

Cours de géométrie classique pour l'Agrégation

Thomas Letendre
Bureau 430 Sud
thomas.letendre@ens-lyon.fr

version du 20 mars 2018

Introduction

Introduction méthodologique

La géométrie classique à l'Agrégation

Dans le programme de l'écrit 2018 de l'Agrégation, la partie concernant la géométrie classique est formée principalement des sections suivantes.

- 2 - Groupes (en partie).
- 4 - Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel (en partie).
- 5 - Géométrie affine et euclidienne.

Pour les parties 2 et 4 la géométrie fournit surtout des exemples et des applications. Pour la partie 2 ceci est évoqué explicitement dans le programme.

Les différentes notions de théorie des groupes introduites dans les paragraphes suivants pourront être illustrées et appliquées dans des situations géométriques.

En ce qui concerne l'oral, 5 leçons sont des leçons de géométrie pure (parmi les leçons de mathématiques générales prévues pour 2017).

- 161 - Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.
- 171 - Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.
- 181 - Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
- 182 - Applications des nombres complexes à la géométrie.
- 183 - Utilisation des groupes en géométrie.

On peut y ajouter une dizaine de leçons qui ne sont pas purement de géométrie mais où il serait malhonnête de ne pas en parler (au hasard : "101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et Applications."). Dans l'ensemble, on peut facilement parler de géométrie dans environ la moitié des leçons de mathématiques générales. Étonnant, non ? Pour les candidats préparant l'option D, il faut en gros diviser par deux le nombre de leçons concernées. Les leçons de géométrie les concernant sont : 181, 182 et 183.

Gloire à toi, Jury !¹

On trouve le passage suivant dans le rapport du jury 2015.

On note que les leçons de géométrie sont souvent délaissées, alors que les candidats seront amenés à enseigner la géométrie. Ajoutons que, dans les leçons, les illustrations des notions algébriques par des exemples et des applications issus de la géométrie sont les bienvenus, ceci tout particulièrement en théorie des groupes. À ce propos, rappelons qu'un dessin au tableau est souvent apprécié et soulignons que le jury n'est pas vraiment regardant sur les qualités esthétiques du dessin.

1. © Maxime Bourrigan, 2012

Dans des rapports antérieurs on trouvait également les conseils suivants.

Les leçons d'exemples devraient être construites à partir des connaissances théoriques des candidats. Ces leçons abordent des aspects très variés des mathématiques. Il faut donc recentrer autour de la géométrie (dans un sens large) les outils mathématiques développés dans d'autres champs (techniques euclidiennes, résultat, formes quadratiques, convexité, ...).

Introduction mathématique

Bref historique

On peut faire remonter l'étude de la géométrie classique à l'antiquité grecque. Il s'agit alors d'étudier les distances, les aires, les angles, etc., et les rapports entre ces objets.

Les résultats sont souvent en rapport avec des problèmes concrets. Par exemple, le théorème de Thalès (6ème siècle avant J.-C.) permet d'estimer la hauteur d'un bâtiment connaissant la distance à celui-ci, ou inversement. Il suffit de prendre un objet de taille connue, et de chercher à quelle distance nous devons placer cet objet pour qu'il présente la même hauteur apparente que le bâtiment qui nous intéresse. Sur la figure 0.1, on connaît l , L et h et on veut déterminer H .

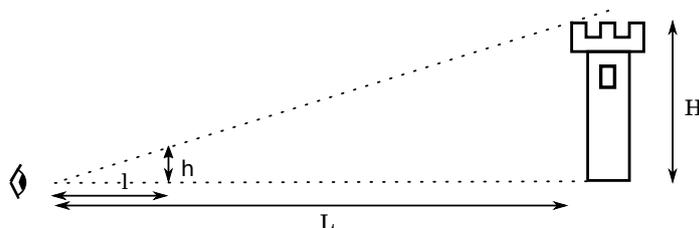


Figure 0.1 – Une application du théorème de Thalès.

Au 4ème siècle avant J.-C., Euclide formule ses postulats qui vont servir d'axiomatique à la géométrie (euclidienne donc) jusqu'au 19ème siècle. Citons aussi Apollonios de Perga (2ème siècle avant J.-C.) qui est le premier à considérer des coniques, comme sections de cônes par un plan. La géométrie projective apparaît quant à elle beaucoup plus tard. Le premier à l'étudier semble être Desargues, en 1639.

Le 5ème postulat d'Euclide, ou *axiome des parallèles* peut s'énoncer ainsi : "soit P un point et \mathcal{D} une droite dans un plan affine, alors il existe une unique droite parallèle à \mathcal{D} passant par P ". Pendant des siècles, les géomètres ont tenté de montrer que ce 5ème postulat était conséquence des précédents, et de réduire ainsi le système axiomatique d'Euclide. C'est un peu la quadrature du cercle des géomètres. En 1826, Lobachesky construit une géométrie qui vérifie les quatre premiers postulats d'Euclide, mais pas le 5ème. C'est la naissance de ce qu'on appelle aujourd'hui la *géométrie hyperbolique*, ou plus généralement des géométries non euclidiennes. On ne parlera pas de géométrie hyperbolique dans ce cours, mais il est possible d'en parler de façon élémentaire à l'Agrégation. Voir par exemple les premières pages de [13].

La géométrie par les actions de groupes

Jusqu'à présent, on n'a parlé que de l'approche axiomatique de la géométrie. Parlons un peu du point de vue moderne. Les groupes apparaissent naturellement en géométrie comme groupes de transformations d'un ensemble préservant certaines structures : groupe

des bijections d'un ensemble, groupe des isométries d'un solide, groupe linéaire, groupe de Galilée, . . . On a manipulé ces groupes longtemps avant que Galois ne dégage la notion de groupe abstrait, en 1831.

En 1872, Klein propose, dans son programme d'Erlangen, de renverser le lien entre groupes et géométrie et de redéfinir la géométrie à partir des actions de groupes. C'est le point de vue qu'on adoptera dans ce cours. Comme on se limite à la géométrie dite classique, nous rencontrerons uniquement des actions de groupes liés au groupe linéaire (sous-groupe, quotients, . . .).

Profitons en pour signaler que le langage des actions de groupes est aussi utile en dehors des mathématiques. Par exemple en physique, on peut formaliser le concept d'homogénéité (resp. d'isotropie) comme étant l'invariance sous l'action du groupe des translations (resp. du groupe orthogonal).

Leitmotiv

L'idée suivante est fondamentale. Une géométrie est une action de groupe $G \curvearrowright X$. On dit qu'on fait de l'algèbre si on s'intéresse plutôt aux propriétés du groupe G , et de la géométrie si on s'intéresse plutôt aux transformations de l'espace X . Du point de vue de la géométrie, on cherche à comprendre les orbites de l'action. Cela passe d'abord par la recherche d'invariants, si possible totaux, puis par la recherche de formes normales. Ceci sera développé à la fin de la section 1.1 et reviendra tout au long du cours.

Interactions entre algèbre et géométrie

Il y aurait évidemment peu de sens à faire de la géométrie sans algèbre (et réciproquement). En général, il est fructueux de faire le va-et-vient entre algèbre et géométrie, comme le montre l'exemple suivant.

Dans le plan affine euclidien, on considère deux rotations $r_{A,\alpha}$ et $r_{B,\beta}$, respectivement de centre A et d'angle α , et de centre B et d'angle β . Le problème est géométrique, il s'agit de déterminer la nature de $\varphi := r_{A,\alpha} \circ r_{B,\beta}$ et ses éléments caractéristiques. La classification des isométries (c'est-à-dire essentiellement la réduction des endomorphismes) nous dit que φ est une rotation d'angle $\gamma := \alpha + \beta$. Il faut alors déterminer son centre.

Comme sur la figure 0.2, notons \mathcal{D} la droite joignant A à B et \mathcal{D}_A (resp. \mathcal{D}_B) la droite passant par A (resp. B) et faisant un angle $\frac{\alpha}{2}$ (resp. $-\frac{\beta}{2}$) avec \mathcal{D} . L'étude des générateurs du groupe des déplacements nous dit que l'on peut écrire $r_{A,\alpha}$ et $r_{B,\beta}$ comme produits de deux réflexions. On a mieux : $r_{A,\alpha} = s_{\mathcal{D}_A} \circ s_{\mathcal{D}}$ et $r_{B,\beta} = s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}_B}$, où $s_{\mathcal{D}}$ est la réflexion par rapport à \mathcal{D} . On a alors $\varphi = s_{\mathcal{D}_A} \circ s_{\mathcal{D}_B}$. En particulier, φ fixe C , qui est défini comme l'intersection de \mathcal{D}_A et \mathcal{D}_B . Ainsi, φ est la rotation de centre C et d'angle $\alpha + \beta$.

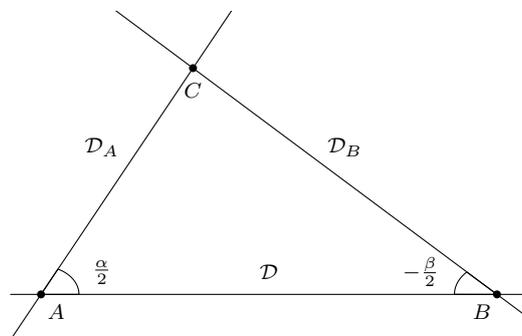


Figure 0.2 – Construction du centre de la composée de deux rotations.

Nature géométrique d'un problème

Lorsqu'on se pose un problème de géométrie, il est utile d'identifier la nature géométrique du problème, c'est-à-dire quel groupe on peut faire agir pour se ramener à une situation plus simple qui sera conjuguée à la situation initiale. Ainsi, un problème ne portant que sur des incidences et des alignements sera de nature projective, un problème faisant en plus intervenir la notion de parallèles sera de nature affine, etc.

Par exemple, cherchons à déterminer, dans le plan \mathbb{R}^2 , la direction de la tangente T à l'ellipse \mathcal{E} d'équation $\frac{X^2}{2} + Y^2 = 1$ en $A := \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Le problème est affine, on peut donc faire agir le groupe affine pour se ramener au cas du cercle unité \mathcal{C} . Soit $\varphi : (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{2}}, y\right)$, on a $\varphi(\mathcal{E}) = \mathcal{C}$ et $\varphi(A) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. De plus $\varphi(T)$ est la tangente à \mathcal{C} en $\varphi(A)$. On peut alors tricher en utilisant la structure euclidienne de \mathbb{R}^2 , qui n'a rien à voir avec le problème : $\varphi(T)$ est orthogonale à la droite joignant l'origine à $\varphi(A)$. Ainsi, un vecteur directeur de $\varphi(T)$ est $u := (-1, 1)$. On revient ensuite à la situation initiale : un vecteur directeur de T est $(\vec{\varphi})^{-1}(u) = (-\sqrt{2}, 1)$.

Le rapport aux corps du géomètre

Dans ce document, on utilise la convention qui définit les corps comme étant commutatifs. On considérera souvent un corps générique \mathbb{K} , notamment dans les chapitres consacrés à la géométrie affine (chap. 2) et à la géométrie projective (chap. 5). Pour l'intuition, il faut penser ce corps comme \mathbb{R} . Certains résultats ne sont valables que sur \mathbb{R} . On évoquera la géométrie sur \mathbb{Q} ou \mathbb{C} essentiellement pour donner des contre-exemples dans ces cas.

Si $q \in \mathbb{N}$ est de la forme p^n , avec p premier et $n \in \mathbb{N}^*$, on notera \mathbb{F}_q le corps fini à q éléments (qui, rappelons-le, n'est pas $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$). Notre étude de la géométrie sur ces corps se limitera à des problèmes de dénombrement.

Les coordonnées, c'est le mal !

Autant que possible, nous présenterons une approche intrinsèque, c'est-à-dire sans coordonnées. Évidemment, il est important de savoir manipuler la géométrie en coordonnées. C'est même nécessaire dès qu'on veut utiliser des arguments analytiques², et nous ne nous priverons pas de le faire³. Néanmoins, l'utilisation systématique de coordonnées peut être néfaste. Cela a tendance à briser les symétries et à masquer la nature géométrique d'un problème. Nous limiterons donc notre utilisation des coordonnées au strict nécessaire.

Par exemple, rappelons qu'un espace vectoriel réel de dimension n est certes isomorphe à \mathbb{R}^n , mais que cet isomorphisme n'a rien de canonique. Le choix de cet isomorphisme correspond au choix d'une base, qui est un acte de violence géométrique.

