Topologie

Thomas Letendre

Prépa Agreg – Automne 2023

Introduction

La topologie est le domaine où on donne un sens formel aux notions de limites et de continuité. On peut ensuite définir des notions plus évoluées (connexité, compacité, ...) qui débouchent sur des résultats d'existence (théorème des valeurs intermédiaires) ou d'uniformité (théorème de Heine).

Cadre du cours. Le programme de l'Agrégation se limite à la topologie des espaces métriques. Nous allons parler de topologie générale pour en utiliser le vocabulaire, mais on ne rentrera pas dans le subtilité qui apparaissent hors du cas métrique. On se contentera de quelques remarques culturelles sur les exemples naturels ou les pathologies qui peuvent apparaitre hors de ce cadre.

Programme. Langage de la topologie générale, connexité, compacité, complétude, et si il reste du temps quelques applications du théorème de Baire.

Prérequis. On suppose qu'on a construit les réels par les coupures de Dedekind [Rud00b, chap. 1]. La construction nous donne que :

- il existe un corps commutatif $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ dont $\mathbb{Q}$ est un sous-corps ;
- $\mathbb{R}$ est muni d'un ordre total $\leqslant$ compatible avec celui de $\mathbb{Q}$ et les opérations $+$ et $\cdot$;
- $\mathbb{R}$ possède la *propriété de la borne supérieure* : si $A \subset \mathbb{R}$ est non-vide et majorée alors elle possède une *borne supérieure*, i.e. un plus petit majorant.

On peut montrer que le corps ordonné $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ est unique à isomorphisme près [Rud00b, chap. 1]. On déduit des propriétés précédentes que, pour tout x et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$, voir [SR08, chap. I.1]. Pour le moment on ne dit rien de la complétude de $\mathbb{R}$.

Comme $\mathbb{R}$ est construit, on peut définir ce qu'est une distance sur un ensemble X. C'est une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ qui satisfait les propriétés de séparation ($d(x, y) = 0 \iff x = y$), symétrie ($d(x, y) = d(y, x)$) et l'inégalité triangulaire ($d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$). Dans la suite de ces notes, on suppose connues les notions de distances et d'espaces métriques ainsi que des notions de base de la topologie de ces espaces : limite, continuité, boules ouvertes $B(x, \alpha)$ ou fermées $B_F(x, \alpha)$, ...

Références

[Rud00a] W. Rudin, *Analyse fonctionnelle*, Edisciences, 2000.

[Rud00b] ———, *Principes d'analyse mathématique*, Edisciences, 2000.

[SR08] J. St-Raymond, *Topologie calcul différentiel et variable complexe*, Calvage et Mounet, 2008.

Table des matières

1 Vocabulaire de la topologie générale

Dans cette section on introduit le vocabulaire de la topologie générale, qui permet de parler en termes d'ouverts, fermés, etc. Dans le cas d'espaces métriques, on retrouve les notions habituelles.

1.1 Espaces topologiques et continuité

Définition 1.1 (Topologie)**.** Une *topologie* sur un ensemble X est une famille $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ telle que :

- $\emptyset \in \mathcal{O}$ et $X \in \mathcal{O}$;
- (*stabilité par intersection finie*) si $n \in \mathbb{N}^*$ et $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{O}$ alors $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{O}$.
- (*stabilité par réunion quelconque*) si $U_i \in \mathcal{O}$ pour tout $i \in I$ alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$.

Les éléments de $\mathcal{O}$ sont appelés les *ouverts* de l'*espace topologique* $(X, \mathcal{O})$.

Remarque 1.2. Par récurrence, le second point est équivalent à : si U et $V \in \mathcal{O}$ alors $U \cap V \in \mathcal{O}$.

Définition 1.3. On dit que $F \subset X$ est *fermé* si $X \backslash F$ est ouvert. On note $\mathcal{F} = \{F \subset X \mid X \setminus F \in \mathcal{O}\}$ l'ensemble des fermés. Il satisfait les propriétés suivantes :

- $\emptyset \in \mathcal{F}$ et $X \in \mathcal{F}$;
- (*stabilité par réunion finie*) si $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ alors $\bigcup_{i=1}^n F_i \in \mathcal{O}$.
- (*stabilité par intersection quelconque*) si $F_i \in \mathcal{F}$ pour tout $i \in I$ alors $\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{F}$.

Exemple 1.4.

1. Sur un ensemble X, la famille $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ définit une topologie, dite *grossière*.
2. $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ définit une topologie, dite *discrète*, telle que toute partie de X est ouverte et fermée.
3. Soient a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on rappelle que $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. Les réunions d'intervalles ouverts forment une topologie sur $\mathbb{R}$, définie uniquement par la relation d'ordre.
4. Sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$, on définit une topologie dont les éléments sont les réunions d'intervalles du type $]a, b[$, $[-\infty, b[$ ou $]a, +\infty]$.

Proposition 1.5. *Soit (X, d) un espace métrique, les réunions de boules ouvertes forment une topologie $\mathcal{O}$ sur X, appelée* topologie métrique*, pour laquelle on retrouve les ouverts habituels.*

Démonstration. Le point qui nécessite un peu de soin est la stabilité par intersection finie. On a

$$\bigcup_{i \in I} B(x_i, \alpha_i) \cap \bigcup_{j \in J} B(y_j, \beta_j) = \bigcup_{i \in I, j \in J} B(x_i, \alpha_i) \cap B(y_j, \beta_j)$$

et il s'agit donc de montrer que l'intersection de deux boules ouvertes appartient à $\mathcal{O}$. Pour tout $z \in B(x, \alpha) \cap B(y, \beta)$, il existe $\gamma_z > 0$ tel que $B(z, \gamma_z) \subset B(x, \alpha) \cap B(y, \beta)$. On a alors

$$B(x, \alpha) \cap B(y, \beta) = \bigcup_{z \in B(x, \alpha) \cap B(y, \beta)} B(z, \gamma_z) \in \mathcal{O}. \qquad \square$$

Exemple 1.6.

1. La topologie grossière n'est pas métrique, sauf si X est un singleton.
2. La topologie discrète vient de la *distance discrète* : $d(x, y) = 0$ si $x = y$ et $d(x, y) = 1$ sinon.
3. La topologie de l'ordre sur $\mathbb{R}$ est aussi la topologie métrique induite par $d : (x, y) \mapsto |y - x|$.
4. La topologie de $\overline{\mathbb{R}}$ est induite par $d : (x, y) \mapsto |\arctan(x) - \arctan(y)|$, où on a étendu arctan par $\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$. En d'autres termes, arctan est une isométrie de $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ vers $([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], |\cdot|)$ (donc un homéomorphisme, en anticipant un peu).

On rencontre naturellement des exemples où la bonne topologie ne peut pas être définie par une métrique. Par exemple sur l'espace $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues à supports compacts.

