alpha| \leqslant k$.

L'initialisation a été traitée dans la question 2. Supposons le résultat vrai pour $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{C}_c^{k+1}(\mathbb{R}^d)$. D'après la question 2, la fonction $f*g$ est $\mathcal{C}^1$ et ses dérivées partielles sont données par la formule (ii). Pour tout $i \in [\![1,d]\!]$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^d)$. Par hypothèse de récurrence, les $\frac{\partial f}{\partial x_i} * g$ sont $\mathcal{C}^k$ et $\partial^\beta\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} * g\right) = \partial^\beta\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) * g$ pour tout β de longueur au plus k.

La formule pour les dérivées partielles est vraie si $|\alpha| \in \{0,1\}$. Soit α tel que $2 \leqslant |\alpha| \leqslant k+1$, il existe $i \in [\![1,d]\!]$ et β tels que $1 \leqslant |\beta| \leqslant k$ et $\partial^\alpha = \partial^\beta \frac{\partial}{\partial x_i}$. On a alors :

$$\partial^\alpha(f * g) = \partial^\beta \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} * g \right) = \partial^\beta \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) * g = \partial^\alpha f * g.$$

Donc f admet des dérivées partielles continue jusqu'à l'ordre $k+1$ qui sont données par la formule attendue. En particulier f est donc $\mathcal{C}^{k+1}$, ce qui conclut la récurrence.

Exercice 4 (Convolution par des indicatrices d'intervalles)**.** 1. Soient $a < b$ et $c < d$, montrer que $\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathbf{1}_{[c,d]}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et l'expliciter.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbf{1}_{[a,b]}(x-y)\mathbf{1}_{[c,d]}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leqslant x-y \leqslant b \text{ et } c \leqslant y \leqslant d, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus,

$$\begin{cases} a \leqslant x-y \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{cases} \iff \begin{cases} x-b \leqslant y \leqslant x-a \\ c \leqslant y \leqslant d \end{cases} \iff y \in [x-b, x-a] \cap [c,d]$$

de sorte que $\mathbf{1}_{[a,b]}(x-\cdot)\mathbf{1}_{[c,d]} = \mathbf{1}_{[x-b,x-a]\cap[c,d]} \in L^1(\mathbb{R})$. Donc $\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathbf{1}_{[c,d]}$ est définie sur $\mathbb{R}$, et

$$\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathbf{1}_{[c,d]} : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[x-b,x-a]\cap[c,d]}(y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{Long}\big([x-b,x-a] \cap [c,d]\big).$$

Sans perte de généralité on peut supposer que $b - a \leqslant d - c$, par commutativité de $*$.

- Si $x \leqslant a+c$, alors $x-a \leqslant c$ et $[x-b, x-a] \cap [c,d] = \emptyset$. Donc $\mathrm{Long}\big([x-b,x-a] \cap [c,d]\big) = 0$.
- Si $a+c \leqslant x \leqslant b+c$, alors $x-b \leqslant c \leqslant x-a$. Comme $b-a \leqslant d-c$, on a aussi $x-a \leqslant d$. Donc $[x-b,x-a] \cap [c,d] = [c, x-a]$ et $\mathrm{Long}\big([x-b,x-a] \cap [c,d]\big) = x-a-c$.
- Si $b+c \leqslant x \leqslant a+d$, alors $c \leqslant x-b \leqslant x-a \leqslant d$ et $[x-b,x-a] \cap [c,d] = [x-b,x-a]$ est de longueur $b-a$.
- Si $a+d \leqslant x \leqslant b+d$, alors $c \leqslant x-b \leqslant d \leqslant x-a$ et $\mathrm{Long}\big([x-b,x-a] \cap [c,d]\big) = b+d-x$.
- Si $x \geqslant b+d$ alors $d \leqslant x-b$ et donc $\mathrm{Long}\big([x-b,x-a] \cap [c,d]\big) = 0$.

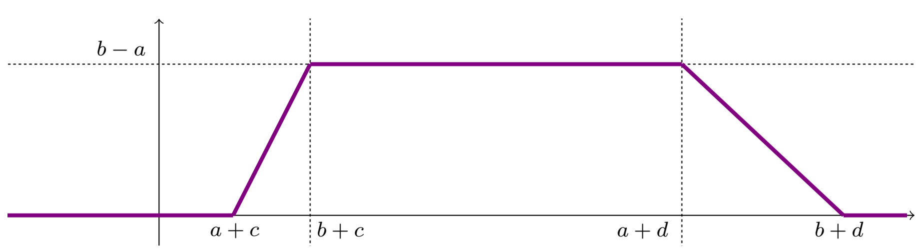

FIGURE 1 – Graphe de $\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathbf{1}_{[c,d]}$, qui est continue et affine par morceaux.

2. Soient $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, montrer que $\mathbf{1}_{[a,b]} * f$ est bien définie. Vérifier que $\mathbf{1}_{[a,b]} * f \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$ et calculer sa dérivée.