2. Les coordonnées mènent à l'analyse, et l'analyse mène au côté obscur.

3. Parfois, la tentation du côté obscur est trop forte.

Table des matières

1	Rappels de théorie des groupes	1
1.1	Actions de groupe	1
1.1.1	Vocabulaire des actions de groupe	1
1.1.2	Exercices	4
1.2	Produit semi-direct	5
1.2.1	Suites exactes courtes scindées	5
1.2.2	Structure de produit semi-direct	5
1.2.3	Exercices	7
2	Géométrie affine	9
2.1	Espaces affines	9
2.1.1	Définitions	9
2.1.2	Propriétés élémentaires	11
2.1.3	Vectorialisé	11
2.1.4	Définition alternative	12
2.1.5	Exercices	12
2.2	Barycentres	12
2.2.1	Définition	12
2.2.2	Propriétés du barycentre	13
2.2.3	Exercices	14
2.3	Sous-espaces affines	15
2.3.1	Définitions	15
2.3.2	Tangence	17
2.3.3	Intersections de sous-espaces affines	18
2.3.4	Exercices	19
2.4	Notions de repères	19
2.4.1	Familles génératrices	19
2.4.2	Familles libres, familles liées	20
2.4.3	Repères	21
2.4.4	Exercices	22
2.5	Applications affines	23
2.5.1	Définition	23
2.5.2	Partie linéaire	24
2.5.3	Action sur les sous-espaces affines	25
2.5.4	Action sur les repères	27
2.5.5	Espace affine comme hyperplan affine d'un espace vectoriel	28
2.5.6	Le théorème fondamental de la géométrie affine	29
2.5.7	Exercices	29
2.6	Le groupe affine	30
2.6.1	Le groupe affine	30

2.6.2	Existence de points fixes	31
2.6.3	Sous-groupes du groupe affine	32
2.6.4	Exercices	33
2.7	Coordonnées	34
2.7.1	Coordonnées barycentriques versus coordonnées cartésiennes	35
2.7.2	Équations de sous-espaces affines	36
2.7.3	Matrice d'une application affine	37
2.7.4	Exercices	37
2.8	Quelques théorèmes classiques	38
3	Géométrie euclidienne	45
3.1	L'exponentielle complexe	45
3.1.1	Propriétés de morphismes	45
3.1.2	Exercices	47
3.2	Espaces vectoriels euclidiens	47
3.2.1	Définitions	47
3.2.2	Isométries vectorielles	48
3.2.3	Le groupe orthogonal	48
3.2.4	Réduction des endomorphismes orthogonaux	51
3.2.5	Similitudes vectorielles	52
3.2.6	Exercices	53
3.3	Angles	54
3.3.1	Notions d'angles	54
3.3.2	Structure de groupe sur les angles orientés en dimension 2	55
3.3.3	Mesure d'un angle	57
3.3.4	Exercices	58
3.4	Espaces affines euclidiens	59
3.4.1	Espaces affines euclidiens et isométries affines	59
3.4.2	Le groupe des isométries	61
3.4.3	Classification des isométries affines	62
3.4.4	Angles dans un plan affine euclidien	64
3.4.5	Similitudes affines	66
3.4.6	Exercices	67
3.5	Nombres complexes et géométrie	70
3.5.1	Structure complexe sur un plan euclidien orienté	70
3.5.2	Exercices	71
4	Convexité	73
4.1	Ensembles convexes	73
4.1.1	Définitions	73
4.1.2	Enveloppe convexe	74
4.1.3	Théorèmes de Radon et Helly	76
4.1.4	Exercices	78
4.2	Hyperplans et séparation	79
4.2.1	Le théorème de Hahn–Banach	79
4.2.2	Hyperplans d'appui	81
4.2.3	Exercices	82
4.3	Points extrémaux	82
4.3.1	Définition et premières propriétés	83
4.3.2	Le théorème de Krein–Milman	83
4.3.3	Exercices	84

4.4	Projection sur un convexe complet	85
5	Géométrie projective	87
5.1	Espaces projectifs	88
5.1.1	Définitions	88
5.1.2	Sous-espaces	88
5.1.3	Familles libres et génératrices	89
5.1.4	Exercices	89
5.2	Homographies	90
5.2.1	Définitions	90
5.2.2	Action sur les sous-espaces	91
5.2.3	Repères projectifs	92
5.2.4	Exercices	93
5.3	Birapport	94
5.3.1	Définition	94
5.3.2	Birapport et homographies	95
5.3.3	Exercices	97
5.4	Lien affine–projectif	97
5.4.1	Cartes affines	97
5.4.2	Complété projectif	99
5.4.3	Sous-espaces et morphismes	99
5.4.4	Théorème de Pappus projectif	100
5.4.5	Exercices	102
5.5	Coordonnées homogènes	102
5.5.1	Définition et premières propriétés	102
5.5.2	Sous-espaces et homographies	103
5.5.3	Coordonnées homogènes et birapport	104
5.5.4	Coordonnées homogènes et coordonnées barycentriques	105
5.5.5	Exercices	105

Chapitre 1

Rappels de théorie des groupes

1.1 Actions de groupe

1.1.1 Vocabulaire des actions de groupe

Le but de cette section est de rappeler le vocabulaire des actions de groupe. Les références sont [10, sect. 1.1], [15, sect. I.4] et [6, Annexe I.A].

Notations 1.1.1. On note $H \leq G$ le fait que H soit un sous-groupe du groupe G . On note $H < G$ si de plus $H \neq G$. De la même façon, on note $H \trianglelefteq G$ (resp. $H \triangleleft G$) le fait que H soit un sous-groupe distingué (resp. strict) de G .

Définition 1.1.2. Soient G un groupe et X un ensemble non vide, une *action de groupe* de G sur X est un morphisme de groupe $\alpha : G \rightarrow \text{Bij}(X)$, où $\text{Bij}(X)$ est l'ensemble des bijections de X muni de la composition. On dit que G agit sur X et on note $G \curvearrowright X$. Soient $g \in G$ et $x \in X$, on note généralement $g \cdot x$ pour $\alpha(g)(x)$.

De façon équivalente, une action de G sur X est une application $G \times X \rightarrow X$, de la forme $(g, x) \mapsto g \cdot x$, telle que :

- $\forall x \in X, 1 \cdot x = x$,
- $\forall g, h \in G, \forall x \in X, g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.

Remarque 1.1.3. Ces définitions correspondent à la notion d'*action à gauche*. Il existe aussi une notion d'*action à droite* dont on ne parlera pas ici.

Exemples 1.1.4. 1. $\mathfrak{S}_n \curvearrowright \llbracket 1, n \rrbracket$ tautologiquement, plus généralement $\text{Bij}(X) \curvearrowright X$.

2. $GL_n(\mathbb{K}) \curvearrowright \mathbb{K}^n$, par la multiplication matricielle.

3. $G \curvearrowright G$ par translation à gauche : $g \cdot h := gh$.

4. $G \curvearrowright G$ par translation à droite par l'inverse : $g \cdot h := hg^{-1}$. Attention, il s'agit bien d'une action à gauche malgré le nom.

5. $G \curvearrowright G$ par conjugaison : $g \cdot h := ghg^{-1}$.

6. Si $G \curvearrowright X$ et $H \leq G$ alors $H \curvearrowright X$ par restriction.

7. Si $G \curvearrowright X$ alors $G \curvearrowright X^n$ diagonalement : $g \cdot (x_1, \dots, x_n) := (g \cdot x_1, \dots, g \cdot x_n)$.

8. Si $G \curvearrowright X$ alors G agit sur les fonctions de X dans Y par précomposition par l'inverse : $g \cdot f := f \circ g^{-1}$. L'inverse est important pour avoir une action à gauche.

Définition 1.1.5. Soit $\alpha : G \curvearrowright X$ une action, $\ker(\alpha)$ est appelé le *noyau de l'action*.

Exemple 1.1.6. Le noyau de l'action naturelle de $GL_{n+1}(\mathbb{K})$ sur l'ensemble $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ des droites vectorielles de \mathbb{K}^{n+1} est le sous-groupe des homothéties $\{\lambda \text{Id} \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\} \simeq \mathbb{K}^*$.

Définitions 1.1.7. Soit $G \curvearrowright X$ une action de groupe.

1. Pour tout $x \in X$, on note $G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\}$ l'orbite de x .
2. Pour tout $x \in X$, on note $\text{Stab}(x) := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ le *stabilisateur* de x .
3. Pour tout $g \in G$, on note $\text{Fix}(g) := \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$ l'ensemble de ses *points fixes*.

Le stabilisateur de $x \in X$ est un sous-groupe de G qui n'est en général pas distingué. Les stabilisateurs des éléments d'une même orbite sont conjugués :

$$\forall g \in G, \forall x \in X, \quad \text{Stab}(g \cdot x) = g \text{Stab}(x) g^{-1}. \quad (1.1)$$

L'action $G \curvearrowright X$ définit une relation d'équivalence sur X par : $x \sim y$ s'il existe $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$. Les orbites de $G \curvearrowright X$ sont les classes d'équivalence de cette relation. On note donc X/G l'ensemble des orbites.

Les orbites de $G \curvearrowright X$ partitionnent X . En particulier, une partie $A \subset X$ est stable sous l'action de G si et seulement si A est réunion d'orbites.

Notations 1.1.8. Soit $g \in G$, on note $\bar{g} := g \text{Stab}(x)$ sa classe à gauche modulo $\text{Stab}(x)$. On note aussi $G/\text{Stab}(x)$ l'ensemble des classes à gauche modulo $\text{Stab}(x)$.

Remarque 1.1.9. La classe \bar{g} est l'orbite de g sous l'action $\text{Stab}(x) \curvearrowright G$ obtenue par restriction de la translation à droite (cf. ex. 1.1.4.4) et $G/\text{Stab}(x)$ est l'ensemble des orbites de cette action.

La proposition suivante fait le lien entre l'orbite et le stabilisateur d'un point $x \in X$.

Proposition 1.1.10. Soient $G \curvearrowright X$ et $x \in X$, l'application

$$\begin{array}{ccc} G/\text{Stab}(x) & \longrightarrow & G \cdot x \\ \bar{g} & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

est une bijection.

Démonstration. Si $\bar{g} = \bar{g}'$ il existe $h \in \text{Stab}(x)$ tel que $gh = g'$ et on a :

$$g' \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x.$$

Donc $\bar{g} \mapsto g \cdot x$ est bien définie. Cette application à valeurs dans $G \cdot x$ est clairement surjective, reste à montrer l'injectivité. Si $g \cdot x = g' \cdot x$ alors $g^{-1}g' \in \text{Stab}(x)$ et $\bar{g} = \bar{g}'$. \square

Définition 1.1.11. Soit $H \leq G$, on note $(G : H)$ son *indice*, c'est-à-dire le cardinal (éventuellement infini) de l'ensemble G/H des classes à gauche modulo H .

Corollaire 1.1.12 (Formule des classes). Soient $G \curvearrowright X$ et R un ensemble de représentants des orbites de cette action. On a :

$$|X| = \sum_{x \in R} |G \cdot x| = \sum_{x \in R} |G/\text{Stab}(x)| = \sum_{x \in R} (G : \text{Stab}(x)). \quad (1.2)$$

Une application de la formule des classes est donnée dans l'exercice 1.1.

Définitions 1.1.13. Soit $\alpha : G \rightarrow \text{Bij}(X)$ une action de groupe. On dit que l'action est :

- *fidèle* si α est injectif, i.e. si le seul élément de G agissant par id_X est 1 ;
- *libre* si G agit sans point fixe, i.e. si pour tout $g \in G \setminus \{1\}$, $\text{Fix}(g) = \emptyset$;
- *transitive* s'il n'y a qu'une orbite, i.e. si $\forall x, y \in X$, $\exists g \in G$ tel que $y = g \cdot x$;
- *simplement transitive* si l'action est à la fois libre et transitive, i.e. si pour tout $x, y \in X$ il existe un unique $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$.

Notons qu'une action libre est nécessairement fidèle car on a demandé $X \neq \emptyset$ dans la définition d'une action de groupe (cf. def. 1.1.2).

Définition 1.1.14. On dit qu'une action $G \curvearrowright X$ est *n-transitive* si pour tout n -uplets de points distincts (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) il existe $g \in G$ tel que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, g \cdot x_i = y_i$.

Exemple 1.1.15. L'action tautologique de \mathfrak{S}_n sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ est n -transitive.

Exemple 1.1.16. Si $d \geq 2$, le groupe des homéomorphismes de \mathbb{R}^d agit n -transitivement sur \mathbb{R}^d pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $d = 1$, l'action sur \mathbb{R} des homéomorphismes de \mathbb{R} est 2-transitive mais pas 3-transitive.