Remarque 1.7. Être ouvert ou fermé est une propriété extrinsèque : elle se rapporte à un ensemble en tant que partie d'un espace topologique, et elle dépend de l'espace ambiant. Par exemple $]0,1]$ est ouvert dans $(]0,1],|\cdot|)$, fermé dans $(\mathbb{R}^*,|\cdot|)$ et ni l'un ni l'autre dans $(\mathbb{R},|\cdot|)$.

Définition 1.8. Soit $f : X \to Y$ entre espaces topologiques, on dit que f est *continue* si pour tout $U \subset Y$ ouvert $f^{-1}(U) \subset X$ est ouvert (ou de façon équivalente si pour tout $F \subset Y$ fermé $f^{-1}(F)$ est fermé). Si f est continue bijective et f^{-1} est continue, on dit que f est un *homéomorphisme* et que X et Y sont *homéomorphes.*

Lemme 1.9. *Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont continues alors $g \circ f$ est continue.*

Démonstration. Pour tout U un ouvert de Z on a $g^{-1}(U)$ ouvert de Y par continuité de g puis $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}\big(g^{-1}(U)\big)$ ouvert X par continuité de f. □

1.2 Voisinages et limites

Définition 1.10. Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $x \in X$. On dit que $A \subset V$ est un *voisinage* de x s'il existe $U \in \mathcal{O}$ tel que $x \in U \subset A$. On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

En particulier, un ouvert est voisinage de chacun de ses points. Dans un espace métrique (X, d), on a $A \in \mathcal{V}(x)$ si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que $B(x, \alpha) \subset A$.

Lemme 1.11. *L'ensemble $\mathcal{V}(x)$ est stable par intersection finie (si $A, B \in \mathcal{V}(x)$ alors $A \cap B \in \mathcal{V}(x)$) et par extension (si $A \in \mathcal{V}(x)$ et $A \subset B$ alors $B \in \mathcal{V}(x)$).*

Définition 1.12. Soit $f : X \to Y$ entre espaces topologiques, on dit que f est *continue en $x \in X$* si $\forall V \in \mathcal{V}(f(x))$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$. Dans un espace métrique c'est équivalent à la définition en ε.

Lemme 1.13. *L'application f est continue sur X si et seulement si elle est continue en tout $x \in X$.*

Démonstration. En exercice. □

Définition 1.14. Soit A une partie d'un espace topologique X.

- Son *intérieur* $\mathring{A}$ est l'union des ouverts inclus dans A, i.e. le plus gros ouvert inclus dans A.
- Son *adhérence* $\overline{A}$ est l'intersection des fermés contenant A, i.e. le plus petit fermé contenant A.
- Sa *frontière* est le fermé $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Remarque 1.15. Pour la distance discrète $B(x, 1) = \{x\}$ et $B_F(x, 1) = X$ pour tout $x \in X$. Donc, en général, $\overline{B(x,\alpha)} \neq B_F(x, \alpha)$, $\mathring{\widehat{B_F(x,\alpha)}} \neq B(x, \alpha)$, et la sphère n'est pas la frontière des boules.

Lemme 1.16. *Soient $x \in X$ et $A \subset X$, on a les caractérisations suivantes en termes de voisinages :*

$$x \in \mathring{A} \iff A \in \mathcal{V}(x) \qquad \textit{et} \qquad x \in \overline{A} \iff \forall U \in \mathcal{V}(x), U \cap A \neq \emptyset$$

Démonstration. En exercice. □

Définition 1.17. Une partie $A \subset X$ est dite *dense* dans X si $\overline{A} = X$.

Exemple 1.18. Soit $x \in \mathbb{R}$, tout voisinage de x contient un intervalle ouvert et rencontre donc $\mathbb{Q}$. Donc $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. Donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Lemme 1.19. *Soit X un espace topologique et $A \subset X$, alors A est dense si et seulement si pour tout U ouvert non-vide on a $A \cap U \neq \emptyset$.*

Démonstration. Soit U ouvert, on a $A \cap U = \emptyset \iff A \subset X \setminus U \iff \overline{A} \subset X \setminus U \iff \overline{A} \cap U = \emptyset$. Si $\overline{A} = X$, pour tout U ouvert non-vide on a $\overline{A} \cap U \neq \emptyset$ et donc $A \cap U \neq \emptyset$. Si $\overline{A} \neq X$, alors $U = X \setminus \overline{A} \neq \emptyset$ est ouvert et $A \cap U = \emptyset$. □

Définition 1.20. Soient X et Y des espaces topologiques, $A \subset X$ et $f : A \to Y$. Soient $x_0 \in \overline{A}$ et $\ell \in Y$, on dit que $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ si pour tout $V \in \mathcal{V}(\ell)$ il existe $U \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $f^{-1}(V) = U \cap A$.

Entre espaces métriques, on retrouve la définition de limite avec des ε.

Exemple 1.21. La topologie de $\overline{\mathbb{R}}$ induit une topologie sur $\mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ pour laquelle les voisinages de ∞ sont les parties contenant un ensemble du type $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant N\}$ avec $N \in \mathbb{N}$. En considérant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de Y comme une fonction de $\mathbb{N}$ dans Y, on a $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell \in Y$ si et seulement si : $\forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \Rightarrow u_n \in V)$.

Définition 1.22. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans Y et $y \in Y$, on dit que y est *valeur d'adhérence* de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si pour tout $V \in \mathcal{V}(y)$ l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in V\}$ est infini.

Lemme 1.23. *L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{u_n \mid n \geqslant N\}}$.*

Démonstration. En exercice. □

1.3 Particularité des espaces métriques

Les espaces métriques sont des espaces topologiques plus agréables que les autres, notamment parce qu'ils possèdent les propriétés suivantes.

1. (*séparation*) Pour tout $x, y \in X$, il existe $U \in \mathcal{V}(x)$ et $V \in \mathcal{V}(y)$ tels que $U \cap V = \emptyset$.
2. (*base dénombrable de voisinages*) Soit $x \in X$, $\forall U \in \mathcal{V}(x)$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $B(x, \frac{1}{n}) \subset U$.

Un espace topologique X vérifiant 1 est dit *séparé*. Cette propriété permet de garantir l'unicité de la limite pour les fonctions à valeurs dans X. Si X est muni de la topologie grossière et $\mathrm{Card}(X) \geqslant 2$ il n'est pas séparé. Donnons un contre-exemple moins trivial. Sur $\mathbb{R}$, on peut définir une topologie dont les fermés sont les parties finies de $\mathbb{R}$ (i.e. les $P^{-1}(0)$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$). C'est un cas particulier de la topologie de Zariski pour laquelle deux ouverts non-vides s'intersectent toujours.
La propriété 2 est ce qui permet de donner des caractérisations séquentielles (i.e. par les suites) des notions de fermé, adhérence, limite, ... À titre d'exemple on rappelle les propriétés suivantes, dont les démonstrations sont laissées en exercice.