Soient x et $y \in \mathbb{R}$, on a $\mathbf{1}_{[a,b]}(x-y)f(y) = 0$ si $x - y \notin [a,b]$, i.e. si $y \notin [x-b, x-a]$. Comme f est $\mathcal{C}^0$ sur $[x-b, x-a]$ elle y est bornée, et $\mathbf{1}_{[a,b]}(x-\cdot)f$ aussi. Donc $\mathbf{1}_{[a,b]} * f(x)$ est bien défini.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbf{1}_{[a,b]} * f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[a,b]}(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{x-b}^{x-a} f(y) = F(x-a) - F(x-b),$$

où $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est n'importe quelle primitive de f, par exemple $F : z \mapsto \int_0^z f(y)\,\mathrm{d}y$. Comme $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, ses primitives sont $\mathcal{C}^{k+1}$, et donc $\mathbf{1}_{[a,b]} * f$ également. Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big(\mathbf{1}_{[a,b]} * f\big)'(x) = F'(x-a) - F'(x-b) = f(x-a) - f(x-b).$$

Exercice 5 (Inégalité de Hölder généralisée)**.** Soit (X, μ) un espace mesuré. On rappelle l'*inégalité de Hölder* classique : soient $f \in L^p(X, \mu)$ et $g \in L^q(X, \mu)$, où p et $q \in [1, +\infty]$ sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $fg \in L^1(X, \mu)$, et de plus $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

1. Soient p, q et $r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Montrer que pour tout $f \in L^p(X, \mu)$ et $g \in L^q(X, \mu)$ on a $fg \in L^r(X, \mu)$ et $\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.
   Commençons par supposer que $r < +\infty$ et posons $p' = \frac{p}{r}$ et $q' = \frac{q}{r}$, de sorte que $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$. Soient $f \in L^p(X, \mu)$ et $g \in L^q(X, \mu)$, on a $f^r \in L^{p'}(X, \mu)$, et de même $g^r \in L^{q'}(X, \mu)$. D'après le résultat classique on a donc $(fg)^r \in L^1(X, \mu)$, i.e. $fg \in L^r(X, \mu)$, et :

   $$\|fg\|_r^r = \int_X |f(x)|^r |g(x)|^r \,\mathrm{d}\mu(x) \leqslant \|f^r\|_{p'} \|g^r\|_{q'}.$$

   Si $p < +\infty$ alors $p' < +\infty$ et :

   $$\|f^r\|_{p'} = \left(\int_X |f(x)|^{rp'} \,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_X |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{r}{p}} = \|f\|_p^r.$$

   Si $p = +\infty$ alors $p' = +\infty$, et on a aussi $\|f^r\|_{p'} = \|f\|_p^r$. De même $\|g^r\|_{q'} = \|g\|_q^r$. Finalement on a bien $\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.
   Si maintenant $r = +\infty$ alors on a nécessairement $p = +\infty = q$. Dans ce cas, fg est bien essentiellement bornée et $\|fg\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$, ce qui conclut la preuve.
2. Dans cette question on suppose $\mu(X) < \infty$. Montrer que si $r \leqslant q$ alors $L^q(X, \mu) \subset L^r(X, \mu)$ et que cette inclusion est continue. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
   Sans perte de généralité on peut supposer $1 \leqslant r < q \leqslant +\infty$. On a donc $0 < \frac{1}{r} - \frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{r} \leqslant 1$ et il existe $p \in [1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} - \frac{1}{q}$. Comme $\mu(X) < +\infty$, on a $\mathbf{1}_X \in L^p(X, \mu)$.
   Soit $f \in L^q(X, \mu)$, en appliquant l'inégalité de Hölder généralisée de la question 1 à $\mathbf{1}_X$ et f on obtient que $f \in L^r(X, \mu)$, et même que $\|f\|_r \leqslant \|\mathbf{1}_X\|_p \|f\|_q = \mu(X)^{\frac{1}{p}} \|f\|_q$. Cela montre que l'application linéaire $f \mapsto f$ de $L^q(X)$ dans $L^r(X)$ est bien définie et continue.
   L'inclusion réciproque est fausse en général, par exemple la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est dans $L^1([0,1])$ mais pas dans $L^2([0,1])$.
3. Donner un contre-exemple à l'inclusion de la question 2 lorsque $\mu(X) = +\infty$.
   La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dans $L^2([1, +\infty[)$ mais pas dans $L^1([1, +\infty[)$.
4. Déduire de la question 2 que, pour tout $p \in [1, +\infty]$, $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.
   Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact, il est de mesure finie pour la mesure de Lebesgue. D'après la question 2, il existe $C \geqslant 0$ tel que :

   $$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{1}_K(x) f(x)| \,\mathrm{d}x = \int_K |f(x)| \,\mathrm{d}x = \|f_{|K}\|_{L^1(K)} \leqslant C \|f_{|K}\|_{L^p(K)} = C \|\mathbf{1}_K f\|_p < +\infty.$$

   Donc $\mathbf{1}_K f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout compact K. Donc $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Le résultat suivant donne un critère assurant que la convolée de deux fonctions f et g est bien définie presque partout sur $\mathbb{R}^d$. Il donne aussi un contrôle sur les normes L^p de $f*g$. On en prouve plusieurs cas particuliers dans l'exercice 6. Le cas général fait l'objet de l'exercice facultatif 8.