Le lemme suivant servira lorsqu'on définira les espaces affines dans le chapitre 2 (voir [10, p. 3]).

Lemme 1.1.17. Soient G un groupe commutatif et $G \curvearrowright X$ une action fidèle et transitive, alors cette action est simplement transitive.

Démonstration. On sait déjà que l'action est transitive, il suffit donc de montrer qu'elle est libre. Soit $g \in G$ qui possède un point fixe $y \in X$. Montrons que g agit par l'identité. Comme l'action est fidèle, cela montrera que $g = 1$.

Soit $x \in X$, comme G agit transitivement, il existe $h \in G$ tel que $x = h \cdot y$. On a alors

$$g \cdot x = (gh) \cdot y = (hg) \cdot y = h \cdot y = x.$$

Donc pour tout $x \in X, g \cdot x = x$. □

Dans le cas d'une action simplement transitive $G \curvearrowright X$, on a pour tout $x \in X$ une bijection

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto g \cdot x. \end{aligned}$$

On peut donc lire les mêmes informations sur le groupe G (algébriquement) et sur l'espace X (géométriquement).

Lorsque l'action $\alpha : G \rightarrow \text{Bij}(X)$ n'est pas fidèle, l'action induite $\ker(\alpha) \curvearrowright X$ est triviale. Quand on fait de la géométrie, on s'intéresse plus à la façon dont le groupe agit qu'au groupe lui-même. On se ramène souvent à une action fidèle en considérant l'action induite $\bar{\alpha} : G/\ker(\alpha) \rightarrow X$. Ce procédé s'appelle la *fidélisation* de l'action.

Exemple 1.1.18. L'action $GL_{n+1}(\mathbb{K}) \curvearrowright \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ de l'exemple 1.1.6 induit une action fidèle $PGL_{n+1}(\mathbb{K}) \curvearrowright \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ où $PGL_{n+1}(\mathbb{K}) := GL_{n+1}(\mathbb{K})/\mathbb{K}^*$.

Lorsque l'action $G \curvearrowright X$ n'est pas transitive, on cherche à la comprendre en classifiant ses orbites. Cela passe généralement par la recherche d'*invariants*, c'est-à-dire d'applications constantes le long des orbites. Ces applications sont généralement à valeurs numériques ou dans un ensemble combinatoire. Un invariant $i : X \rightarrow Y$ induit une application $\bar{i} : X/G \rightarrow Y$. On dit que i est un *invariant total* si \bar{i} est injective.

Exemple 1.1.19. Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ agit naturellement sur les sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^n . La dimension est un invariant total pour cette action.

Une fois que l'on a classifié les orbites, on cherche souvent une *forme normale* pour chacune d'entre elles, c'est-à-dire un représentant privilégié. Ce choix est subjectif et on choisit en général un représentant sur lequel on peut lire facilement la nature géométrique et les éléments caractéristiques associés.

Exemple 1.1.20. Si on note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{K}^n , un choix possible de forme normale dans l'exemple 1.1.19 est de représenter l'orbite des sous-espaces de dimension $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ par $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

Exemple 1.1.21. La réduction des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la recherche de forme normale pour les orbites de l'action $GL_n(\mathbb{K}) \curvearrowright \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par conjugaison : $P \cdot M := PMP^{-1}$.

Exemple 1.1.22. Le groupe spécial orthogonal $SO_2(\mathbb{R})$ agit naturellement sur les couples de demi-droites vectorielles de \mathbb{R}^2 . Cette action est fidèle mais non transitive. Les orbites de cette action sont appelées *angles (orientés de demi-droites)*, on verra d'autres notions d'angles plus loin, voir chap. 3).

Pour tout couple (D_1, D_2) de demi-droites de \mathbb{R}^2 , il existe un unique $O \in SO_2(\mathbb{R})$ tel que $OD_1 = D_2$. Le choix d'un isomorphisme $SO_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ permet d'associer à chaque angle un réel modulo 2π appelé *mesure* de cet angle. La mesure d'un angle est un invariant total pour cette action.

Un choix possible de forme normale est de représenter chaque angle par l'unique couple de demi-droites (D_1, D_2) de cette orbite tel que $D_1 = \mathbb{R}_+ \times \{0\}$ (i.e D_1 est le demi-axe horizontal droit).

Un autre exemple de cette stratégie d'étude des actions de groupes est détaillée dans le premier chapitre de [6]. Il s'agit, entre autre, de voir le rang d'une matrice comme un invariant pour une certaine action.

1.1.2 Exercices

Exercice 1.1 (Centre d'un p -groupe, [15] p. 16). Soient p premier et $n \in \mathbb{N}^*$, soit G un groupe de cardinal p^n , montrer que le centre de G est non trivial.

Exercice 1.2 (Groupe symétrique). 1. Démontrer que l'action naturelle $\mathfrak{S}_n \curvearrowright \llbracket 1, n \rrbracket$ est n -transitive.

2. Démontrer que l'action naturelle $\mathfrak{A}_n \curvearrowright \llbracket 1, n \rrbracket$ est $(n-2)$ -transitive, mais pas $(n-1)$ -transitive.

3. Que dire d'une action $(n-1)$ -transitive sur $\llbracket 1, n \rrbracket$?

Exercice 1.3 (Un exemple de fidélisation). Soit \mathbb{K} un corps, on considère l'action naturelle de $GL_{n+1}(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{K}^{n+1} .

1. Déterminer le noyau de cette action.

2. En déduire que $PGL_n(\mathbb{K}) := GL_{n+1}(\mathbb{K})/\{\lambda \text{Id} \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\}$ agit fidèlement sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

3. Dans le cas $n = 1$, montrer que l'action est 2-transitive et déterminer le stabilisateur de $(\mathbb{K} \times \{0\}, \{0\} \times \mathbb{K})$.

4. Toujours pour $n = 1$, montrer que l'action est 3-transitive. Est-elle k -transitive pour $k > 3$?

5. Qu'en est-il pour $n \geq 2$?

Exercice 1.4 (Action diagonale). Soient $G \curvearrowright X$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *action diagonale* de G sur X^n l'action définie par :

$$\forall g \in G, \forall (x_1, \dots, x_n) \in X^n, \quad g \cdot (x_1, \dots, x_n) := (g \cdot x_1, \dots, g \cdot x_n).$$

1. À quelle condition l'action diagonale $G \curvearrowright X^n$ est-elle transitive ?

2. On note $X^{(n)} := \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}$. Montrer que l'action diagonale stabilise $X^{(n)}$.

3. À quelle condition l'action restreinte $G \curvearrowright X^{(n)}$ est-elle transitive (resp. simplement transitive) ?

1.2 Produit semi-direct

Plusieurs groupes importants en géométrie classique se décomposent comme produits semi-directs, par exemple le groupe affine (voir chap. 2). Dans cette section, nous rappelons la définition d'un produit semi-direct de deux groupes (cf. [15, sect. I.6]) et motivons l'introduction de cette notion. On pourra aussi consulter [6, sect. II.5].

1.2.1 Suites exactes courtes scindées

Soit $N \triangleleft G$ un sous-groupe distingué non trivial, alors on a une suite exacte courte :

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow G/N \longrightarrow 1 .$$

Si de plus G est fini, alors N et G/N sont de cardinal strictement plus petit que G . En itérant ce procédé, on peut "dévisser" G en un nombre fini de pièces élémentaires : les groupes finis simples. Deux questions se posent alors. La première est de classifier les pièces élémentaires. La classification des groupes finis simples a fait l'objet de nombreux travaux, principalement dans la seconde moitié du 20ème siècle. Elle est aujourd'hui considérée comme achevée. Le second problème naturel est de chercher à reconstruire G à partir de N et G/N .

On se pose le problème suivant : soient N et H deux groupes, déterminer quels sont les groupes G qui s'inscrivent dans une suite exacte courte de la forme

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \longrightarrow 1 . \quad (1.3)$$

Un candidat naturel est le produit direct $N \times H$, mais cela ne suffit pas. Par exemple, si G est un groupe de cardinal 6 il s'inscrit dans une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 ,$$

or \mathfrak{S}_3 est de cardinal 6 mais différent de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Le produit semi-direct permet de construire d'autres groupes qui s'inscrivent dans la suite exacte (1.3), lorsque celle-ci est scindée.

Définitions 1.2.1. Soit $p : G \rightarrow H$ un morphisme surjectif, une *section* de p est un morphisme de groupe $s : H \rightarrow G$ tel que $p \circ s = \text{id}_H$. On dit que la suite exacte (1.3) est *scindée*, s'il existe une section de p . On a alors un diagramme de la forme :

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{s} \end{array} H \longrightarrow 1 . \quad (1.4)$$

Exemple 1.2.2. Soit $n \geq 2$, la signature $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$ est surjective de noyau \mathfrak{A}_n . Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$ une transposition, alors $s_\tau : \{-1, 1\} \rightarrow \mathfrak{S}_n$, définie par $s_\tau(1) := \text{id}$ et $s_\tau(-1) := \tau$, est une section de ε . On a donc une suite exacte courte scindée :

$$1 \longrightarrow \mathfrak{A}_n \xrightarrow{i} \mathfrak{S}_n \begin{array}{c} \xrightarrow{\varepsilon} \\ \xleftarrow{s_\tau} \end{array} \{-1, 1\} \longrightarrow 1 .$$

1.2.2 Structure de produit semi-direct

Supposons que l'on ait une suite exacte scindée de la forme (1.4). Comme i est injective, on peut identifier N à son image $i(N) = \ker(p)$. On a alors $N \trianglelefteq G$. Par ailleurs, on a

$H \simeq s(H) \leq G$ et $s(H) \cap N = \{1\}$. Comme N est distingué, $H \curvearrowright N$ par automorphismes via :

$$\forall h \in H, \forall n \in N, \quad h \cdot n := s(h)ns(h)^{-1}.$$

On note $\phi_s : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ le morphisme défini par $\phi_s(h) : n \mapsto s(h)ns(h)^{-1}$ pour tout $h \in H$.

Lemme 1.2.3. *L'application $f_s : N \times H \rightarrow G$, $(n, h) \mapsto ns(h)$ est une bijection.*

Démonstration. Soient $n_1, n_2 \in N$ et $h_1, h_2 \in H$ tels que $n_1s(h_1) = n_2s(h_2)$. On a alors

$$(n_2)^{-1}n_1 = s(h_2(h_1)^{-1}) \in N \cap s(H) = \{1\},$$

d'où $n_1 = n_2$ et $h_1 = h_2$. Donc f_s est injective.

Soit $g \in G$, on pose $h := p(g)$. Alors $p(s(h)) = p(g)$, donc $n := gs(h)^{-1} \in \ker(p) = N$ et $g = f_s(n, h)$. Donc f_s est surjective. \square

Si $N \times H$ est muni de la loi de groupe produit, f_s n'est en général pas un morphisme (voir le cas de \mathfrak{S}_n , ex. 1.2.2). On cherche justement à définir une bonne loi de groupe sur $N \times H$ pour faire de f_s un morphisme de groupe. Soient $n_1, n_2 \in N$ et $h_1, h_2 \in H$, on a :

$$\begin{aligned} f_s(n_1, h_1)f_s(n_2, h_2) &= n_1s(h_1)n_2s(h_2) \\ &= n_1s(h_1)n_2s(h_1)^{-1}s(h_1)s(h_2) \\ &= f_s(n_1s(h_1)n_2s(h_1)^{-1}, h_1h_2) \\ &= f_s(n_1(\phi_s(h_1)(n_2)), h_1h_2). \end{aligned}$$

Cela suggère de poser $(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) := (n_1(\phi_s(h_1)(n_2)), h_1h_2)$. Plus généralement, cela motive la définition suivante.

Définition 1.2.4. Soient N et H deux groupes et $\phi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ un morphisme. On appelle *produit semi-direct* de N par H relativement à ϕ , et on note $N \rtimes_{\phi} H$, l'ensemble $N \times H$ muni de la loi de groupe définie par :

$$\forall n_1, n_2 \in N, \forall h_1, h_2 \in H, \quad (n_1, h_1) \cdot_{\phi} (n_2, h_2) := (n_1(\phi(h_1)(n_2)), h_1h_2). \quad (1.5)$$

Lemme 1.2.5. *La formule (1.5) définit bien une loi de groupe sur $N \times H$. Le neutre pour cette loi est $(1_N, 1_H)$ et l'inverse d'un élément (n, h) est $(\phi(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1})$.*

Démonstration. La preuve est directe. Ne pas oublier de vérifier l'associativité de la loi. \square

Remarque 1.2.6. Si ϕ est l'application constante $h \mapsto \text{id}_N$ alors $N \rtimes_{\phi} H = N \times H$.