Lemme 1.24. *Soit A une partie d'un espace métrique (X, d), A est fermée si et seulement si pour toute suite convergente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A on a $\lim_{n \to +\infty} a_n \in A$.*

Lemme 1.25. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'un espace métrique (X, d), le point $x \in X$ est valeurs d'adhérence de (u_n) si et seulement si il est limite d'une suite extraite de (u_n).*

1.4 Restriction, produits et quotients

Définition 1.26. Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $Z \subset X$, la famille $\mathcal{O}_Z = \{O \cap Z \mid O \in \mathcal{O}\}$ définit une topologie sur Z appelée *topologie induite*. C'est la plus petite topologie (celle avec le moins d'ouverts) qui rend l'inclusion canonique $\iota : z \in Z \mapsto z \in X$ continue.

Si (X,d) est un espace métrique alors la topologie induite sur Z est métrique et définie par $d_{|Z\times Z}$.

Lemme 1.27. *Soient $f : X \to Y$ continue entre espaces topologiques et $Z \subset X$, alors la restriction $f_{|Z} : Z \to Y$ est continue pour la topologie induite.*

Démonstration. On a $f_{|Z} = f \circ \iota$ et f et ι sont continues. □

Définition 1.28. Soit $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. On note $X = \prod_{i\in I} X_i$ et $p_i : X \to X_i$ la projection sur le i-ième facteur. La *topologie produit* sur X est la famille $\mathcal{O}$ formée des réunions d'ensemble de la forme $\bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(U_j)$ où $J \subset I$ est fini et pour tout $j \in J$, $U_j \in \mathcal{O}_j$. C'est la plus petite topologie sur X qui rend les $(p_i)_{i\in I}$ continues.

Notons que $\bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(U_j) = \prod_{i\in I} V_i$ où $V_i = U_i$ si $i \in J$ et $V_i = X_i$ sinon. Si I est fini, la topologie produit sur X est donc formée des unions de produits d'ouverts.
Supposons que la topologie de chacun des X_i soit définie par une distance d_i. Si $I = \{1,\dots,n\}$, la topologie produit sur X est métrique, définie par $d : ((x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}, (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}) \mapsto \max_{1\leqslant i\leqslant n} d_i(x_i,y_i)$. Si $I = \mathbb{N}$, la topologie produit sur X est métrique, associée à $d : ((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}) \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i} d_i(x_i,y_i)$. Seul le cas d'un produit fini d'espaces métriques est au programme de l'Agrégation.

Lemme 1.29. *Soient $(X_i)_{i\in I}$ et Y des espaces topologiques et $f : Y \to X = \prod_{i\in I} X_i$. La fonction f est continue si et seulement si $p_i \circ f$ est continue pour tout $i \in I$.*

Démonstration. Si f est continue alors $p_i \circ f$ aussi pour tout $i \in I$. Inversement supposons que les $(p_i \circ f)_{i\in I}$ sont continues. Soit $V \in \mathcal{O}$, par définition V est réunion d'ensembles du type $\bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(U_j)$ où $J \subset I$ est fini et les U_j ouverts. Alors

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup \bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(U_j)\right) = \bigcup \bigcap_{j\in J} f^{-1}\left(p_j^{-1}(U_j)\right) = \bigcup \bigcap_{j\in J} (p_j \circ f)^{-1}(U_j)$$

est ouvert. Donc f est continue. □

La topologie produit est la topologie de la convergence simple : une suite à valeurs dans X converge si et seulement si elle converge composante par composante. Notamment, la convergence simple pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la convergence dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ pour la topologie produit. C'est un exemple naturel de topologie non métrisable : les points n'ont pas une base dénombrable de voisinages.

Définition 1.30. Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X, on note $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la projection canonique. La *topologie quotient* de $X/\mathcal{R}$ est $\left\{U \subset X/\mathcal{R} \;\middle|\; \pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}\right\}$. C'est la plus grosse topologie telle que π soit continue.

Exemple 1.31.
- Si $U \subset \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est ouvert non-vide alors $\pi^{-1}(U)$ est ouvert de $\mathbb{R}$, donc contient un intervalle ouvert, donc recontre toutes les classes modulo $\mathbb{Q}$. Donc $U = \pi(\pi^{-1}(U)) = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. La topologie quotient de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est donc la topologie grossière, en particulier non séparée.
- À l'inverse $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est métrisable. Soient x et $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, soient $\widetilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ et $\widetilde{y} \in \pi^{-1}(y)$ on pose $d(x,y) = d(\widetilde{x}+\mathbb{Z}, \widetilde{y}+\mathbb{Z}) = \min_{n\in\mathbb{Z}} |\widetilde{y} - \widetilde{x} + n|$. Ceci est une distance définissant la topologie quotient de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Lemme 1.32. *Soient Y un espace topologique et $f : X/\mathcal{R} \to Y$, la fonction f est continue si et seulement si $f \circ \pi : X \to Y$ l'est.*

Démonstration. Si f est $\mathcal{C}^0$ alors $f \circ \pi$ aussi. Inversement si $f \circ \pi$ est $\mathcal{C}^0$, pour tout $V \subset Y$ ouvert $\left(\pi^{-1}(f^{-1}(V)\right) = (f \circ \pi)^{-1}(V)$ est ouvert de X, et donc $f^{-1}(V)$ est ouvert de $X/\mathcal{R}$. Donc f est $\mathcal{C}^0$. □

2 Connexité

Dans cette section on s'intéresse à la notion de connexité d'un espace topologique (ou métrique). Elle permet d'obtenir des résultats d'existence (théorèmes des valeurs intermédiaires) ou de passage du local au global (une fonction constante au voisinage de chaque point d'un connexe est constante). Un résultat fondamental est la description des connexes de $\mathbb{R}$.

2.1 Ensembles connexes

Proposition 2.1. *Soit X un espace topologique, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Les seules parties à la fois ouvertes et fermées de X sont $\emptyset$ et X.*
2. *Pour toute partition $X = \bigsqcup_{i\in I} U_i$ de X en ouverts, il existe $j \in I$ tel que $U_j = X$.*
3. *Toute fonction $f : X \to \{0,1\}$ continue pour la topologie discrète de $\{0,1\}$ est constante.*

Démonstration. (1) $\implies$ (2). Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts telle que $X = \bigsqcup_{i\in I} U_i$. Si $X = \emptyset$ c'est bon. Sinon, il existe $j \in I$ tel que $U_j \neq \emptyset$. Alors $X \setminus U_j = \bigsqcup_{i\neq j} U_i$ est ouvert, donc U_j est ouvert et fermé, donc $U_j = X$. Dans ce cas $U_i = \emptyset$ pour tout $i \neq j$.
(2) $\implies$ (3). Comme $\{0,1\}$ est discret et f est continue, $X = f^{-1}(0) \sqcup f^{-1}(1)$ est une partition de X en ouverts. Donc l'un de ces ouverts est égal à X. Donc f est constante.
(3) $\implies$ (1). Soit $U \subset X$ ouvert et fermé. La fonction indicatrice $\mathbf{1}_U : X \to \{0,1\}$ de U est continue pour la topologie discrète sur $\{0,1\}$, donc est constante. Donc $U = \emptyset$ ou $U = X$. □

Définition 2.2. Un espace topologique qui vérifie les propriétés de la proposition 2.1 est dit *connexe*.