Théorème 1 (Inégalité de Young)**.** *Soient p, q et $r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.*

Exercice 6 (Inégalité de Young, cas particuliers)**.**

1. Prouver le théorème 1 pour $p = q = r = 1$.
   Soient f et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Par le théorème de Fubini–Tonelli :
   $$\int_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{y\in\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{y\in\mathbb{R}^d}|g(y)|\int_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \|f\|_1\|g\|_1 < +\infty. \tag{iii}$$
   La fonction $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Par le théorème de Fubini, $f * g$ est donc bien définie presque partout sur $\mathbb{R}^d$ et intégrable. Enfin, par l'équation (iii),
   $$\|f*g\|_1 = \int_{x\in\mathbb{R}^d}|f*g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{y\in\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_1\|g\|_1.$$

2. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ à support compact et $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $f * g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.
   Soit $C \subset \mathbb{R}^d$ un compact, on veut montrer que $\mathbf{1}_C(f * g) \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Soient $S \subset \mathbb{R}^d$ un compact en dehors duquel f est nulle presque partout et $K = C - S$, qui est aussi compact. En raisonnant comme à la question 2 de l'exercice 3, on va montrer que $f * g$ et $f * (\mathbf{1}_K g)$ coïncident sur C. Ensuite, comme $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, on a $\mathbf{1}_K g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. D'après la question 1, on a alors $f * (\mathbf{1}_K g) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et donc $\mathbf{1}_C(f * g) = \mathbf{1}_C(f * (\mathbf{1}_K g)) \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
   Soit $x \in C$, la bonne définition et la valeur de $f * g(x)$ ne dépendent que de la classe de f dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Comme f est nulle presque partout hors de S, on peut supposer que f est nulle hors de S sans perte de généralité. Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ on a alors
   $$f(x-y) \neq 0 \implies \exists z \in S, z = x - y \implies \exists z \in S, y = x - z \in C - S = K$$
   Donc $f(x - \cdot)$ est nulle hors de K et $f * g(x) = \int_K f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = f * (\mathbf{1}_K g)(x)$.

3. Soient f, g et $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$, montrer que $f * (g * h) = (f * g) * h$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.
   D'après la question 1, $f * (g * h)$ est bien définie presque partout. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on a :
   $$f*(g*h)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)(g*h(y))\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y-z)h(z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y. \tag{iv}$$
   Comme dans la question 1, par Fubini–Tonelli on a :
   $$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y-z)||h(z)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d}|h(z)|\int_{\mathbb{R}^d}|g(y-z)|\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \|f\|_1\|g\|_1\|h\|_1 < +\infty.\end{aligned}$$
   Donc, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,
   $$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y-z)||h(z)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z < +\infty$$

On suppose dorénavant qu'on a choisit un tel x. On peut alors appliquer le théorème de Fubini pour échanger les intégrales dans le terme de droite de (iv). À l'aide du changement de variable $y = z + t$, on obtient alors :

$$f * (g * h)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y-z) \, \mathrm{d}y \right) h(z) \, \mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-z-t) g(t) \, \mathrm{d}t \right) h(z) \, \mathrm{d}z$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} (f * g(x-z)) h(z) \, \mathrm{d}z = (f * g) * h(x).$$

Cette égalité étant valable presque partout, on a bien $f * (g * h) = (f * g) * h$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

4. Prouver le théorème 1 lorsque $r = +\infty$. Montrer que $f * g$ est alors uniformément continue.

Comme $r = +\infty$, on a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on a $f(x - \cdot) \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|f(x-\cdot)\|_p = \|f\|_p$. Par Hölder, $f * g(x)$ est bien défini et :

$$|f * g(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)| \, \mathrm{d}y \leqslant \|f(x-\cdot)\|_p \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q.$$

Finalement, $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$, comme attendu.

En terme des opérateurs de translation introduits dans l'exercice 1, l'uniforme continuité de $f * g$ signifie que $\left\|\tau_a(f * g) - f * g\right\|_\infty \xrightarrow[a \to 0]{} 0$. C'est cette propriété qu'on va prouver. Pour tout x et $a \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$|\tau_a(f * g)(x) - f * g(x)| = |f * g(x-a) - f * g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \big(f(x-a-y) - f(x-y)\big) g(y) \, \mathrm{d}y \right|$$
$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \left|\big(\tau_a(f) - f\big)(x-y)\right| |g(y)| \, \mathrm{d}y \leqslant \|\tau_a(f) - f\|_p \|g\|_q,$$

où on a utilisé l'inégalité de Hölder et le fait que $(\tau_a(f) - f)(x - \cdot)$ est dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et de même norme que $\tau_a(f) - f$. On obtient que $\left\|\tau_a(f * g) - f * g\right\|_\infty \leqslant \|\tau_a(f) - f\|_p \|g\|_q$.