Proposition 1.2.7. *Soit une suite exacte scindée de la forme (1.4), on définit ϕ_s comme ci-dessus et f_s comme dans le lemme 1.2.3. Alors $f_s : N \rtimes_{\phi_s} H \rightarrow G$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Le lemme 1.2.3 montre que f_s est une bijection. Il suffit de vérifier que c'est un morphisme de groupe. On a bien $f_s(1_N, 1_H) = 1_G$, et on a défini la loi de groupe sur $N \rtimes_{\phi_s} H$ pour que $f_s(n_1, h_1)f_s(n_2, h_2) = f_s((n_1, h_1) \cdot_{\phi_s} (n_2, h_2))$ pour tout $n_1, n_2 \in N$ et $h_1, h_2 \in H$ (voir le calcul précédant la définition 1.2.4). \square

Exemple 1.2.8. Soit $n \geq 2$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$ une transposition, on définit s_{τ} comme dans l'exemple 1.2.2. On a alors $\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{A}_n \rtimes_{\phi_{s_{\tau}}} \{-1, 1\}$.

Remarques 1.2.9. Si on fait un autre choix pour τ , alors on obtient un morphisme $\phi_{s\tau}$ différent. Cela montre que, dans la définition 1.2.4, on peut avoir ϕ_1 et ϕ_2 deux morphismes différents de H vers $\text{Aut}(N)$ tels que $N \rtimes_{\phi_1} H \simeq N \rtimes_{\phi_2} H$.

Dans la situation où l'on a une suite exacte scindée de la forme (1.4), c'est une manifestation du fait qu'il n'y a pas unicité de la section s de p , donc pas unicité de $s(H) \leq G$ ni de ϕ_s . En particulier, l'isomorphisme f_s dans la proposition 1.2.7 dépend de s . On a donc $G \simeq N \rtimes_{\phi_s} H$ mais pas de façon canonique.

Inversement, soient N et H deux groupes et $\phi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ un morphisme de groupe. Notons $G = N \rtimes_{\phi} H$, on obtient une suite exacte scindée de la forme (1.4) en définissant $i : n \mapsto (n, 1_H)$, $p : (n, h) \mapsto h$ et $s : h \mapsto (1_N, h)$. Alors ϕ se réalise dans G comme l'action $s(H) \curvearrowright N$ par conjugaison.

Lemme 1.2.10. Avec les notations précédentes, pour tout $n \in N$ et tout $h \in H$, on a :

$$s(h) \cdot_{\phi} (n, 1_H) \cdot_{\phi} s(h)^{-1} = (\phi(h)(n), 1_H).$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} s(h) \cdot_{\phi} (n, 1_H) \cdot_{\phi} s(h)^{-1} &= (1_N, h) \cdot_{\phi} (n, 1_H) \cdot_{\phi} (1_N, h)^{-1} \\ &= (\phi(h)(n), h) \cdot_{\phi} (1_N, h^{-1}) \\ &= (\phi(h)(n), 1_H). \end{aligned} \quad \square$$

Au final, on a montré le résultat suivant.

Proposition 1.2.11. Soient N , G et H trois groupes, alors G est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes H$ si et seulement si N , G et H s'inscrivent dans une suite exacte courte scindée de la forme (1.4).

Dans ce cas, N est isomorphe au sous-groupe distingué $i(N) = \ker(p) \trianglelefteq G$, H est isomorphe à $s(H) \leq G$ et on a $s(H) \cap i(N) = \{1_G\}$. De plus, le morphisme $\phi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ définissant le produit semi-direct se réalise comme l'action par conjugaison $s(H) \curvearrowright N$ dans G .

Remarque 1.2.12. Attention, tous les groupes non simples ne se réalisent pas comme produits semi-directs. De façon équivalente, toutes les suites exactes courtes ne sont pas scindées. Par exemple, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ s'inscrit dans la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

et cette suite est la seule suite exacte courte non triviale dont l'élément central est $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Cependant, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas un produit semi-direct $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En effet, le seul produit semi-direct $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est en fait le produit direct qui ne contient pas d'élément d'ordre 4. Alternativement, si p possédait une section s alors il y aurait deux éléments d'ordre 2 distincts dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: $i(1)$ et $s(1)$.

1.2.3 Exercices

Exercice 1.5 (Produit semi-direct 2). Soient N et H deux groupes et soit $G = N \rtimes H$. Montrer que si G est abélien alors $G = N \times H$.

Exercice 1.6 (Groupes de cardinal 6). Montrer que $\mathfrak{S}_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer que \mathfrak{S}_3 et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sont les seuls groupes de cardinal 6.

Exercice 1.7 (Groupes symétriques, [15] p. 23). Montrer que $\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{A}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le produit est-il direct ?

Exercice 1.8 (Groupes diédraux, [15] p. 23). Soit D_n le groupe diédral d'ordre n , c'est-à-dire le groupe des isométries d'un n -gone régulier du plan euclidien. Montrer que D_n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le produit est-il direct ?

Exercice 1.9. Montrer qu'il existe au moins trois produits semi-directs $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ non isomorphes.

Exercice 1.10 (Wait a minute). Dans les exercices 1.6 et 1.8 on n'a pas précisé par quel morphisme était définie la structure de produit semi-direct. Pourquoi ? Dans ces exercices, les isomorphismes sont-ils canoniques ?

Définition 1.2.13 ([15] p. 13). Le *groupe de quaternions*, noté H_8 est le groupe de cardinal 8 dont les éléments sont notés $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ et dont la loi est définie par la règle usuelle pour les signes et :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad \text{et} \quad ki = -ik = j.$$

Exercice 1.11 (And again, [15] p. 24). Montrer que ni $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, ni H_8 ne s'écrivent comme des produits semi-directs non triviaux.

Remarque 1.2.14. Le dernier exercice ci-dessous est plus difficile et constitue un développement classique. La solution est détaillée dans [15, pp. 27–28]. La preuve utilise les théorèmes de Sylow [15, sect. I.5] et une partie de la description des automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [15, sect. I.7]. Ces deux points sont aussi souvent proposés en développement.

Exercice 1.12 (Groupes de cardinal pq , cf. [15] pp. 27–28). Déterminer les groupes de cardinal pq avec p, q premiers et $p < q$. En particulier, pour $p = 2$ et $q \geq 3$ montrer qu'il n'y a que $\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$ et D_q .

Chapitre 2

Géométrie affine

Dans ce chapitre, on définit les espaces affines et on étudie leur géométrie. Dans l'idée, on veut construire une géométrie dans laquelle on sait formaliser les notions intuitives de points, droites, plans et leurs analogues de dimensions supérieures. On veut également pouvoir donner un sens aux notions d'alignement, d'incidence, de parallélisme et de tangence. On sait déjà faire cela dans un espace vectoriel, mais dans un espace vectoriel 0 est un point privilégié. Les espaces affines répondent à la même problématique mais sont homogènes, au sens où ils ne possèdent pas de point privilégié.

La géométrie affine n'est pas une géométrie métrique. Les notions de distance, de volume, d'angle, etc. n'y ont pas de sens. On verra néanmoins que les rapports de distances ou de volumes sont des notions affines.

Lorsque le corps de base est \mathbb{R} , les espaces affines sont le cadre naturel pour formuler le calcul différentiel. Contrairement à ce qui se passe sur un espace vectoriel, le formalisme des espaces affines différencie bien l'espace et son espace tangent, ce qui clarifie la situation. En ce sens, la géométrie affine est un premier pas vers la notion de variété différentielle. C'est aussi le cadre naturel pour formuler la physique newtonienne.

Le point de vue présenté ici est essentiellement celui de [10, chap. A]. On pourra aussi consulter [4, T. 1 chap. 2], ou avec un point de vue légèrement différent [2, chap. 1], [12, Ann. A] ou [20, chap. 2].

2.1 Espaces affines

Dans cette section, on définit la notion d'espace affine. Cette définition s'appuie sur les notions d'espace vectoriel et d'action de groupe. Le jeu consistera ensuite à traduire en termes géométriques les résultats élémentaires d'algèbre linéaire.

2.1.1 Définitions

Définition 2.1.1. Un *espace affine* sur le corps \mathbb{K} est un triplet (\mathcal{E}, E, τ) où :

- \mathcal{E} est un ensemble non vide,
- E est un \mathbb{K} -espace vectoriel,
- $\tau : E \curvearrowright \mathcal{E}$ est une action simplement transitive du groupe additif de E sur \mathcal{E} .

Remarque 2.1.2. D'après le lemme 1.1.17, il suffit de vérifier que τ est fidèle et transitive.

Exemple 2.1.3 (Exemple fondamental). Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit $\tau : E \curvearrowright E$ l'action par translation du groupe additif de E sur E (i.e $\tau(u)(A) := A + u$, pour tout A et $u \in E$). Alors (E, E, τ) est un espace affine. En effet, soient A et $B \in \mathcal{E}$, alors l'unique $u \in E$ tel que $A + u = B$ est $u := B - A$. L'action τ est donc bien simplement transitive.

Définitions 2.1.4. • Les éléments de \mathcal{E} sont appelés les *points* de l'espace affine.

- Les éléments de E sont appelés *vecteurs*.
- Soit $u \in E$, $\tau(u)$ est appelée la *translation* de vecteur u .
- On dit que E est la *direction* de (\mathcal{E}, E, τ) .

Un espace affine est donc un ensemble de points sur lequel on a défini une notion raisonnable de translation.

Notations 2.1.5. Soient $A \in \mathcal{E}$ et $u \in E$, nous noterons dorénavant $A + u$ pour $\tau(u)(A)$. Dans l'exemple fondamental 2.1.3, la loi $+$ venant de l'action $E \curvearrowright \mathcal{E}$ par translation se confond alors avec l'addition de E vu comme espace vectoriel.

Autant que possible, on notera les points de \mathcal{E} par des lettres majuscules (A, B, \dots) et les vecteurs de E par des minuscules (u, v, \dots).

Par abus de langage, on parlera souvent de l'espace affine \mathcal{E} , en sous-entendant la direction E et l'action par translation τ . On dira par exemple que E est la direction de \mathcal{E} . Cet abus est commun, mais attention, \mathcal{E} ne suffit absolument pas à définir un espace affine. Par exemple, on peut définir un espace affine (\mathcal{E}, E, τ) où $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$, $E = \mathbb{R}^m$ et $m \neq n$.

Exemple 2.1.6. Soient \mathcal{E} et \mathcal{F} deux espaces affines sur \mathbb{K} , de direction E et F respectivement, alors $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ est naturellement muni d'une structure de \mathbb{K} -espace affine de direction $E \times F$.

Définitions 2.1.7. On appelle *dimension* de \mathcal{E} (en fait de l'espace affine (\mathcal{E}, E, τ)) la dimension de E en tant que \mathbb{K} -espace vectoriel. La dimension de \mathcal{E} est notée $\dim(\mathcal{E})$. On dit que \mathcal{E} est un *point* si $\dim(\mathcal{E}) = 0$, une *droite* si $\dim(\mathcal{E}) = 1$ et un *plan* si $\dim(\mathcal{E}) = 2$.

Exemple 2.1.8. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y)$ peut être muni d'une structure d'espace affine sur \mathbb{K} de direction $\ker(f)$. Sa dimension est alors $\dim(E) - \text{rg}(f)$, si E est de dimension finie.

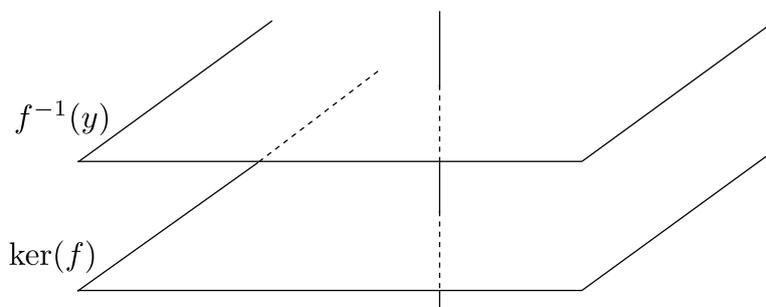


Figure 2.1 – Hyperplan affine d'un espace vectoriel.

Exemple 2.1.9 (Cas particulier du précédent). L'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients continus et second membre continu (disons de \mathbb{R} dans \mathbb{R}) est un espace affine réel dont la direction est l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée.