La connexité est une propriété intrinsèque d'un espace topologique. Quand on parle de la connexité d'une partie, cela signifie qu'on considère cette partie munie de la topologie induite.

Lemme 2.3. *Soit $g : X \to Y$ continue, si X est connexe alors $g(X)$ est connexe.*

Démonstration. Soit $f : g(X) \to \{0,1\}$ continue, alors $f \circ g : X \to \{0,1\}$ est continue, donc constante par connexité de X. Donc f est constante, car $g : X \to g(X)$ est surjective. □

Lemme 2.4. *Soient A et $B \subset X$ tels que $A \subset B \subset \overline{A}$. Si A est connexe alors B est connexe.*

Démonstration. Soit $f : B \to \{0,1\}$ continue. Alors $f_{|A}$ est continue donc constante par connexité de A, disons $A \subset f^{-1}(0)$. Par ailleurs $f^{-1}(0)$ est un fermé de B, donc de la forme $B \cap F$ avec F fermé de X. On a $A \subset f^{-1}(0) \subset F$ et donc $B \subset \overline{A} \subset F$. Donc $f^{-1}(0) = B$ et f est constante. □

Lemme 2.5. *Soient $(A_i)_{i\in I}$ des ensembles connexes, si $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ connexe.*

Démonstration. Soit $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Soit $f : \bigcup_{i\in I} A_i \to \{0,1\}$ continue, disons telle que $f(x) = 0$. Pour tout $i \in I$, $f_{|A_i}$ est continue, donc constante par connexité. Comme $f(x) = 0$, on a $A_i \subset f^{-1}(0)$. Donc $\bigcup_{i\in I} A_i \subset f^{-1}(0)$ et donc f est constante. □

Remarque 2.6. On se convaincra sur un dessin qu'il faut une hypothèse sur les intersections des A_i, mais que celle qu'on a donné ici n'est pas nécessaire.

2.2 Connexes de $\mathbb{R}$

Théorème 2.7. *Les connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.*

Démonstration. Il faut s'appuyer la spécificité de la topologie de $\mathbb{R}$: son lien avec la relation d'ordre. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un connexe, supposé non-vide. Soient $a, b \in A$ tels que $a \leqslant b$. Pour tout $c \in [a, b]$, si $c \notin A$ alors $a < c < b$ et $(A \cap]-\infty, c[) \sqcup (A \cap]c, +\infty[)$ est une partition de A en deux ouverts non-vides, ce qui est absurde. Donc $c \in A$. Donc A est un intervalle.
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Supposons par l'absurde que $I = U \sqcup V$ avec U et V ouverts non-vides de I. Soient $a \in U$ et $b \in V$. Sans perte de généralité, on peut supposer $a < b$. L'ensemble $E = \{t \in [a, b] \mid [a, t] \subset U\}$ contient a et majoré par b. Soit T sa borne supérieure, on a $T \in [a, b] \subset I$. Comme U est fermé dans I, il existe F fermé de $\mathbb{R}$ tel que $U = F \cap I$. Alors $E \subset U \subset F$ et donc $T \in \overline{E} \subset F$. Donc $T \in F \cap I = U$, en particulier $T < b$.
Comme U est ouvert dans I, il existe O ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $U = O \cap I$. Alors $T \in O$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[T, T + \varepsilon] \subset O$. On peut supposer $T + \varepsilon < b$ de sorte que $[T, T + \varepsilon] \subset O \cap I = U$. Mais alors $[a, T + \varepsilon] \subset U$, donc $T + \varepsilon \in E$, contradiction. Donc I est connexe. □

Corollaire 2.8 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit X un connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ continue, alors $f(X)$ est un intervalle. En particulier, s'il existe $x, y \in X$ tels que $f(x) < 0 < f(y)$ alors il existe $z \in X$ tel que $f(z) = 0$.*

C'est très utile lorsque X est un intervalle de $\mathbb{R}$ pour obtenir l'existence de solutions à des équations. Dans ce cas simple, c'est le premier théorème d'existence non constructif que les étudiants rencontrent dans leur scolarité.

Définition 2.9. On dit qu'un espace topologique X est *connexe par arcs* si pour tout $x, y \in X$ il existe un *chemin* de x à y, c'est-à-dire $\gamma : [0, 1] \to X$ continu tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Lemme 2.10. *Si X est connexe par arcs il est connexe.*

Démonstration. Soit $x \in X$, pour tout $y \in X$ il existe $\gamma_y : [0, 1] \to X$ chemin continu de x à y. Puis on écrit $X = \bigcup_{y \in X} \gamma_y([0, 1])$, réunion de connexe s'intersectant en x. □

La preuve utilise la connexité de l'intervalle $[0, 1]$. En particulier, attention à ne pas prouver la connexité des intervalles en invoquant qu'ils sont connexes par arcs.
En général, les connexes ne sont pas connexes par arcs. Un contre-exemple classique est le suivant : $X = \left\{\left(t, \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t > 0\right\} \sqcup (\{0\} \times [-1, 1])$. C'est l'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ du graphe de $t \mapsto \sin(\frac{1}{t})$, qui est connexe comme image continue de $]0, +\infty[$, donc X est connexe. En revanche il n'existe pas de chemin $\gamma : [0, 1] \to X$ continu joignant $(1, \sin(1))$ à $(0, 0)$.

Lemme 2.11. *Soit U un ouvert connexe d'un espace vectoriel normé, alors U est connexe par arcs.*

Démonstration. Supposons U non-vide. Soit $x \in U$, on note $V = \{y \in U \mid \exists \gamma \text{ chemin de } x \text{ à } y\}$. Soit $y \in V$, comme U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(y, \varepsilon) \subset U$. Alors $B(y, \varepsilon) \subset V$, en concaténant un chemin de x à y avec $[y, z]$, pour tout $z \in B(y, \varepsilon)$. Donc V est ouvert.
Soit $y \in \overline{V} \cap U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(y, \varepsilon) \subset U$ et $B(y, \varepsilon) \cap V \neq \emptyset$. Soit $z \in B(y, \varepsilon) \cap V$, en concaténant un chemin de x à z et $[z, y]$ on montre que $y \in V$. Donc V est fermé dans U.
On a donc $x \in V$ ouvert et fermé dans U, donc $V = U$ par connexité. De plus, V est connexe par arcs par définition. □

Proposition 2.12. *Soit $n \geqslant 2$, alors $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ ne sont pas homéomorphes.*

Démonstration. S'il existait un homéomorphisme $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, par restriction $\mathbb{R}^*$ serait homéomorphe à $\mathbb{R}^n \backslash \{\varphi(0)\}$. D'un côté $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe, cf. thm. 2.7. De l'autre $\mathbb{R}^n \backslash \{\varphi(0)\}$ est connexe par arcs donc connexe. Ces deux espaces ne sont donc pas homéomorphes. Contradiction. □

2.3 Composantes connexes

Dans cette section on considère un espace topologique X.