Quitte à échanger les rôles de f et g dans l'inégalité précédente (ce qui est possible car $*$ est commutative), on peut supposer que $p < +\infty$. Alors, par la continuité des translations dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ prouvée dans l'exercice 1, on a :

$$\left\|\tau_a(f * g) - f * g\right\|_\infty \leqslant \|\tau_a(f) - f\|_p \|g\|_q \xrightarrow[a \to 0]{} 0$$

5. Prouver le théorème 1 lorsque $q = 1$.

Indication. Écrire $|f * g(x)| \leqslant |f| * |g|(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|^{\frac{p-1}{p}} \, \mathrm{d}y$ et utiliser Hölder.

Comme $q = 1$ on a $r = p$ et il s'agit de montrer que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1$. Les cas $p = 1$ et $p = +\infty$ ont été traités dans les questions 1 et 4 respectivement. On peut donc supposer que $p \in \,]1, +\infty[$. Notons $p' = \frac{p}{p-1}$, de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}^d$, suivant l'indication on écrit :

$$|f * g(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|^{\frac{1}{p'}} \, \mathrm{d}y. \tag{v}$$

Comme $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on a $|g|^{\frac{1}{p'}} \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs $|f|^p \in L^1(\mathbb{R}^d)$ donc $|f|^p * |g|(x) < +\infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, d'après 1. Pour un tel x on a $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p |g(y)| \,\mathrm{d}y < +\infty$, c'est-à-dire $|f(x-\cdot)||g|^{\frac{1}{p}} \in L^p(\mathbb{R}^d)$. En appliquant l'inégalité de Hölder dans l'équation (v) :

$$|f * g(x)| \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p |g(y)| \,\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \|g\|_1^{\frac{1}{p'}}.$$

Cette inégalité étant valable presque partout, par Fubini–Tonelli :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f * g(x)|^p \,\mathrm{d}x \leqslant \|g\|_1^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} |f(x-y)|^p |g(y)| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \|g\|_1^{p-1} \|f\|_p^p \|g\|_1 = \|f\|_p^p \|g\|_1^p < +\infty.$$

Donc $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1$, comme attendu.

Exercice 7 (Régularisation par convolution)**.** Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on définit $\varphi_\varepsilon : x \mapsto \frac{1}{\varepsilon^d} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \big(\tau_{\varepsilon y} f(x) - f(x) \big) \,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

Soit $\varepsilon > 0$, observons d'abord que φ_ε est intégrable et définie de sorte que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(z) \,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \frac{\mathrm{d}z}{\varepsilon^d} = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \,\mathrm{d}y = 1.$$

D'après la question 1 de l'exercice 6, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_\varepsilon * f(x)$ est bien définie et :

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x) &= f * \varphi_\varepsilon(x) - \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(z) \,\mathrm{d}z \right) f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(z) \big(f(x-z) - f(x) \big) \,\mathrm{d}z \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \big(\tau_z f(x) - f(x) \big) \frac{\mathrm{d}z}{\varepsilon^d} = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \big(\tau_{\varepsilon y} f(x) - f(x) \big) \,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

2. En déduire que $\varphi_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

D'après la question 1 de l'exercice 6 on a bien $\varphi_\varepsilon * f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On calcule :

$$\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \big(\tau_{\varepsilon y} f(x) - f(x) \big) \,\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(y)| \big| \tau_{\varepsilon y} f(x) - f(x) \big| \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$$

On peut échanger les intégrales par Fubini–Tonelli, donc :

$$\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_1 \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(y)| \int_{\mathbb{R}^d} \big| \tau_{\varepsilon y} f(x) - f(x) \big| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(y)| \big\| \tau_{\varepsilon y} f - f \big\|_1 \,\mathrm{d}y.$$

On a $\big\| \tau_{\varepsilon y} f - f \big\|_1 \leqslant \|\tau_{\varepsilon y} f\|_1 + \|f\|_1 \leqslant 2\|f\|_1$, donc l'intégrande dans le terme de droite est dominé par la fonction intégrable $2\|f\|_1 |\varphi|$, indépendamment de ε. D'après l'exercice 1, cet intégrande converge simplement vers 0 quand $\varepsilon \to 0$. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a donc $\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_1 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

Remarque. Ce résultat apparait de façon cruciale dans la preuve de la formule d'inversion de Fourier pour les fonction L^1 dont la transformée de Fourier est L^1, avec φ égale à la gaussienne standard.

Dans la suite de cet exercice, on suppose que φ est à support compact et on note $S \subset \mathbb{R}^d$ un compact en dehors duquel φ est nulle presque partout.

3. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, montrer que la formule (2) est toujours valable pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.

   Soit $\varepsilon > 0$, pour presque tout $x \notin \varepsilon S$ on a $\frac{x}{\varepsilon} \notin S$ et donc $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\varphi\big(\frac{x}{\varepsilon}\big) = 0$. Donc φ_ε est nulle presque partout hors de εS. En particulier φ_ε est à support compact et $\varphi_\varepsilon * f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ d'après l'exercice 6 question 2.