Remarque 2.1.10. Dans l'exemple 2.1.9, on n'a pas besoin du théorème de Cauchy–Lipschitz linéaire pour obtenir la structure de l'espace des solutions. Le théorème de Cauchy–Lipschitz donne la dimension de l'espace des solutions et établit un isomorphisme explicite entre cet espace et l'espace des conditions initiales.

Exemple 2.1.11. Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F un sous-espace de E . Soit \mathcal{S} l'ensemble des sous-espaces de E supplémentaires de F . Alors on peut munir \mathcal{S} d'une structure d'espace affine dont la direction est $\mathcal{L}(E/F, F)$, l'espace des applications linéaires de E/F dans F

2.1.2 Propriétés élémentaires

Notation 2.1.12. Soient A et B deux points d'un espace affine \mathcal{E} , on note \overrightarrow{AB} l'unique vecteur de E tel que $A + \overrightarrow{AB} = B$. L'existence et l'unicité sont assurées par la simple transitivité de l'action.

Proposition 2.1.13. Pour tout A, B et $C \in \mathcal{E}$ on a :

- $\overrightarrow{AA} = 0$,
- $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$,
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Le dernier point est connu sous le nom de relation de Chasles.

Démonstration. Ces propriétés sont la traduction directe des axiomes définissant l'action $E \curvearrowright \mathcal{E}$. Ainsi 0 agit par l'identité de \mathcal{E} , donc pour tout $A \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{AA} = 0$.

Soient A, B et $C \in \mathcal{E}$, on a :

$$C = B + \overrightarrow{BC} = (A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).$$

Donc par définition $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Pour $A = C$, on obtient bien $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0$. \square

Proposition 2.1.14 (Identité du parallélogramme). Soient A, B, C et D quatre points d'un espace affine \mathcal{E} , alors on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

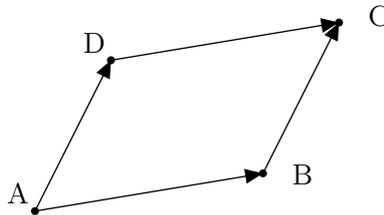


Figure 2.2 – Identité du parallélogramme.

Démonstration. La relation de Chasles donne immédiatement : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$. Donc $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$. \square

2.1.3 Vectorialisé

Soit \mathcal{E} un espace affine de direction E . Pour tout $O \in \mathcal{E}$ on définit $\Theta_O : E \rightarrow \mathcal{E}$, par $u \mapsto O + u$. L'action $E \curvearrowright \mathcal{E}$ étant simplement transitive, Θ_O est une bijection pour tout $O \in \mathcal{E}$. Nous verrons plus loin que c'est même une application affine, quand nous aurons défini cette notion.

Soit $O \in \mathcal{E}$, on peut identifier \mathcal{E} à E via Θ_O . Cela permet de munir \mathcal{E} d'une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel qui rend Θ_O linéaire. L'espace vectoriel ainsi construit est appelé le *vectorialisé* de \mathcal{E} en O .

Vectorialiser en O permet de munir \mathcal{E} d'une structure d'espace vectoriel en choisissant une origine. Cette structure n'a rien de canonique, deux choix différents d'origine donnent

des structures d'espaces vectoriels qui n'ont pas le même zéro, ni la même addition. Cette opération brise l'homogénéité de l'espace et n'apporte en général pas plus que le confort de se ramener à la structure plus familière d'espace vectoriel. En tout état de cause, vectorialiser en O n'a de sens que si O est déjà un point privilégié pour le problème que l'on considère.

2.1.4 Définition alternative

Certains auteurs, comme [2] ou [12], utilisent la définition suivante d'un espace affine, où l'action de la direction est moins apparente. On pourra montrer à titre d'exercice que cette définition est équivalente à la définition 2.1.1.

Définition 2.1.15. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, un *espace affine* de direction E est la donnée d'un ensemble \mathcal{E} non vide et d'une application $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow E$, $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ telle que :

- pour tout $A \in \mathcal{E}$, $B \mapsto \overrightarrow{AB}$ est une bijection de \mathcal{E} dans E ,
- pour tout A, B et $C \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

2.1.5 Exercices

Exercice 2.1. Soient \mathcal{E} un espace affine de direction E et F un sous-espace vectoriel de E . On note \mathcal{E}/F l'ensemble des orbites de \mathcal{E} sous l'action de F par translation. Montrer que \mathcal{E}/F peut être muni d'une structure d'espace affine de direction E/F .

Exercice 2.2 (Carte affine sur la grassmannienne, [4] T. 1 p. 60). Soient F un sous-espace de l'espace vectoriel de dimension finie E et \mathcal{S} l'ensemble $\{G \mid G \oplus F = E\}$ des supplémentaires de F . Montrer que \mathcal{S} est un espace affine dirigé par $\mathcal{L}(E/F, F)$.

Exercice 2.3 (Définition équivalente, [2] p. 9). Montrer que les définitions 2.1.1 et 2.1.15 sont équivalentes.

2.2 Barycentres

Dans un espace affine \mathcal{E} , on ne dispose pas de loi interne. On peut cependant définir quelque chose qui s'en approche : le barycentre d'un ensemble fini de points pondérés. Cette notion sert, entre autre, à formaliser le concept de centre de masse.

Former le barycentre d'un ensemble de points pondérés est, en un sens, la loi naturelle sur un espace affine. Cette opération est définie directement à partir de l'action $E \curvearrowright \mathcal{E}$ définissant la structure affine, et elle permet à son tour de définir simplement les notions de sous-espace affine et d'application affine.

2.2.1 Définition

Définitions 2.2.1. Soit \mathcal{E} un \mathbb{K} -espace affine, on appelle *point pondéré* de \mathcal{E} tout couple $(A, \lambda) \in \mathcal{E} \times \mathbb{K}$. Soient $(A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n)$ une famille de points pondérés, on appelle *masse totale* de cette famille le scalaire $\sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Lemme 2.2.2. Soit \mathcal{E} un \mathbb{K} -espace affine de direction E . Soient A_1, \dots, A_n des points de \mathcal{E} et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, alors l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\longrightarrow E \\ M &\longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{MA_i} \end{aligned} \tag{2.1}$$

est constante si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, et est une bijection sinon.

Démonstration. Soient O et $M \in \mathcal{E}$, par la relation de Chasles on a :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \overrightarrow{OM} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{MA_i}. \quad (2.2)$$

Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, on a donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ pour tout O et M et l'application (2.1) est constante.

Sinon, soit $O \in \mathcal{E}$, d'après l'équation (2.2), pour tout $u \in E$, l'unique $M \in \mathcal{E}$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = u$ est défini par :

$$M := O + \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i} - u \right),$$

où $m := \sum_{i=1}^n \lambda_i$. L'application (2.1) est donc une bijection. \square

Définition 2.2.3. Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de points pondérés de \mathcal{E} . Si la masse totale de cette famille est non nulle, on définit le *barycentre* des (A_i, λ_i) comme l'unique point $G \in \mathcal{E}$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0$.

Proposition 2.2.4. Soient $G \in \mathcal{E}$ et $(A_i, \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de points pondérés de masse totale non nulle, les conditions suivantes sont équivalentes :

- G est le barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$,
- il existe $O \in \mathcal{E}$ tel que : $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \overrightarrow{OG}$,
- pour tout $O \in \mathcal{E}$ on a : $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \overrightarrow{OG}$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de (2.2) appliquée pour $M = G$. \square

Définitions 2.2.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ non divisible par la caractéristique $\text{car}(\mathbb{K})$ du corps \mathbb{K} , alors l'*isobarycentre* (ou *centre de gravité*) des points $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ est le barycentre des points pondérés $(A_1, 1), \dots, (A_n, 1)$. Lorsque $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, l'isobarycentre de A et B est appelé le *milieu* de A et B .

2.2.2 Propriétés du barycentre

Proposition 2.2.6 (Homogénéité du barycentre). Soient $(A_i, \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ telle que $\sum \lambda_i \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$, alors le barycentre G des $(A_i, \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est aussi le barycentre des $(A_i, \alpha \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

Démonstration. On a $\sum_{i=1}^n \alpha \lambda_i = \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$.

De plus, $\sum_{i=1}^n \alpha \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0$. \square

Notations 2.2.7. Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de points pondérés de \mathcal{E} .

- Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, l'application (2.1) est constante et on note $\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \in E$ la valeur de cette constante.
- Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, on note $\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \in \mathcal{E}$ le barycentre des (A_i, λ_i) .
- D'après la proposition 2.2.6, lorsque $m := \sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$, le barycentre des (A_i, λ_i) est $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{m} A_i \in \mathcal{E}$, ce que l'on notera aussi $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i$.

Remarque 2.2.8. Ces notations sont purement formelles mais elles ne sont pas arbitraires ; elles correspondent à ce que l'on pense dans le cas d'un sous-espace affine d'un espace vectoriel. On verra plus loin (section 2.5.5) que tout espace affine est isomorphe à un hyperplan affine dans un espace vectoriel.

Exemples 2.2.9. • Le milieu de A et B est noté, assez intuitivement, $\frac{1}{2}(A + B)$.

- $B - A$ est l'unique vecteur de E atteint par l'application $M \mapsto \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}$, c'est-à-dire $B - A = \overrightarrow{AB}$.

Proposition 2.2.10 (Associativité du barycentre). Soit $p \in \mathbb{N}^*$, soient $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(A_{ij}, \lambda_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n_i \rrbracket}}$ une famille de points pondérés de \mathcal{E} . Supposons que :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} \neq 0 \quad \text{et que} \quad \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} \neq 0.$$

On note G le barycentre des $(A_{ij}, \lambda_{ij})_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$, et pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ on note G_i le barycentre des $(A_{ij}, \lambda_{ij})_{j \in \llbracket 1, n_i \rrbracket}$. Alors G est aussi le barycentre de la famille $(G_i, \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij})$.

Démonstration. On a :

$$\sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} \right) \overrightarrow{GG_i} = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} \overrightarrow{GG_i} + \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} \overrightarrow{G_i A_{ij}} \right) = \sum_{i,j} \lambda_{ij} \overrightarrow{G A_{ij}} = 0. \quad \square$$

Remarque 2.2.11. On peut reformuler ceci en utilisant les notations 2.2.7. On obtient alors :

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{\sum_{ij} \lambda_{ij}} \sum_{ij} \lambda_{ij} A_{ij} = \frac{1}{\sum_{ij} \lambda_{ij}} \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} \right) \left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij}} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} A_{ij} \right) \\ &= \frac{1}{\sum_{ij} \lambda_{ij}} \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} \right) G_i, \end{aligned}$$

ce qui semble une évidence. Preuve que les notations sont bien faites.

Remarque 2.2.12. Soient $(A_i, \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ des points pondérés d'un \mathbb{K} -espace affine \mathcal{E} tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ et soit G le barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$. On suppose qu'au moins deux des λ_i sont non nuls. Si $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, il existe I et $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ disjoints tels que $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$, $\sum_{j \in J} \lambda_j \neq 0$ et $I \cup J = \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors G est le barycentre de $\left(\frac{1}{\sum_{i \in I} \lambda_i} \sum_{i \in I} \lambda_i A_i, \sum_{i \in I} \lambda_i \right)$ et

$$\left(\frac{1}{\sum_{j \in J} \lambda_j} \sum_{j \in J} \lambda_j A_j, \sum_{j \in J} \lambda_j \right).$$

2.2.3 Exercices

Exercice 2.4 (Identité du parallélogramme, [10] p. 16). Soient A, B, C et D quatre points d'un espace affine \mathcal{E} .

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
2. Si $\text{car}(\mathbb{K}) = 2$, montrer que ces conditions impliquent $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}$.
3. Si $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, montrer que ces conditions sont équivalentes à : les milieux de $[AC]$ et $[BD]$ sont confondus.

Exercice 2.5 (Centre de gravité, [10] p. 8). 1. Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes et se rencontrent à un tiers de leurs longueurs.

2. Montrer que l'isobarycentre d'un tétraèdre est aussi le milieu des segments joignant les milieux de deux arêtes opposées.

Exercice 2.6 (Un barycentre peu intuitif). Déterminer l'isobarycentre de $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ dans $(\mathbb{F}_2)^3$.

Exercice 2.7 (Associativité du barycentre). Soient $(A_i, \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ des points pondérés d'un espace affine \mathcal{E} tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ et soit G le barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$. On suppose qu'au moins deux des λ_i sont non nuls.

1. Si $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, montrer qu'il existe I et $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ disjoints tels que $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$, $\sum_{j \in J} \lambda_j \neq 0$ et $I \cup J = \llbracket 1, n \rrbracket$.