Définition 2.13. Soit $x \in X$, l'union des parties connexes de X contenant x est appelée *composante connexe* de x, notée C_x. C'est le plus gros connexe de X contentant x.

Lemme 2.14. *Pour tout $x \in X$, C_x est connexe et fermée.*

Démonstration. Par le lemme 2.5, on sait que C_x est connexe. Donc son adhérence est connexe par le lemme 2.4 et contient x. Par définition de C_x on a donc $\overline{C_x} \subset C_x$, et donc l'égalité. □

En général, C_x n'est pas ouverte. Ainsi, la composante connexe de 0 dans $X = \{0\} \sqcup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est $C_0 = \{0\}$. Si C_0 était ouvert, il contiendrait $X \cap]-\varepsilon, \varepsilon[$ pour un certain $\varepsilon > 0$.

Lemme 2.15. *Soient x et $y \in X$, alors $C_x \cap C_y = \emptyset$ ou $C_x = C_y$.*

Démonstration. Si $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, alors $C_x \cup C_y$ est un connexe contenant x donc inclus dans C_x, donc $C_y \subset C_x$. Symétriquement $C_x \subset C_y$. □

Avoir la même composante connexe définit donc une relation d'équivalence sur X, la classe de d'équivalence d'un point x étant C_x. Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées les *composantes connexes* de X. En notant $(C_i)_{i \in I}$ la famille des composantes connexes de X, on obtient une partition $X = \bigsqcup_{i \in I} C_i$ de X en fermés.

Lemme 2.16. *Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé, alors les composantes connexes de U sont ouvertes (dans U et donc dans l'espace ambiant).*

Démonstration. Soit C une composante connexe de U. Soit $x \in C$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U$. Alors $C \cup B(x, \varepsilon)$ est connexe comme union de connexes contenant x, donc inclus dans $C_x = C$. Donc $B(x, \varepsilon) \subset C$ et C est voisinage de x. Donc C est ouverte. □

Proposition 2.17. *Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion au plus dénombrable d'intervalles disjoints.*

Démonstration. Soit $U \subset \mathbb{R}$ ouvert, notons $(I_i)_{i \in I}$ ses composantes connexes. Pour tout $i \in I$, on sait que I_i est un connexe ouvert par le lemme 2.16, donc c'est un intervalle ouvert. En particulier, chacun de ces intervalles contient un rationnel, ce qui donne une surjection de $\mathbb{Q} \cap U$ vers I et montre que I est au plus dénombrable. La conclusion suit alors de $U = \bigsqcup_{i \in I} I_i$. □

3 Compacité

Dans cette section on s'intéresse à la compacité. Cette propriété permet d'obtenir des résultats d'existence (d'extréma par exemple) ou d'uniformité (théorème de Heine). Un résultat fondamental est la compacité des segments de $\mathbb{R}$.

3.1 Propriété de Borel–Lebesgue

Définition 3.1. Soit X un espace topologique, on dit que X possède la *propriété de Borel–Lebesgue* si pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ telle que $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ il existe $J \subset I$ fini tel que $X = \bigcup_{i \in J} U_i$. De façon équivalente, X a la propriété de Borel–Lebesgue si pour toute famille de fermés $(F_i)_{i \in I}$ telle que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$ il existe $J \subset I$ fini tel que $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$.

Définition 3.2. On dit qu'un espace topologique X est *compact* si il est séparé et satisfait la propriété de Borel–Lebesgue.

Remarque 3.3.

- On rappelle qu'être séparé, pour les métriques c'est automatique.
- Dans les livres anglophone, "compact" signifie seulement avoir la propriété de Borel–Lebesgue.
- La compacité est une propriété intrinsèque d'un espace topologique. Quand on parle de la compacité d'une partie, cela signifie qu'on considère cette partie munie de la topologie induite. En particulier, dans X séparé, une partie $K \subset X$ est compacte si et seulement si toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ il existe $J \subset I$ fini tel que $K \subset \bigcup_{i\in J} U_i$.

Lemme 3.4. *Soit X un espace topologique compact et $F \subset X$ fermé, alors F est compact.*

Démonstration. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X telle que $F \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Alors un recouvrement ouvert de X est $X = (X \setminus F) \cup \bigcup_{i\in I} U_i$. Il existe donc $J \subset I$ fini tel que $X = (X \setminus F) \cup \bigcup_{i\in J} U_i$, et donc $F \subset \bigcup_{i\in J} U_i$. □

Lemme 3.5. *Soit X un espace topologique séparé et $K \subset X$ compact, alors K est fermé dans X.*

Démonstration. On va prouver que $X \setminus K$ est ouvert. Soit $a \notin K$, comme X est séparé, pour tout $x \in K$ il existe $U_x \in \mathcal{V}(x)$ et $V_x \in \mathcal{V}(a)$, des voisinages ouverts dans X, tels que $U_x \cap V_x = \emptyset$. Comme $K \subset \bigcup_{x\in K} U_x$, il existe $x_1, \dots, x_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} = U$. Mais alors $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$ est un ouvert et $U \cap V = \emptyset$. Donc $a \in V \subset X \setminus U \subset X \setminus K$. Donc $X \setminus K \in \mathcal{V}(a)$ pour tout $a \in X \setminus K$. □

Lemme 3.6. *Soit $f : X \to Y$ continue d'un compact dans un espace séparé, alors $f(X)$ est compact.*

Démonstration. Comme Y est séparé, $f(X) \subset Y$ aussi. Soit $(U_i)_{i\in I}$ des ouverts de Y tels que $f(X) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, alors $X = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$ est un recouvrement ouvert de X. Il existe donc $J \subset I$ fini tel que $X = \bigcup_{i\in J} f^{-1}(U_i)$. Donc $f(X) \subset \bigcup_{i\in J} U_i$. □

Lemme 3.7. *Soit $f : X \to Y$ une bijection continue d'un compact dans un espace séparé, alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration. Il suffit de prouver que $f^{-1} : Y \to X$ est $\mathcal{C}^0$, c'est-à-dire que l'image directe par f (i.e. l'image réciproque par f^{-1}) de tout fermé de X est fermée dans Y. Soit $F \subset X$ fermé. Comme X est compact F aussi. Comme Y est séparé et f continue, $f(F)$ est compact, donc fermé. □

Appliquons ceci à un cas concret. Par définition, la projection $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est continue. On a vu que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est métrique donc séparé. Si on sait déjà que $[0, 1]$ est compact, alors $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \pi([0, 1])$ aussi. La fonction $\widetilde{f} : t \mapsto e^{2i\pi t}$ est $\mathcal{C}^0$ et 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Elle induit une bijection $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$, qui est continue parce qu'on a défini la topologie quotient pour ça. Comme $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ est séparé, f est un homéomorphisme d'après le lemme 3.7.