   Le calcul effectué à la question 1 est toujours valable dans ce contexte, les intégrales étant bien définies grâce à la compacité de S. Ceci établit la validité de (2) presque partout sur $\mathbb{R}^d$.

4. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction uniformément continue, montrer que $\varphi_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ uniformément.

   Comme f est uniformément continue elle est bornée sur tout compact et $f \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Par l'exercice 5 question 4 on a $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ donc on peut appliquer la formule (2). Soit $R > 0$ tel que la boule fermée $B(0, R)$ de centre 0 et de rayon R contienne S, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a alors :

$$|\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x)| \leqslant \int_S |\varphi(y)| \big|\tau_{\varepsilon y} f(x) - f(x)\big| \,\mathrm{d}y \leqslant \sup_{\|y\| \leqslant R} \big\|\tau_{\varepsilon y} f - f\big\|_\infty \int_S |\varphi(y)| \,\mathrm{d}y$$

   et donc

$$\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_1 \sup_{\|z\| \leqslant \varepsilon R} \big\|\tau_z f - f\big\|_\infty.$$

   Comme f est uniformément continue, on a $\big\|\tau_z f - f\big\|_\infty \xrightarrow[z \to 0]{} 0$. Donc le sup tend vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$ dans l'inégalité précédente. On a donc bien $\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_\infty \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

5. Soient $p \in [1, +\infty[$ et q son exposant conjugué. On suppose que $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\varphi_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Le résultat reste-t-il vrai pour $p = +\infty$?

   Comme S est compact, $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^d)$ implique $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$. En effet $\varphi_{|S} \in L^q(S) \subset L^1(S)$ d'après l'exercice 5 question 2 et φ est nulle presque partout hors de S.
   Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, par l'exercice 5 question 4, on a $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. On peut donc utiliser la formule (2). Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\big|\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x)\big| \leqslant \int_S |\varphi(x)| \big|\tau_{\varepsilon y} f(x) - f(x)\big| \,\mathrm{d}y \leqslant \|\varphi\|_q \left(\int_S \big|\tau_{\varepsilon y} f(x) - f(x)\big|^p \,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}},$$

   où on a appliqué l'inégalité de Hölder sur S. C'est licite car $y \mapsto f(x) \in L^\infty(S) \subset L^p(S)$ et $y \mapsto f(x - \varepsilon y)$ est L^p sur $\mathbb{R}^d$ donc sur S. Donc $y \mapsto \tau_{\varepsilon y} f(x) - f(x)$ est dans $L^p(S)$. En élevant cette inégalité à la puissance p et en intégrant, on obtient :

$$\big\|\varphi_\varepsilon * f - f\big\|_p^p \leqslant \|\varphi\|_q^p \int_{\mathbb{R}^d} \int_S \big|\tau_{\varepsilon y} f(x) - f(x)\big|^p \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \|\varphi\|_q^p \int_S \big\|\tau_{\varepsilon y} f - f\big\|_p^p \,\mathrm{d}y$$

   par Fubini–Tonelli. D'après l'exercice 1, l'intégrande dans le terme de droite converge simplement vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$. Par ailleurs $\big\|\tau_{\varepsilon y} f - f\big\|_p^p \leqslant 2^p \|f\|_p^p$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $y \in S$. Comme S est compact, ceci fournit une domination par une fonction intégrable et on peut appliquer le théorème de convergence dominée. Finalement $\big\|\varphi_\varepsilon * f - f\big\|_p \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

   Si $p = +\infty$ la preuve s'effondre car on n'a pas la continuité des translations dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. En fait le résultat est faux dans ce cas. Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors $\varphi_\varepsilon * f$ est continue d'après la question 4 de l'exercice 6. Si on a $\varphi_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors f est continue comme limite uniforme de fonctions continues. Cette convergence n'a donc pas lieu pour les fonctions non continues dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

6. En déduire que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ lorsque $p \in [1, +\infty[$.
   Soit $p \in [1, +\infty[$. Comme $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\big(L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p\big)$, il suffit de montrer que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\big(\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p\big)$.
   Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi = 1$. En particulier $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^d)$, où q est l'exposant conjugué de p, donc $\varphi_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\|\cdot\|_p} f$ d'après la question 5. Pour conclure, il s'agit de vérifier que $\varphi_\varepsilon * f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\varepsilon > 0$.
   Soit $\varepsilon > 0$, on a $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, donc $\varphi_\varepsilon * f$ est $\mathcal{C}^\infty$ par la question 3 de l'exercice 3. Comme dans la question 3 on a $\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset \varepsilon \operatorname{supp}(\varphi)$. D'après la question 3 de l'exercice 2, on a :
$$\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon * f) \subset \operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) + \operatorname{supp}(f) \subset \varepsilon \operatorname{supp}(\varphi) + \operatorname{supp}(f).$$
   Comme $\varepsilon \operatorname{supp}(\varphi) + \operatorname{supp}(f)$ est compact, on a bien $\varphi_\varepsilon * f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, ce qui conclut la preuve.