2. En déduire que, dans ce cas, G est le barycentre de $\left(\frac{1}{\sum_{i \in I} \lambda_i} \sum_{i \in I} \lambda_i A_i, \sum_{i \in I} \lambda_i \right)$ et $\left(\frac{1}{\sum_{j \in J} \lambda_j} \sum_{j \in J} \lambda_j A_j, \sum_{j \in J} \lambda_j \right)$.

3. Que se passe-t-il en caractéristique 2 ?

2.3 Sous-espaces affines

On peut définir les sous-espaces affines d'un espace affine \mathcal{E} de direction E de deux façons équivalentes. D'un côté, si F est un sous-espace vectoriel de E , on peut dire que les sous-espaces affines de \mathcal{E} de direction F sont les orbites de l'action restreinte $F \curvearrowright \mathcal{E}$ par translation. De l'autre, on peut simplement définir les sous-espaces affines de \mathcal{E} comme étant les parties stables par combinaisons barycentriques. Nous adoptons ici le second point de vue. Une fois définis les sous-espaces affines, on peut parler d'alignement, de tangence et de parallélisme. Notre référence principale est toujours [10].

2.3.1 Définitions

Définition 2.3.1. Soit \mathcal{E} un espace affine, un *sous-espace affine* de \mathcal{E} est une partie non vide $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ stable par combinaisons barycentriques, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute famille $(A_i, \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ de points pondérés de \mathcal{F} , si $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ alors le barycentre des (A_i, λ_i) appartient à \mathcal{F} .

Remarque 2.3.2. D'après la remarque 2.2.12, si $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, il est équivalent de demander que pour tout $A, B \in \mathcal{F}$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on ait $\lambda A + (1 - \lambda)B \in \mathcal{F}$.

Exemple 2.3.3. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ linéaire, on munit E de sa structure naturelle d'espace affine (cf. exemple fondamental 2.1.3). Alors pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est un sous-espace affine de E (voir fig. 2.1).

Exemple 2.3.4 (Exemple fondamental de sous-espace affine). Un cas particulier important de l'exemple précédent est l'ensemble

$$\left\{ (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\},$$

qui est un hyperplan affine de \mathbb{K}^{n+1} . On verra plus loin que tout \mathbb{K} -espace affine de dimension n est isomorphe à cet hyperplan (mais pas canoniquement).

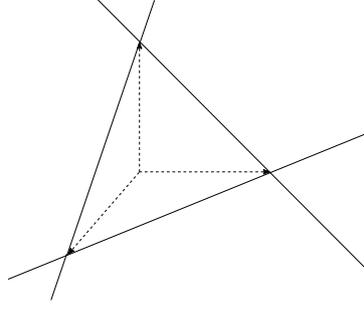


Figure 2.3 – Exemple fondamental d’hyperplan affine pour $n = 3$.

Notation 2.3.5. Soit \mathcal{E} un espace affine de direction E , soient $O \in \mathcal{E}$ et $\Omega \subset E$, on note

$$O + \Omega := \{O + u \mid u \in \Omega\} = \Theta_O(\Omega),$$

où Θ_O est l’application de vectorialisation en O , voir section 2.1.3.

Proposition 2.3.6. Soient \mathcal{E} un espace affine de direction E et \mathcal{F} une partie non vide de \mathcal{E} . Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. \mathcal{F} est un sous-espace affine de \mathcal{E} .
2. Pour tout $O \in \mathcal{F}$, il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que $\mathcal{F} = O + F$.
3. Il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que, pour tout $O \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = O + F$.
4. Il existe un sous-espace vectoriel F de E et $O \in \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{F} = O + F$.

Remarque 2.3.7. Nécessairement, dans 2, 3 et 4, si F existe on a :

$$F = \Theta_O^{-1}(\mathcal{F}) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \mid n \in \mathbb{N}^*, A_i \in \mathcal{F}, \lambda_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \right\}.$$

En particulier F est alors unique.

Démonstration. Supposons 1 et montrons 2. Soit $O \in \mathcal{F}$, on note $F_O := \Theta_O^{-1}(\mathcal{F})$. On a alors $\mathcal{F} = O + F_O$. Montrons que F_O est un sous-espace de E . Comme $O \in \mathcal{F}$, $0 \in F_O$. Soient $u, v \in F_O$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $A := O + u$ et $B := O + v$. Soit G le barycentre de $(A, 1)$, (B, λ) et $(O, -\lambda)$. On a alors $G \in \mathcal{F}$, donc $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB} = u + \lambda v \in F_O$.

Montrons que 2 implique 3. Soient $O, O' \in \mathcal{F}$ et soient F_O et $F_{O'}$ les deux sous-espaces de E tels que $O + F_O = \mathcal{F} = O' + F_{O'}$, alors $F_O = \overrightarrow{OO'} + F_{O'}$. Comme $O' \in \mathcal{F}$, $\overrightarrow{OO'} \in F_{O'}$ et $F_O = F_{O'}$.

Il est évident que 3 implique 4, et il ne reste qu’à vérifier que 4 implique 1. Supposons qu’il existe $O \in \mathcal{F}$ et F un sous-espace vectoriel de E tel que $\mathcal{F} = O + F$. Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de points pondérés de \mathcal{F} de masse totale $m \neq 0$ et soit $G := \frac{1}{m} \sum \lambda_i A_i$. On a $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \in F$, donc $G \in \mathcal{F}$. Donc \mathcal{F} est stable par combinaisons barycentriques. \square

Cette proposition montre en particulier qu’il est équivalent de définir un sous-espace affine de \mathcal{E} par la définition 2.3.1 ou comme une orbite sous l’action par translation d’un certain sous-espace vectoriel de E .

Proposition 2.3.8. Soient (\mathcal{E}, E, τ) un espace affine et \mathcal{F} un sous-espace affine. Soit F l’unique sous-espace de E tel que pour tout $O \in \mathcal{F}$ on ait $\mathcal{F} = O + F$. Alors $(\mathcal{F}, F, \tau|_F)$ est un espace affine.

Démonstration. Comme pour tout $O \in \mathcal{F}$ on a $O + F = \mathcal{F}$, \mathcal{F} est bien stable sous l'action restreinte $\tau|_F$. Ainsi τ induit une action $F \curvearrowright \mathcal{F}$ qui est de plus transitive. Soit $u \in F$, si $\tau(u)$ agit avec un point fixe dans \mathcal{F} alors $u = 0$ par liberté de τ . Donc $\tau|_F$ est libre et transitive. \square

Remarque 2.3.9. Certains auteurs notent $\vec{\mathcal{F}}$ la direction de \mathcal{F} . Nous préférons utiliser la convention qu'un sous-espace affine est noté par une lettre majuscule calligraphiée et sa direction par la même lettre majuscule non calligraphiée.

Dans le cas d'un sous-espace affine \mathcal{F} de \mathcal{E} , il suffit de définir \mathcal{F} en tant que sous-ensemble de \mathcal{E} stable par combinaisons barycentriques pour le définir en tant qu'espace affine. Sa direction et l'action définissant sa structure affine sont uniquement déterminées par l'ensemble \mathcal{F} et la structure de l'espace ambiant. C'est un exemple de plus d'un phénomène bien connu. Pour montrer qu'un ensemble possède une certaine structure (groupe, espace vectoriel, etc.), il est généralement plus facile de prouver que c'est une sous-structure d'une structure connue.

Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de \mathcal{E} de dimension finie. Alors \mathcal{F} est de dimension finie et $\dim(\mathcal{F}) \leq \dim(\mathcal{E})$. De plus, $\dim(\mathcal{F}) = \dim(\mathcal{E})$ si et seulement si $\mathcal{F} = \mathcal{E}$. Ceci se déduit immédiatement des résultats analogues sur les espaces vectoriels, qui sont classiques mais pas triviaux pour autant.

Définition 2.3.10. Soit (\mathcal{F}, F) un sous-espace affine de (\mathcal{E}, E) , la *codimension* de \mathcal{F} dans \mathcal{E} est la dimension de E/F en tant qu'espace vectoriel. Si \mathcal{E} est de dimension finie, $\text{codim}(\mathcal{F}) = \dim(E) - \dim(F) = \dim(\mathcal{E}) - \dim(\mathcal{F})$.

Définition 2.3.11. Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de \mathcal{E} , on dit que \mathcal{F} est un *point* (resp. une *droite*, resp. un *plan*) de \mathcal{E} si \mathcal{F} est de dimension 0 (resp. 1, resp. 2) et on dit que \mathcal{F} est un *hyperplan* de \mathcal{E} si $\text{codim}(\mathcal{F}) = 1$.

Définition 2.3.12. Soit (A_i) une famille de points de \mathcal{E} , on dit que les A_i sont *alignés* s'ils appartiennent à une même droite affine de \mathcal{E} .

Définition 2.3.13. Soient (\mathcal{F}, F) et (\mathcal{G}, G) deux sous-espaces affines de \mathcal{E} . On dit que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont *parallèles* si $F = G$.

Remarque 2.3.14. Certains auteurs disent que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont *fortement* parallèles si $F = G$ et *faiblement* parallèles si $F \subset G$. Le parallélisme faible est une mauvaise notion. On attend d'une bonne notion de parallélisme que ce soit une relation d'équivalence, ce qui n'est pas le cas pour le parallélisme faible. Penser par exemple à deux droites coplanaires mais non parallèles. Dans ce cours on ne considère que la notion de parallélisme fort.

2.3.2 Tangence

Dans cette section, nous parlons très rapidement de tangence. La notion de tangence que nous présentons est celle du calcul différentiel. On peut aussi définir une notion de tangence en géométrie algébrique qui serait pertinente ici mais, d'une part l'auteur n'est pas compétent pour en parler, et d'autre part il déconseille d'en parler à l'Agrégation.

On se place maintenant dans le cas d'un espace affine réel (\mathcal{E}, E) de dimension finie. Soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{E}$, on dit que γ est *dérivable* en 0 s'il existe $u \in E$ tel que :

$$\gamma(t) = \gamma(0) + tu + o(t).$$

Dans ce cas, u est unique et on note $\gamma'(0) := u$. Tout cela fait bien sens dans un espace affine car $\gamma(t) - \gamma(0) \in E$ pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ et il y a unicité de la topologie normée sur E . En dimension infinie, il faudrait préciser une norme sur E .

Définition 2.3.15. Soient (\mathcal{E}, E) un espace affine réel de dimension finie et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{E}$ dérivable en 0 telle que $\gamma'(0) \neq 0$, alors la *tangente* en 0 à la courbe paramétrée γ est la droite affine $\gamma(0) + \mathbb{R}\gamma'(0)$.

La notion de tangente est indépendante du paramétrage choisi, tant qu'il est régulier (i.e. la dérivée ne s'annule pas) au point qui nous intéresse. C'est une conséquence de la formule de dérivation d'une composée. En ce sens, la tangente ne dépend que de l'image de γ en tant que lieu géométrique, mais attention, on n'a pas exclu que la courbe paramétrée γ ait un point double en $\gamma(0)$. Si c'est le cas, il faut faire attention à la branche que l'on considère.

Définition 2.3.16. On dira que deux courbes régulières γ_1 et γ_2 dans \mathcal{E} sont *tangentes* en A si elles passent toutes les deux par A et y ont même tangente.

Évoquons rapidement l'autre cadre où l'on peut définir un espace tangent, celui des sous-variétés de \mathcal{E} . Soient $x \in M \subset \mathcal{E}$ tels qu'il existe un voisinage U de x et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une submersion tels que $M \cap U = f^{-1}(0)$. Alors l'espace affine tangent à M en x est $T_x M := x + \ker(d_x f)$. Cet espace coïncide avec la réunion des tangentes en x aux courbes régulières tracées dans M .

Si M et N sont deux sous-variétés de \mathcal{E} contenant x , on dira qu'elles sont *tangentes* en x si $T_x M \subset T_x N$ ou $T_x N \subset T_x M$. Attention, avec cette définition la tangence en x n'est pas une relation d'équivalence.

Exemple 2.3.17. Dans le cas d'une courbe définie comme lieu d'annulation d'une submersion, c'est évidemment le second point de vue qu'il faut adopter. Par exemple, calculons la tangente T à l'ellipse d'équation $\frac{X^2}{2} + Y^2 = 1$ en $A := \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ dans \mathbb{R}^2 . On a déjà évoqué ce problème dans l'introduction. On a immédiatement que T est la droite passant par A et parallèle à la droite d'équation $X + \sqrt{2}Y = 0$. Donc $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \sqrt{2}y = 2\}$.