Proposition 3.8 (Théorème des fermés emboités)**.** *Soient X un espace compact et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fermés tels que $F_{n+1} \subset F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$ si et seulement si $\exists N \in \mathbb{N}$, $F_N = \emptyset$.*

Démonstration. Par compacité, il existe $J \subset \mathbb{N}$ fini tel que $\bigcap_{n\in J} F_n = \emptyset$. Soit $N = \max(J)$, par décroissance de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'intersection précédente est $F_N = \emptyset$. La réciproque est claire. □

Corollaire 3.9. *Soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite à valeurs dans un espace compact X, alors $(x_n)_{n\in N}$ admet des valeurs d'adhérences.*

Démonstration. L'ensemble des valeurs d'adhérences est $\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n \mid n \geqslant N\}}$. C'est une intersection de fermés non-vides, donc elle est non-vide par la proposition 3.8. □

Lemme 3.10. *Une suite $(x_n)_{n\in N}$ à valeurs dans un espace compact X converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.*

Démonstration. Si la suite converge vers $\ell \in X$, soit $y \neq \ell$. Comme X est séparé il existe $U \in \mathcal{V}(\ell)$ et $V \in \mathcal{V}(y)$ disjoints. Pour tout n assez grand $x_n \in U$, donc $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in V\}$ est fini, et y n'est pas valeur d'adhérence. La seule valeur d'adhérence est donc la limite ℓ.
Si la suite à une unique valeur d'adhérence $\ell \in X$, supposons par l'absurde qu'elle ne converge pas vers ℓ. Il existe alors $U \in \mathcal{V}(\ell)$ ouvert et une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in N}$ telle que $x_{\varphi(n)} \in X \setminus U$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette sous-suite admet une valeurs d'adhérence dans le compact $X \setminus U$, ce qui fournit une seconde valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in N}$. Contradiction. □

Théorème 3.11 (Tychonov). *Soit $(X_i)_{i\in I}$ des espaces topologiques compacts, alors $X = \prod_{i\in I} X_i$ est compact pour la topologie produit.*

Démonstration. Voir [Rud00a, Ann. A] pour une preuve dans le cas général. □

3.2 Espaces métriques compacts

Dans cette section on considère des espaces métriques donc séparés. Dans le premier résultat ci-dessous, l'aspect métrique sert uniquement à donner un sens à la notion de continuité uniforme.

Théorème 3.12 (Heine). *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces métriques. Si X est compact alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in X$ il existe $\alpha_x > 0$ tel que $B(x, 2\alpha_x) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$. On a alors $X = \bigcup_{x\in X} B(x, \alpha_x)$. Par compacité, on peut se ramener à une famille finie $x_1, \dots, x_n \in X$. Notons $\alpha = \min\{\alpha_{x_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Soient $y, z \in X$ tels que $d(y, z) < \alpha$. Il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $d(y, x_i) < \alpha_{x_i}$. Par inégalité triangulaire $d(z, x_i) < 2\alpha_{x_i}$, donc $y, z \in B(x_i, \alpha_{x_i})$ et donc $f(y)$ et $f(z) \in B(f(x_i), \varepsilon)$. Donc $d(f(y), f(z)) < 2\varepsilon$.
Il existe donc $\alpha > 0$ tel que, pour tout $y, z \in X$, $d(y, z) < \alpha \implies d(f(y), f(z)) < 2\varepsilon$. □

Définition 3.13. On dit qu'un espace métrique (X, d) a la propriété de *Bolzano–Weierstrass* si toute suite à valeurs dans X admet une valeur d'adhérence (i.e. une sous-suite convergente).

Théorème 3.14 (Bolzano–Weierstrass). *Un métrique (X, d) est compact si et seulement si il possède la propriété de Bolzano–Weierstrass.*

Lemme 3.15 (Précompacité). *Si (X, d) possède la propriété de Bolzano–Weierstrass, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $Y \subset X$ fini tel que $X = \bigcup_{y\in Y} B(y, \varepsilon)$.*

Démonstration. Par l'absurde, si ce n'est pas le cas, il existe $\varepsilon > 0$ tel que X ne soit recouvert par aucune union finie de boule de rayon 2ε. Par récurrence, on construit une suite (x_n) telle que $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{k=0}^{n} B(x_k, 2\varepsilon) \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $y \in X$, $B(y, \varepsilon)$ contient au plus un terme de la suite, qui sont à distance au moins 2ε l'un de l'autre. Donc y n'est pas valeur d'adhérence. Donc (x_n) n'a pas de valeur d'adhérence, contradiction. □

Lemme 3.16 (ε de Lebesgue). *Si (X, d) possède la propriété de Bolzano–Weierstrass, pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall x \in X$, $\exists i \in I$, $B(x, \varepsilon) \subset U_i$.*

Démonstration. Par l'absurde, si c'est faux, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $x_n \in X$ tel que $B(x_n, \frac{1}{n})$ n'est contenu dans aucun des U_i. Soit ℓ une valeurs d'adhérence de (x_n). Il existe $i \in I$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B(\ell, 2\varepsilon) \subset U_i$. Il existe $n > \frac{1}{\varepsilon}$ tel que $x_n \in B(\ell, \varepsilon)$. Alors $B(x_n, \frac{1}{n}) \subset B(x_n, \varepsilon) \subset B(\ell, 2\varepsilon) \subset U_i$. Contradiction. □

Démonstration du thm. 3.14. Si (X,d) est compact, on a déjà vu qu'il a la propriété de Bolzano–Weierstrass dans le cor. 3.9. Inversement, si (X,d) a la propriété de Bolzano–Weierstrass, soit (U_i) un recouvrement ouvert de X. Soit $\varepsilon > 0$ donné par le lemme 3.16. Soit $Y \subset X$ fini tel que $X \subset \bigcup_{y\in Y} B(y,\varepsilon)$. Pour tout $y \in Y$, il existe $i_y \in I$ tel que $B(y,\varepsilon) \subset U_{i_y}$. Alors $(U_{i_y})_{y\in Y}$ est un sous-recouvrement fini de X. Donc X est séparé, et possède la propriété de Borel–Lebesgue. □

Avec cette caractérisation, on peut prouver le théorème de Tychonov dans le cas d'un produit au plus dénombrable de compacts métriques. Pour un produit fini il suffit de procéder par extractions successives. Pour un produit dénombrable on utilise des extractions successives construites par récurrence et le procédé diagonal de Cantor.