Exercice 8 (Inégalité de Young, cas général — *facultatif*). 1. Établir l'*inégalité de Hölder à n termes* : soient $p_1, \dots, p_n \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$, soient $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^d)$, alors $f_1 \cdots f_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\|f_1 \cdots f_n\|_1 \leqslant \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}$.
   On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, le cas $n = 1$ étant trivial. Supposons le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $p_1, \dots, p_{n+1} \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_{n+1}} = 1$ et soient $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $j \in \{1, \dots, n+1\}$. On note $q = \frac{p_{n+1}}{p_{n+1} - 1}$, de sorte que : $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1 - \frac{1}{p_{n+1}} = \frac{1}{q}$.
   En appliquant l'hypothèse de récurrence à $\frac{p_1}{q}, \dots, \frac{p_n}{q}$ et aux fonctions $f_j^q \in L^{\frac{p_j}{q}}(\mathbb{R}^d)$, on obtient que $f_1^q \cdots f_n^q \in L^1(\mathbb{R}^d)$, i.e. $f_1 \cdots f_n \in L^q(\mathbb{R}^d)$. De plus,
$$\|f_1 \cdots f_n\|_q^q = \|f_1^q \cdots f_n^q\|_1 \leqslant \|f_1^q\|_{\frac{p_1}{q}} \cdots \|f_n^q\|_{\frac{p_n}{q}} = \|f_1\|_{p_1}^q \cdots \|f_n\|_{p_n}^q.$$
   Comme q et p_{n+1} sont des exposants conjugués, on conclut la récurrence en appliquant Hölder à $f_1 \dots f_n \in L^q(\mathbb{R}^d)$ et $f_{n+1} \in L^{p_{n+1}}(\mathbb{R}^d)$. On obtient bien $f_1 \dots f_{n+1} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et
$$\|f_1 \cdots f_{n+1}\|_1 \leqslant \|f_1 \cdots f_n\|_q \|f_{n+1}\|_{p_{n+1}} \leqslant \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_{n+1}\|_{p_{n+1}}.$$

2. Soient p, q et $r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. On note p' et q' les exposants conjugués de p et q respectivement. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, vérifier que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \qquad |f(x-y)g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{p}{q'}} |g(y)|^{\frac{q}{p'}} \big(|f(x-y)|^p |g(y)|^q\big)^{\frac{1}{r}}.$$
   En déduire l'inégalité : $\big(|f| * |g|\big)^r \leqslant \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \big(|f|^p * |g|^q\big)$.
   Pour le premier point, il suffit de vérifier les relations suivantes sur les exposants :
$$\frac{p}{q'} + \frac{p}{r} = p\left(1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right) = 1 \qquad \text{et de même} \qquad \frac{q}{p'} + \frac{q}{r} = q\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) = 1.$$
   Pour le second point, fixons $x \in \mathbb{R}^d$. La formule $|f| * |g|(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)| \,\mathrm{d}y$ définit bien un élément de $[0, +\infty]$. On applique l'inégalité de Hölder à 3 termes à :
$$\begin{aligned} &f_1 = |f(x-\cdot)|^{\frac{p}{q'}}, && f_2 = |g|^{\frac{q}{p'}}, && f_3 = (|f(x-\cdot)|^p |g|^q)^{\frac{1}{r}}, \\ &p_1 = q', && p_2 = p', && p_3 = r, \end{aligned}$$

ce qui est possible car $\frac{1}{q'} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$. Il vient :

$$\begin{aligned} |f| * |g|(x) = \|f_1 f_2 f_3\|_1 &\leqslant \left\| |f|^{\frac{p}{q'}} \right\|_{q'} \left\| |g|^{\frac{q}{p'}} \right\|_{p'} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p |g(y)|^q \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leqslant \|f\|_p^{\frac{p}{q'}} \|g\|_q^{\frac{q}{p'}} \left(|f|^p * |g|^q(x) \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Pour conclure, on remarque que $\frac{rp}{q'} = rp\Big(1 - \frac{1}{q}\Big) = rp\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\Big) = r - p$ et de même $\frac{rq}{p'} = r - q$.

3. Établir le théorème 1 dans le cas général.
   Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. D'après la question 2, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f * g(x)|^r \, \mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} (|f| * |g|(x))^r \, \mathrm{d}x \leqslant \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p * |g|^q(x) \, \mathrm{d}x.$$

   Comme $|f|^p$ et $|g|^q \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la question 1 de l'exercice 6 montre que $|f|^p * |g|^q \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Le terme de droite dans l'équation précédente est donc fini, et ainsi $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$. De plus,

$$\|f * g\|_r^r \leqslant \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \| |f|^p * |g|^q \|_1 \leqslant \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \|f^p\|_1 \|g^q\|_1 = \|f\|_p^r \|g\|_q^r.$$

Exercice 9 (Construction d'une fonction-test par convolution — *facultatif*)**.** Pour tout $a > 0$ on définit la fonction indicatrice normalisée H_a par

$$H_a : x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } x \in [0, a], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de strictement positive telle que $\sum_{k \geqslant 0} a_k < +\infty$. On note $u_n = H_{a_0} * \cdots * H_{a_n}$. Le but de l'exercice est de prouver que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction-test. On utilisera les notations suivantes :

- $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $D_r f : x \mapsto \frac{1}{r}(f(x) - f(x-r))$ pour toute fonction f et tout $r > 0$.