2.3.3 Intersections de sous-espaces affines

Proposition 2.3.18. Soit (\mathcal{F}_i, F_i) une famille de sous-espaces affines de \mathcal{E} , alors $\bigcap \mathcal{F}_i$ est un sous-espace affine de \mathcal{E} de direction $\bigcap F_i$ ou est vide.

Démonstration. Supposons $\bigcap \mathcal{F}_i$ non vide. Chacun des \mathcal{F}_i est stable par combinaisons barycentriques, donc leur intersection aussi et $\bigcap \mathcal{F}_i$ est un sous-espace affine de \mathcal{E} . Soit $O \in \bigcap \mathcal{F}_i$, pour tout i on a $\mathcal{F}_i = O + F_i$, donc $\bigcap \mathcal{F}_i = O + \bigcap F_i$. \square

On va maintenant donner un critère permettant de déterminer si une intersection de sous-espaces affines est vide.

Proposition 2.3.19. Soient (\mathcal{F}, F) et (\mathcal{G}, G) deux sous-espaces affines de \mathcal{E} alors les conditions suivantes sont équivalentes.

1. $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.
2. Il existe $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{G}$ tels que $\overrightarrow{AB} \in F + G$.
3. Pour tout $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{G}$ on a $\overrightarrow{AB} \in F + G$.

Démonstration. Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, il suffit de prendre $A = B$ dans l'intersection. Donc 1 implique 2. Supposons 2, soit $A_0 \in \mathcal{F}$ et $B_0 \in \mathcal{G}$ tels que $\overrightarrow{A_0 B_0} \in F + G$, alors pour tout $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{G}$ on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{A_0 B_0} + \overrightarrow{B_0 B} \in F + G,$$

ce qui prouve 3. Enfin, si on suppose 3 alors soit $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{G}$, on a $\overrightarrow{AB} = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. Mais alors $A + u + v = B$ et donc $A + u = B - v \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. \square

En particulier, si $F + G = E$ alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$. On a alors de plus :

$$\text{codim}(\mathcal{F}) + \text{codim}(\mathcal{G}) = \text{codim}(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}).$$

On dit dans ce cas que l'intersection est *transverse*. Si $F \oplus G = E$ alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un point. Conséquence : deux droites d'un plan affine sont concourantes ou parallèles.

2.3.4 Exercices

Exercice 2.8 (Retour aux axiomes, [10] p. 16). Montrer que dans un plan affine deux droites sont concourantes ou parallèles.

Exercice 2.9 (Retour aux axiomes 2, [10] p. 16). Soit \mathcal{E} un espace affine, montrer que \mathcal{E} satisfait les axiomes suivants.

1. Par deux points distincts passe une unique droite (axiome d'incidence).
2. Soit \mathcal{D} une droite et $A \in \mathcal{E}$, il existe une unique droite parallèle à \mathcal{D} passant par A (axiome des parallèles).

Exercice 2.10 (Une caractérisation des sous-espaces affines, [10] p. 16). Soit \mathcal{E} un espace affine sur un corps de cardinal strictement supérieur à 2. Montrer que $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ non vide est un sous-espace affine si et seulement si pour tout A et $B \in \mathcal{F}$, (AB) est incluse dans \mathcal{F} . Que se passe-t-il sur \mathbb{F}_2 ?

Exercice 2.11 (Direction d'un sous-espace). Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de \mathcal{E} , montrer que sa direction est $F := \{\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \mid n \in \mathbb{N}^*, A_i \in \mathcal{F}, \lambda_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0\}$.

Exercice 2.12 (Dénombrement). 1. Quel est le cardinal d'un k -plan sur \mathbb{F}_q ?

2. Combien y a-t-il de familles vectoriellement libres de cardinal k dans $(\mathbb{F}_q)^n$ ($k \leq n$) ? En déduire le cardinal de $GL_n(\mathbb{F}_q)$.
3. Combien y a-t-il de k -plans vectoriels dans $(\mathbb{F}_q)^n$? De k -plans affines ?

Exercice 2.13 (Union de sous-espaces, [2] exo. 1.5). Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines de \mathcal{E} . À quelle condition $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est-il un sous-espace affine de \mathcal{E} ?

2.4 Notions de repères

Dans cette section, on définit la notion de repère affine. Comme pour les bases dans un espace vectoriel, un repère est une famille à la fois libre et génératrice, pour l'opération naturelle liée à la structure affine : les combinaisons barycentriques.

2.4.1 Familles génératrices

Définition 2.4.1. Soit \mathcal{A} une partie non vide d'un espace affine \mathcal{E} , on appelle *sous-espace affine engendré* par \mathcal{A} l'intersection de tous les sous-espaces affines de \mathcal{E} contenant \mathcal{A} . On le note $\langle \mathcal{A} \rangle$.

Comme $\mathcal{A} \neq \emptyset$, c'est bien un sous-espace affine de \mathcal{E} (cf. prop. 2.3.18) et c'est le plus petit sous-espace affine contenant \mathcal{A} .

Définition 2.4.2. Une partie $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ non vide est dite *génératrice* si $\langle \mathcal{A} \rangle = \mathcal{E}$.

La proposition suivante permet de décrire plus explicitement les éléments de $\langle \mathcal{A} \rangle$.

Proposition 2.4.3. Soient $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ et $O \in \mathcal{A}$, alors on a :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A} \rangle &= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \mid n \in \mathbb{N}^*, A_i \in \mathcal{A}, \lambda_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\} \\ &= O + \text{Vect} \left\{ \overrightarrow{AB} \mid A, B \in \mathcal{A} \right\} \\ &= O + \text{Vect} \left\{ \overrightarrow{OB} \mid B \in \mathcal{A} \right\} \\ &= O + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \mid n \in \mathbb{N}^*, A_i \in \mathcal{A}, \lambda_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Esquisse de preuve. On peut faire une preuve par double inclusion dans chacun des cas. Prenons un des ensembles de droite, on montre que c'est un sous-espace affine de \mathcal{E} qui contient \mathcal{A} , donc $\langle \mathcal{A} \rangle$. Ensuite les propriétés de stabilité définissant un sous-espace affine de \mathcal{E} montrent que $\langle \mathcal{A} \rangle$ contient nécessairement les ensembles de droites. \square

Corollaire 2.4.4. Soit \mathcal{A} une partie finie de \mathcal{E} , alors $\dim(\langle \mathcal{A} \rangle) \leq |\mathcal{A}| - 1$. En particulier, si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de \mathcal{E} , alors $|I| \geq \dim(\mathcal{E}) + 1$.

Exemple 2.4.5. Soient A et $B \in \mathcal{E}$ distincts, alors $\langle \{A, B\} \rangle = \{\lambda A + (1 - \lambda)B \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ est l'unique droite contenant A et B . On la note souvent (AB) .

La notion de droite passant par deux points distincts a un sens sur n'importe quel corps. Profitons en pour introduire la notion de segment, qui elle n'a de sens que sur \mathbb{R} . Cette notion sera généralisée plus tard par celle d'enveloppe convexe (voir chapitre 4).

Définition 2.4.6. Soient A et B deux points distincts d'un \mathbb{R} -espace affine, alors le *segment* d'extrémités A et B est : $[AB] := \{\lambda A + (1 - \lambda)B \mid \lambda \in [0, 1]\}$.

2.4.2 Familles libres, familles liées

Avant d'introduire la notion de famille libre d'un espace affine, nous commençons par rappeler la notion de famille presque nulle de scalaires.

Définition 2.4.7. Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de \mathbb{K} , on dit que cette famille est *presque nulle* si l'ensemble $\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$ est fini.

Proposition 2.4.8. Soient (\mathcal{E}, E) un espace affine et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de points de \mathcal{E} , les conditions suivantes sont équivalentes.

1. Pour tout $A \in \langle \{A_i \mid i \in I\} \rangle$, il existe une unique famille presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I}$ de scalaires telle que $A = \sum \lambda_i A_i$ et $\sum \lambda_i = 1$.
2. Pour tout $j \in I$, $A_j \notin \langle \{A_i \mid i \in I \setminus \{j\}\} \rangle$.
3. Pour tout $j \in I$, la famille de vecteurs $\left\{ \overrightarrow{A_j A_i} \mid i \in I \setminus \{j\} \right\}$ est libre.
4. Il existe $j \in I$ tel que la famille de vecteurs $\left\{ \overrightarrow{A_j A_i} \mid i \in I \setminus \{j\} \right\}$ soit libre.

Démonstration. Il est clair que 1 implique 2 et 3 implique 4.

Supposons 2. Soit $j \in I$, supposons qu'il existe une combinaison linéaire non triviale $\sum_{i \in I \setminus \{j\}} \mu_i \overrightarrow{A_j A_i} = 0$. Soit $k \in I \setminus \{j\}$ tel que $\mu_k \neq 0$, alors $\mu_k \overrightarrow{A_j A_k} = -\sum_{i \in I \setminus \{j, k\}} \mu_i \overrightarrow{A_j A_i}$, donc A_k est le barycentre des $(A_i, -\mu_i)_{i \in I \setminus \{j, k\}}$ et de $(A_j, \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \mu_i)$ (la somme des coefficients vaut $\mu_k \neq 0$). C'est absurde, d'où 2 implique 3.

Enfin montrons que 4 implique 1. Soit $A \in \langle \{A_i \mid i \in I\} \rangle$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \sum_{i \in I} \lambda_i A_i \\ \sum_{i \in I} \lambda_i = 1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{A_j A} = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \lambda_i \overrightarrow{A_j A_i} \\ \lambda_j = 1 - \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \lambda_i \end{array} \right.$$

où j est donné par 4. Alors la liberté de $\{\overrightarrow{A_j A_i} \mid i \in I \setminus \{j\}\}$ donne l'unicité des λ_i vérifiant le système ci-dessus. L'existence est assurée par le fait qu'on choisit A dans le sous-espace affine engendré par les A_i . \square

Définition 2.4.9. Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de points de \mathcal{E} est dite *affinement libre* si elle vérifie les conditions de la proposition 2.4.8. Sinon elle est dite *affinement liée*.

Exemple 2.4.10. Trois points A, B et C de \mathcal{E} forment une famille liée si ils sont alignés, et une famille libre sinon.

Remarque 2.4.11. Si la famille $(A_i)_{i \in I}$ est libre, le sous-espace affine qu'elle engendre est de dimension $|I| - 1$. En particulier, si $\dim(\mathcal{E}) = n$ alors une famille libre de \mathcal{E} est de cardinal au plus $n + 1$.

2.4.3 Repères

Définition 2.4.12. Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de points de \mathcal{E} est appelée un *repère affine* si elle est à la fois libre et génératrice. Dans ce cas, pour tout $A \in \mathcal{E}$, il existe une unique famille presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I}$ telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ et $\sum_{i \in I} \lambda_i A_i = A$.

L'existence de repères affines pour un espace affine \mathcal{E} est équivalent à l'existence de base pour sa direction. Si \mathcal{E} est de dimension n , un repère affine de \mathcal{E} est une famille finie de cardinal $n + 1$.

Proposition 2.4.13. Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension n alors :

- toute famille libre de cardinal $n + 1$ est un repère affine,
- toute famille génératrice de \mathcal{E} de cardinal $n + 1$ est un repère affine.

Démonstration. Soit $(A_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ une famille libre de \mathcal{E} , par la remarque 2.4.11 cette famille engendre un sous-espace affine de \mathcal{E} de dimension n . Elle est donc génératrice et c'est un repère.

Soit $(A_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ une famille génératrice de \mathcal{E} , si cette famille n'est pas un repère elle n'est pas libre et il existe $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $A_j \in \langle \{A_i \mid i \in I \setminus \{j\}\} \rangle$. Alors on a

$$\langle \{A_i \mid i \in I\} \rangle = \langle \{A_i \mid i \in I \setminus \{j\}\} \rangle$$

et ce sous-espace est de dimension au plus $n - 1$ par le corollaire 2.4.4. C'est absurde. \square

Exemples 2.4.14. Deux points distincts forment un repère affine de la droite qu'ils engendrent. Trois points non alignés d'un plan affine forment un repère de ce plan.

Exemple 2.4.15. On revient à l'exemple fondamental 2.3.4. Un repère affine de l'hyperplan affine $\{(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid \sum \lambda_i = 1\}$ est donné par la base canonique de \mathbb{K}^{n+1} .

Définition 2.4.16. Soit (\mathcal{E}, E) un espace affine, un *repère cartésien* de \mathcal{E} est la donnée d'une origine $O \in \mathcal{E}$ et d'une base $(e_i)_{i \in I}$ de E .