3.3 Compacité des segments et quelques conséquences

Théorème 3.17. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $[a,b]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Encore une fois, il faut utiliser le lien entre la topologie et l'ordre de $\mathbb{R}$. Déjà, la topologie de $\mathbb{R}$ est métrique donc séparée. Soit (U_i) un recouvrement ouvert de $[a,b]$. On note $E = \{x \in [a,b] \mid \text{il existe un sous-recouvrement fini de } [a,x]\}$. L'ensemble E contient a et est majoré par b donc admet une borne supérieure s. Il s'agit de prouver que $b = s \in E$.
Il existe $j \in I$ tel que $a \in U_j$. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset U_j$. Donc $[a, a+\frac{\varepsilon}{2}] \in U_j$, et $a + \frac{\varepsilon}{2} \in E$. Donc $a < a + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant s$.
Il existe $j \in I$ et $\varepsilon > 0$ tel que $]s-\varepsilon, s+\varepsilon[\subset \cap U_j$. Il existe $x \in E\cap]s-\varepsilon, s[$. Alors $[a,x]$ est recouvert par un nombre fini de $(U_i)_{i\in I}$. Mais alors $[a, s+\frac{\varepsilon}{2}]$ aussi.
D'une part, cela montre que $[a,s]$ est recouvert par un nombre fini d'ouverts de la forme U_i, donc $s \in E$. D'autre part, par l'absurde, si $s < b$, on peut supposer que $s + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant b$, et alors $s + \frac{\varepsilon}{2} \in E$, ce qui contredit la définition de s. Donc $s = b$. □

Corollaire 3.18. *Les compacts de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ sont exactement les fermés bornés pour $\|\cdot\|_\infty$.*

Démonstration. La topologie induite sur $\mathbb{R}^n$ par $\|\cdot\|_\infty$ est la topologie produit. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ fermé et borné pour $\|\cdot\|_\infty$. Il existe $M > 0$ tel que $A \subset [-M,M]^n$. Par Tychonov $[-M,M]^n$ est compact, et donc A aussi. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact. On sait déjà que K est fermé. De plus $K \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}}]-k,k[^n$, donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \bigcup_{k=0}^{k_0}]-k,k[^n =]-k_0,k_0[^n$. Donc pour tout $x \in K$, $\|x\|_\infty \leqslant k_0$. □

Corollaire 3.19. *Soient X compact et $f : X \to \mathbb{R}$ continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Démonstration. L'ensemble $f(X)$ est compact de $\mathbb{R}$ donc est fermé et borné. □

Corollaire 3.20. *Sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. En particulier elles définissent toute la même topologie.*

Démonstration. Il suffit de prouver que sur $\mathbb{R}^n$ une norme quelconque N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$. Notons $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$N(x) = N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leqslant \|x\|_\infty \underbrace{\sum_{i=1}^n N(e_i)}_{=M}. \tag{3.1}$$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|N(y) - N(x)| \leqslant N(y-x) \leqslant M\|y-x\|_\infty$. Donc N est continue sur $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

L'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$ est fermé borné donc compact pour $\|\cdot\|_\infty$. Donc N est bornée sur S et atteint ses bornes. Donc il existe $x_0 \in S$ tel que $N(x) \geqslant N(x_0) = m > 0$ pour tout $x \in S$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a donc

$$N(x) = \|x\|_\infty N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \geqslant m\|x\|_\infty. \tag{3.2}$$

Le résultat est donné par (3.1) et (3.2). □

A posteriori, dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, les compacts pour l'unique topologie normée sont exactement les fermés bornés, pour n'importe quelle norme.

4 Complétude

On va maintenant s'intéresser à la notion de complétude qui est une notion purement métrique. Dans cette section, tous les espaces considérés sont donc des espaces métriques. Ici encore, cette notion fournit des théorèmes d'existence importants, comme le théorème du point fixe de Picard.

4.1 Suites de Cauchy

Définition 4.1. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace métrique (X, d) est dite *de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geqslant N$, $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Lemme 4.2. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge elle est de Cauchy*

Démonstration. En exercice. □

Lemme 4.3. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy alors elle est bornée.*

Démonstration. En exercice. □

Lemme 4.4. *Si la suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence $\ell \in X$, alors $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ dès que $p, q \geqslant N$. On sait que $B(\ell, \varepsilon)$ contient une infinité de termes de la suite. En particulier, il existe $p \geqslant N$ tel que $x_p \in B(\ell, \varepsilon)$. Mais alors pour tout $q \geqslant N$ on a $x_q \in B(\ell, 2\varepsilon)$. Donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. □

4.2 Espaces complets

Définition 4.5. Un espace métrique (X, d) est dit *complet* si toutes ses suites de Cauchy convergent.

La complétude est une propriété intrinsèque d'un espace métrique. Quand on parle de la complétude d'une partie, cela signifie qu'on considère cette partie munie de la distance induite.

Lemme 4.6. *Tout espace métrique compact (X, d) est complet.*

Démonstration. Une suite de Cauchy à valeurs dans X admet une valeur d'adhérence par compacité. Donc elle converge. □

Théorème 4.7. *Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie est complet.*

Démonstration. Une suite de Cauchy à valeurs dans E est bornée, donc contenue dans un compact. Elle possède donc une valeur d'adhérence, et donc converge. □

En particulier $\mathbb{R}$ est complet pour sa norme usuelle. C'est la base de nombreuses preuves de complétude pour des espaces de fonctions : on utilise d'abord la complétude de $\mathbb{R}$ pour construire une fonction limite puis on montre la convergence vers cette fonction. Par exemple, $\big(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$.

Lemme 4.8. *Soit F une partie fermée d'un espace complet (X,d), alors (F,d) est complet.*

Démonstration. Une suite de Cauchy de F converge dans X par complétude. La limite est dans F car c'est un fermé. □

Lemme 4.9. *Soit (X,d) un métrique et $Y \subset X$. Si (Y,d) est complet alors Y est fermé dans X.*

Démonstration. Soit $x \in \overline{Y}$, il existe (x_n) suite de Y qui converge vers x. Cette suite est de Cauchy car convergente. Par complétude elle converge dans Y, donc $x \in Y$. Donc $\overline{Y} = Y$. □

Corollaire 4.10. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $F \subset E$ un sous-espace de dimension finie, alors F est fermé.*

Démonstration. L'espace vectoriel normé $(F, \|\cdot\|)$ est complet car de dimension finie. Donc il est fermé dans E. □

4.3 Applications de la complétude

Théorème 4.11 (Picard)**.** *Soient (X,d) un espace complet et $f : X \to X$ une application k-contractante (i.e. k-lipschitzienne avec $k < 1$). Alors f admet un unique point fixe $\ell \in X$. De plus, pour tout $x_0 \in X$, la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers ℓ.*

Démonstration. Prouvons d'abord l'unicité. Soient ℓ et $\ell' \in X$ deux points fixes de f, on a alors $d(\ell,\ell') = d(f(\ell), f(\ell')) \leqslant kd(\ell,\ell')$. Si $\ell \neq \ell'$ alors $d(\ell,\ell') \leqslant kd(\ell,\ell') < d(\ell,\ell')$ ce qui est absurde.
Soit $x_0 \in X$, on définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, i.e. $x_n = f^n(x_0) = f \circ \cdots \circ f(x_0)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x_{n+1}) \leqslant kd(x_{n-1}, x_n) \leqslant \ldots \leqslant k^n d(x_0, x_1)$. Donc si $p < q$ alors

$$d(x_p, x_q) \leqslant d(x_p, x_{p+1}) + \cdots + d(x_{q-1}, x_q) \leqslant \big(k^p + \cdots + k^{q-1}\big) d(x_0, x_1) \leqslant \underbrace{\frac{k^p}{1-k}}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{}0} d(x_0, x_1).$$

Donc (x_n) est de Cauchy dans (X,d) et donc converge vers $\ell \in X$. Comme f est contractante elle est continue. Donc $f(\ell) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \ell$. □

Ce résultat apparait dans la preuve de nombreux théorèmes importants : théorème d'inversion local, théorème de Cauchy–Lipschitz, méthode de Newton, etc.