1. Soient $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ et $r > 0$, montrer que $H_r * f \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$ et que $(H_r * f)' = D_r f$.
   Le travail a déjà été fait dans l'exercice 4 question 2. On y a montré que $H_r * f = \frac{1}{r}\big(\mathbf{1}_{[0,r]} * f\big)$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$ et que $(H_r * f)' = \frac{1}{r}\big(\mathbf{1}_{[0,r]} * f\big)' = \frac{1}{r}(f - \tau_r f) = D_r f$.
2. Vérifier que u_1 est continue, positive, à support dans $[0, A_1]$ et d'intégrale 1.
   On a $u_1 = H_{a_0} * H_{a_1} = \frac{1}{a_0 a_1} \mathbf{1}_{[0,a_0]} * \mathbf{1}_{[0,a_1]}$. On peut donc utiliser le résultat de la question 1 de l'exercice 4. La figure 2 présente le graphe de u_1. On y lit que u_1 est continue, positive et à support dans $[0, A_1]$. Par ailleurs,

$$\int_{\mathbb{R}} u_1(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} H_{a_0}(x-y) H_{a_1}(y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} H_{a_1}(y) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} H_{a_0}(x-y) \, \mathrm{d}x}_{=1} \mathrm{d}y = 1.$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$, positive, à support dans $[0, A_n]$ et d'intégrale 1.

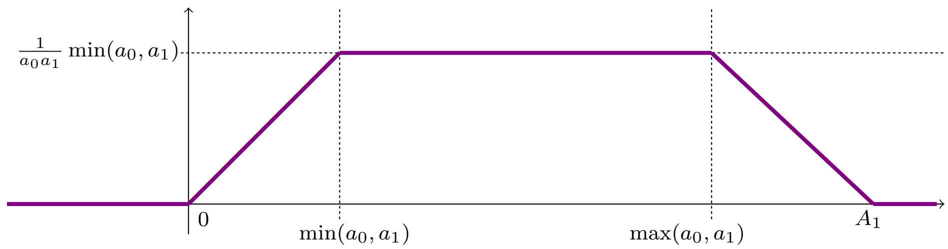

FIGURE 2 – Graphe de u_1.

On prouve le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, l'initialisation étant traitée dans la question 2. Supposons le résultat vraie au rang n. Alors $u_{n+1} = u_n * H_{a_{n+1}}$, avec $u_n \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R})$. D'après la question 1, u_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^n$. En utilisant la question 3 de l'exercice 2, on obtient que

$$\operatorname{supp}(u_{n+1}) \subset \operatorname{supp}(u_n) + \operatorname{supp}(H_{a_{n+1}}) \subset [0, A_n] + [0, a_{n+1}] = [0, A_{n+1}].$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u_{n+1}(x) = \frac{1}{a_{n+1}} \int_0^{a_{n+1}} u_n(x-y)\,\mathrm{d}y \geqslant 0.$$

Enfin

$$\int_{\mathbb{R}} u_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} H_{a_{n+1}}(x-y)u_n(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u_n(y) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} H_{a_{n+1}}(x-y)\,\mathrm{d}x}_{=1}\,\mathrm{d}y = 1,$$

ce qui conclut la récurrence.

4. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $j \in [\![1, n-1]\!]$ on a :

$$u_n^{(j)} = \big(D_{a_0} \circ \cdots \circ D_{a_{j-1}}\big)\big(H_{a_j} * \cdots * H_{a_n}\big).$$

Commençons par observer que l'opérateur D_r commute à la dérivation. En effet, si $r > 0$ et f est $\mathcal{C}^1$ alors $(D_r f)' = \frac{1}{r}(f' - f'(\cdot - r)) = D_r(f')$.
Soient $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant j \leqslant n-1$. D'après la question 3, la fonction u_n est $\mathcal{C}^{n-1}$. En appliquant de façon répétée la question 1 on obtient :

$$\begin{aligned} u_n^{(j)} &= (H_{a_0} * (H_{a_1} * \cdots H_{a_n}))^{(j)} = (D_{a_0}(H_{a_1} * \cdots H_{a_n}))^{(j-1)} = D_{a_0}\Big((H_{a_1} * \cdots H_{a_n})^{(j-1)}\Big) \\ &= D_{a_0}\Big((D_{a_1}(H_{a_2} * \cdots H_{a_n}))^{(j-2)}\Big) = (D_{a_0} \circ D_{a_1})\Big((H_{a_2} * \cdots H_{a_n})^{(j-2)}\Big) \\ &= \dots \\ &= \big(D_{a_0} \circ \cdots \circ D_{a_{j-1}}\big)\big(H_{a_j} * \cdots * H_{a_n}\big). \end{aligned}$$

5. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ on $\|u_n'\|_\infty \leqslant \frac{2}{a_0 a_1}$.
Indication. Utiliser l'inégalité de Young.