Théorème 4.12 (prolongement d'applications uniformément continues à valeurs dans un complet)**.** *Soient X un métrique, $D \subset X$ une partie dense et Y un espace complet. Soit $f : D \to Y$ une application uniformément continue, elle admet un unique prolongement continu de X vers Y.*

Démonstration. Soit $x \in X$, comme $\overline{D} = X$, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans D telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. La suite (x_n) converge donc est de Cauchy. Comme f est uniformément continue, cela implique que $(f(x_n))$ est de Cauchy, donc converge par complétude de Y. Notons ℓ sa limite. Si $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans D et $x'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, alors $d(x_n, x'_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $d(f(x_n), f(x'_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par uniforme continuité de f, et donc $f(x'_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Ainsi, pour tout $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ on a $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. En particulier, tout prolongement continu $\widetilde{f} : X \to Y$ de f doit vérifier $\widetilde{f}(x) = \ell$. Cela prouve l'unicité et donne le seul candidat possible. Vérifions que $\widetilde{f}$ ainsi défini est uniformément continu.
Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ donné par l'uniforme continuité de f. Soient x et $y \in X$ tels que $d(x, y) < \frac{\delta}{2}$, soit (x_n) et $(y_n) \in D^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x et y respectivement. Pour tout n assez grand on a $d(x_n, y_n) < \delta$ et $d(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$. En passant à la limite, $d\Big(\widetilde{f}(x), \widetilde{f}(y)\Big) \leqslant \varepsilon$. □

Remarque 4.13. On voit que le prolongement $\widetilde{f} : X \to Y$ est en fait uniformément continu.

Corollaire 4.14 (prolongement des applications linéaires continues à valeurs dans un Banach). *Soient E un espace vectoriel normé, $F \subset E$ un sous-espace dense et G un Banach. Soit $f : F \to G$ linéaire continue, elle admet un unique prolongement linéaire continu $\widetilde{f} : E \to G$, qui est de même norme.*

Démonstration. En exercice. □

4.4 Baireries

Dans cette section on montre qu'un espace métrique complet est de Baire et on donne quelques applications de ce fait.

Théorème 4.15 (Baire). *Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $(U_n)_{n\in N}$ des ouverts dense de X, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense. De façon équivalente, soit $(F_n)_{n\in N}$ des fermés d'intérieurs vides de X, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.*

Démonstration. Soit $V \subset X$ ouvert non-vide, montrons que $V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$. Comme U_0 est dense, $V \cap U_0$ est ouvert non-vide (voir lemme 1.19), donc contient une boule ouverte $B(x_0, r_0)$, où $r_0 > 0$. Par densité de U_1, l'ouvert $B(x_0, r_0) \cap U_1$ est non-vide. Donc il existe $x_1 \in X$ et $r_1 \in]0, 1]$ tel que

$$B(x_1, r_1) \subset B_F(x_1, r_1) \subset B(x_1, 2r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap U_1 \subset V \cap U_0 \cap U_1.$$

Par récurrence, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ et une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < r_n \leqslant \frac{1}{n}$ et $B_F(x_n, r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap U_n \subset V \cap \bigcap_{i=0}^{n} U_i$.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout p et $q \geqslant N$ on a x_p et $x_q \in B(x_N, r_N)$ donc $d(x_p, x_q) < 2r_N \leqslant \frac{2}{N}$. Donc (x_n) est de Cauchy, donc converge vers $x \in X$. De plus, pour tout $n \geqslant N$, $x_n \in B_F(x_N, r_N)$ fermée, donc $x \in B_F(x_N, r_N) \subset V \cap U_N$. Donc $x \in V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. □

Corollaire 4.16. *Soit E un Banach de dimension infinie, alors sa dimension n'est pas dénombrable.*

Démonstration. Par l'absurde, si E était de dimension dénombrable, il aurait une base dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace de dimension finie $F_n = \mathrm{Vect}\{e_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}$ serait fermé et d'intérieur vide. Mais alors $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ serait d'intérieur vide, ce qui est absurde. □

Théorème 4.17 (Banach–Steinhaus). *Soient E un Banach, F un espace vectoriel normé et $(L_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{L}(E, F)$ (applications linéaires continues). Si pour tout $x \in E$, $\sup_{i\in I} \|L_i(x)\| < +\infty$ alors $\sup_{i\in I} \|L_i\| < +\infty$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $E_n = \bigcap_{i\in I} L_i^{-1}(B_F(0, n))$. C'est un fermé car les L_i sont continues. Pour tout $x \in E$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \in I$ $\|L_i(x)\| \leqslant n$. Donc $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Comme E est complet, par le théorème de Baire, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E_n soit d'intérieur non-vide. Il existe donc $x \in E$ et $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset E_n$, et donc $B(0, r) \subset E_n$.
Soit $i \in I$, on a $L_i(B(0, r)) \subset B_F(0, n)$. Pour $x \in E\backslash\{0\}$, on a $\|L_i(x)\| = \left\| L_i\Big(\frac{r}{2\|x\|} x\Big) \right\| \frac{2\|x\|}{r} \leqslant \frac{2n}{r} \|x\|$. Donc $\|L_i\| \leqslant \frac{2n}{r}$ pour tout $i \in I$. □

Corollaire 4.18. *Soit (L_n) une suite de $\mathcal{L}(E,F)$ qui converge simplement vers L, alors $L \in \mathcal{L}(E,F)$.*

Démonstration. D'une part, la convergence simple donne immédiatement que L est linéaire. Pour tout $x \in E$, $(L_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée, i.e. $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|L_n(x)\| < +\infty$. Par le théorème de Banach–Steinhaus $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|L_n\| = M < +\infty$. Soit $x \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|L_n(x)\| \leqslant M\|x\|$. En faisant $n \to +\infty$, on obtient $\|L(x)\| \leqslant M\|x\|$. Donc L est continue de norme au plus M. $\square$

Théorème 4.19 (Application ouverte)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach et $L \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective, alors L est ouverte (i.e. pour tout $U \subset E$ ouvert $L(U)$ est ouvert dans F).*

Démonstration. Voir [SR08, Ann. B] par exemple. $\square$

Corollaire 4.20 (Théorème d'isomorphisme de Banach)**.** *Soient E et F deux espace de Banach. Si $L \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective, alors $L^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.*