Soit $n \geqslant 2$, on va appliquer successivement les inégalités de Young pour $(p,q,r) = (+\infty, 1, +\infty)$ et pour $(p,q,r) = (1,1,1)$. D'après la question 4 on a :

$$\begin{aligned} \|u_n'\|_\infty = \|D_{a_0}(H_{a_1} * \cdots * H_{a_n})\|_\infty &\leqslant \frac{2}{a_0}\|H_{a_1} * \cdots * H_{a_n}\|_\infty \leqslant \frac{2}{a_0}\|H_{a_1}\|_\infty \|H_{a_2} * \cdots * H_{a_n}\|_1 \\ &\leqslant \frac{2}{a_0 a_1}\|H_{a_2} * \cdots * H_{a_n}\|_1 \leqslant \frac{2}{a_0 a_1}\|H_{a_2}\|_1 \cdots \|H_{a_n}\|_1 = \frac{2}{a_0 a_1}. \end{aligned}$$

6. Soient m et $n \geqslant 2$, montrer que $\|u_{n+m} - u_m\|_\infty \leqslant \frac{2}{a_0 a_1}(A_{m+n} - A_m)$. En déduire que (u_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction u.

   Soit $f = H_{a_{m+1}} * \cdots * H_{a_{m+n}}$, de sorte que $u_{m+n} = u_m * f$. En appliquant le résultat de la question 3 à la suite (b_k) définie par $b_k = a_{m+1+k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient que f est positive, d'intégrale 1 et à support dans $[0, A_{m+n} - A_m]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
|u_{m+n}(x) - u_m(x)| = |u_m * f(x) - u_m(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \big(u_m(x-y) - u_m(x)\big) f(y)\,\mathrm{d}y \right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} \big|u_m(x-y) - u_m(x)\big| f(y)\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \|u_m'\|_\infty \int_0^{A_{m+n}-A_m} |y| f(y)\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \|u_m'\|_\infty (A_{m+n} - A_m) \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{d}y = \|u_m'\|_\infty (A_{m+n} - A_m),
\end{aligned}$$

   où la troisième ligne s'obtient par le théorème des accroissements finis appliqué à u_m et la condition de support sur f. L'inégalité recherchée est alors obtenue grâce à la majoration de la question 5.

   On a $\|u_{n+m} - u_m\|_\infty \leqslant \frac{2}{a_0 a_1}(A_{m+n} - A_m)$ pour tout m et $n \geqslant 2$. Comme $\sum_{k \geqslant 0} a_k < +\infty$, la suite (A_n) converge, donc est de Cauchy. L'inégalité précédente montre que la suite (u_n) est de Cauchy uniforme sur $\mathbb{R}$. Elle converge donc uniformément.

7. Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la suite $(u_n^{(j)})_{n \geqslant j+1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

   Soit $j \geqslant 1$, d'après la question 4, pour tout $n \geqslant j+1$ on a :

$$u_n^{(j)} = \big(D_{a_0} \circ \cdots \circ D_{a_{j-1}}\big)\big(H_{a_j} * \cdots * H_{a_n}\big).$$

   En appliquant la question 6 à la suite $(a_{j+k})_{k \geqslant 0}$, il vient que $\big(H_{a_j} * \cdots * H_{a_n}\big)_{n \geqslant j+1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g_j.

   Soit $r > 0$, pour tout fonction h continue et bornée sur $\mathbb{R}$ on a $\|D_r h\|_\infty \leqslant \frac{2}{r}\|h\|_\infty$. Donc D_r est un opérateur linéaire continu sur l'espace des fonctions continues et bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Par composition, c'est aussi le cas de $\big(D_{a_0} \circ \cdots \circ D_{a_{j-1}}\big)$. Donc

$$u_n^{(j)} = \big(D_{a_0} \circ \cdots \circ D_{a_{j-1}}\big)\big(H_{a_j} * \cdots * H_{a_n}\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{uniformément}} \big(D_{a_0} \circ \cdots \circ D_{a_{j-1}}\big) g_j := f_j.$$

8. Conclure que $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et que $\int_{\mathbb{R}} u(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

   Soit $k \in \mathbb{N}$, pour tout $j \in \{0, \ldots, k\}$, la suite $(u_n^{(j)})_{n \geqslant k+1}$ converge uniformément. Donc $u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ et $u^j = \lim_{n \to +\infty} u^{(j)}$ pour tout $j \leqslant k$. Donc $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. En notant $A = \sum_{k \geqslant 0} a_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\operatorname{supp}(u_n) \subset [0, A_n] \subset [0, A]$. Donc $\operatorname{supp}(u) \subset [0, A]$ et $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Finalement, en utilisant la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers u sur $[0, A]$, uniformément et donc au sens L^1, on a :

$$1 = \int_{\mathbb{R}} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^A u_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^A u(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u(x)\,\mathrm{d}x.$$