Proposition 2.4.17. Soient \mathcal{E} un espace affine de dimension n et $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ alors les conditions suivantes sont équivalentes.

1. (A_0, \dots, A_n) est un repère affine de \mathcal{E} .
2. $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est un repère cartésien de \mathcal{E} .

Démonstration. Si (A_0, \dots, A_n) est un repère affine, alors

$$\mathcal{E} = \langle \{A_i \mid 0 \leq i \leq n\} \rangle = A_0 + \text{Vect} \left(\left\{ \overrightarrow{A_0A_i} \mid 0 \leq i \leq n \right\} \right)$$

et la famille des $\overrightarrow{A_0A_i}$ est libre donc est une base de E .

Inversement, si $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est un repère cartésien alors

$$\langle \{A_i \mid 0 \leq i \leq n\} \rangle = A_0 + \text{Vect} \left(\left\{ \overrightarrow{A_0A_i} \mid 0 \leq i \leq n \right\} \right) = A_0 + E = \mathcal{E},$$

donc (A_i) est une famille génératrice de cardinal $n + 1$, donc c'est un repère d'après la proposition 2.4.13. \square

Soient $B_0, \dots, B_n \in \mathcal{E}$ et (A_0, \dots, A_n) un repère affine de \mathcal{E} . Soit e une base de E , alors $\det_e(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}) \neq 0$ et le rapport

$$\frac{\det_e(\overrightarrow{B_0B_1}, \dots, \overrightarrow{B_0B_n})}{\det_e(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})}$$

ne dépend pas du choix de e . Le rapport des volumes orientés des parallélépipèdes engendrés par $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ et $(\overrightarrow{B_0B_1}, \dots, \overrightarrow{B_0B_n})$ est donc bien défini intrinsèquement, et ce sans l'ajout d'une structure métrique. Attention, le volume du parallélépipède $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ n'est pas défini intrinsèquement. On a besoin de choisir une base de E pour le définir.

Exemple 2.4.18. Si les points A, B et $C \in \mathcal{E}$ sont alignés et $A \neq C$, on peut parler du rapport des longueurs algébriques $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}}$. C'est l'unique scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AC}$.

2.4.4 Exercices

Exercice 2.14. Montrer que trois points d'un espace affine sont alignés ou forment une famille libre.

Exercice 2.15. Prouver la proposition 2.4.3.

Exercice 2.16 (Union de sous-espaces 2). Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension finie. Soient \mathcal{F} et \mathcal{F}' deux sous-espaces affines de \mathcal{E} , de direction F et F' respectivement. Soit \mathcal{G} le sous-espace de \mathcal{E} engendré par $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$.

1. Montrer que si $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \neq \emptyset$ alors \mathcal{G} est dirigé par $F + F'$ et donner sa dimension.
2. Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' = \emptyset$, montrer que $\dim \mathcal{G} = \dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{F}' - \dim(F \cap F') + 1$.

Exercice 2.17 (Lien affine-vectoriel, [10] p. 13). Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit \mathcal{E} un hyperplan affine de V ne contenant pas 0 (penser à l'exemple fondamental 2.3.4). On note E la direction de \mathcal{E} , qui est un hyperplan vectoriel de V . Soient $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{E}$.

1. Décrire E en fonction de \mathcal{E} et de la structure d'espace vectoriel de V .

2. Montrer que l'application $F \mapsto F \cap \mathcal{E}$ est une bijection de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V non inclus dans E vers l'ensemble des sous-espaces affines de \mathcal{E} . Expliciter la réciproque.
3. Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de \mathcal{E} , montrer que sa direction est $\text{Vect}(\mathcal{F}) \cap E$.
4. Montrer que la famille (A_0, \dots, A_n) est affinement libre (resp. génératrice) dans \mathcal{E} si et seulement si elle est vectoriellement libre (resp. génératrice) dans V .
5. Conclure que (A_0, \dots, A_n) est un repère affine de \mathcal{E} si et seulement si c'est une base de V .
6. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ non vide, montrer que $\langle \mathcal{A} \rangle = \text{Vect}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{E}$.

Exercice 2.18 (Rapport de volumes). Soient $B_0, \dots, B_n \in \mathcal{E}$ et (A_0, \dots, A_n) un repère affine de \mathcal{E} , soit e une base de E . Montrer que $\det_e \left(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n} \right) \neq 0$ et que le rapport

$$\frac{\det_e \left(\overrightarrow{B_0B_1}, \dots, \overrightarrow{B_0B_n} \right)}{\det_e \left(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n} \right)}$$

ne dépend pas du choix de e .

2.5 Applications affines

Maintenant qu'on a défini les objets de la catégorie des espaces affines, il est temps d'en définir les flèches, c'est-à-dire les morphismes d'espaces affines. On en profite pour vérifier que toutes les notions qui nous intéressent dans les espaces affines (alignement, parallélisme, tangence, etc.) sont bien préservées par les applications affines. Comme pour les sous-espaces, on définit les applications affines à partir des barycentres, comme [10]. On pourrait aussi les définir directement à partir de leur partie linéaire, comme dans [2].

2.5.1 Définition

Définition 2.5.1. Une application $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ entre \mathbb{K} -espaces affines est dite *affine* si elle préserve les combinaisons barycentriques. C'est-à-dire si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour toute famille $(A_i, \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ de points pondérés de \mathcal{E} telle que $m := \sum \lambda_i \neq 0$ on a :

$$f \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \lambda_i f(A_i).$$

Remarque 2.5.2. D'après la remarque 2.2.12, si le corps de base est de caractéristique différente de 2, il est équivalent de demander que pour tout $A, B \in \mathcal{E}$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on ait $f(\lambda A + (1 - \lambda)B) = \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B)$.

Exemples 2.5.3. • Une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est affine pour les structures affines canoniques sur E et F .

- Soit $f : V \rightarrow F$ une application linéaire et \mathcal{E} un sous-espace affine de V , alors $f|_{\mathcal{E}}$ est une application affine.
- Les applications de la forme $x \mapsto ax + b$ de \mathbb{K} dans \mathbb{K} sont affines.
- La *translation* de vecteur u , $t_u : M \mapsto M + u$ est affine.
- L'*homothétie* de centre O et de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$, $h_{O, \lambda} : M \mapsto O + \lambda \overrightarrow{OM}$ est affine.
- Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de \mathcal{E} de direction F et G un sous-espace de E tel que $F \oplus G = E$, alors la *projection* $p_{\mathcal{F}, G}$ sur \mathcal{F} parallèlement à G est définie par : pour tout $M \in \mathcal{E}$, $p_{\mathcal{F}, G}(M)$ est l'unique point de $(M + G) \cap \mathcal{F}$. C'est une application affine.

- Avec les mêmes notations, on appelle *affinité* de base \mathcal{F} et de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ parallèlement à G l'application

$$a_{\mathcal{F},G,\lambda} : M \mapsto p_{\mathcal{F},G}(M) + \overrightarrow{\lambda p_{\mathcal{F},G}(M)M}.$$

Cette application est affine. Si $\lambda = 0$ on retrouve la projection sur \mathcal{F} parallèlement à G , si $\lambda = -1$ on parle de la *symétrie* par rapport à \mathcal{F} parallèlement à G .

Proposition 2.5.4. *Soient $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ et $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ des applications affines, alors $g \circ f$ est affine. Si de plus f est bijective, alors f^{-1} est affine.*

Démonstration. Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in [1,n]}$ une famille de points pondérés de \mathcal{E} de masse totale $m \neq 0$, alors :

$$g \circ f \left(\frac{1}{m} \sum \lambda_i A_i \right) = g \left(\frac{1}{m} \sum \lambda_i f(A_i) \right) = \frac{1}{m} \sum \lambda_i g(f(A_i)).$$

Donc $g \circ f$ est affine.

Si f est bijective et $(B_i, \lambda_i)_{i \in [1,n]}$ est une famille de points pondérés de \mathcal{F} de masse totale $m \neq 0$, notons $A_i := f^{-1}(B_i)$, alors

$$f \left(\frac{1}{m} \sum \lambda_i A_i \right) = \frac{1}{m} \sum \lambda_i f(A_i) = \frac{1}{m} \sum \lambda_i B_i.$$

Donc $f^{-1} \left(\frac{1}{m} \sum \lambda_i B_i \right) = \frac{1}{m} \sum \lambda_i A_i = \frac{1}{m} \sum \lambda_i f^{-1}(B_i)$ et f^{-1} est affine. \square

2.5.2 Partie linéaire

Proposition 2.5.5. *Soit $f : (\mathcal{E}, E) \rightarrow (\mathcal{F}, F)$, les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. f est affine.
2. Pour tout $O \in \mathcal{E}$, il existe $\vec{f} : E \rightarrow F$ linéaire telle que $f : O + u \mapsto f(O) + \vec{f}(u)$.
3. Il existe $\vec{f} : E \rightarrow F$ linéaire telle que pour tout $O \in \mathcal{E}$, $f : O + u \mapsto f(O) + \vec{f}(u)$.
4. Il existe $\vec{f} : E \rightarrow F$ linéaire et $O \in \mathcal{E}$ tels que $f : O + u \mapsto f(O) + \vec{f}(u)$.

Remarque 2.5.6. Dans 2, 3 et 4, si \vec{f} existe on a nécessairement :

$$\vec{f} : \overrightarrow{OA} \mapsto \overrightarrow{f(O)f(A)},$$

Et \vec{f} est alors unique une fois O fixé. On remarquera la similitude avec la proposition 2.3.6.

Démonstration. Commençons par montrer que 1 implique 2. Soit $O \in \mathcal{E}$, posons \vec{f}_O de E dans F définie par $\vec{f}_O : \overrightarrow{OA} \mapsto \overrightarrow{f(O)f(A)}$. C'est le seul candidat possible et il s'agit de vérifier que \vec{f}_O est linéaire. Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $A := O + u$ et $B := O + v$. Soit $G := A + \lambda B - \lambda O$, alors $f(G) = f(A) + \lambda f(B) - \lambda f(O)$ car f est affine. On a alors :

$$\vec{f}_O(u + \lambda v) = \vec{f}_O(\overrightarrow{OG}) = \overrightarrow{f(O)f(G)} = \overrightarrow{f(O)f(A)} + \lambda \overrightarrow{f(O)f(B)} = \vec{f}_O(u) + \lambda \vec{f}_O(v).$$

Donc \vec{f}_O est bien linéaire. Pour montrer que 2 implique 3, il suffit de prouver que pour tout O et $O' \in \mathcal{E}$ on a $\vec{f}_O = \vec{f}_{O'}$. Pour tout $u \in E$, on a :

$$\begin{aligned} f(O') + \vec{f}_{O'}(u) &= f(O' + u) = f(O + \overrightarrow{OO'} + u) \\ &= f(O) + \vec{f}_O(\overrightarrow{OO'} + u) \\ &= f(O) + \vec{f}_O(\overrightarrow{OO'}) + \vec{f}_O(u) \\ &= f(O) + \overrightarrow{f(O)f(O')} + \vec{f}_O(u) \\ &= f(O') + \vec{f}_O(u). \end{aligned}$$

Donc $\vec{f}_O = \vec{f}_{O'}$. L'implication de 3 vers 4 est claire. Pour finir, supposons 4. Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de points pondérés de masse $m \neq 0$. Rappelons que le barycentre $G := \frac{1}{m} \sum \lambda_i A_i$ est caractérisé par $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$. Alors,

$$f(G) = f(O) + \vec{f}_O(\overrightarrow{OG}) = f(O) + \frac{1}{m} \sum \lambda_i \vec{f}_O(\overrightarrow{OA_i})$$

donc $\overrightarrow{f(O)f(G)} = \frac{1}{m} \sum \lambda_i \overrightarrow{f(O)f(A_i)}$ et $f(G) = \frac{1}{m} \sum \lambda_i f(A_i)$. Donc f est bien affine. \square

Définition 2.5.7. Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une application affine, alors l'unique application linéaire $\vec{f} : E \rightarrow F$ telle que pour tout $O \in \mathcal{E}$ et tout $u \in E$ on ait $f(O + u) = f(O) + \vec{f}(u)$ est appelée la *partie linéaire* de f . On la notera systématiquement \vec{f} .

Exemples 2.5.8. On reprend les applications de l'exemple 2.5.3.

- Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, c'est une application affine pour les structures affines canoniques de E et F . On a alors $f = \vec{f}$.
- Soit $f : V \rightarrow F$ une application linéaire et \mathcal{E} un sous-espace affine de V . La direction E de \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel de V et alors $\vec{f}_{/\mathcal{E}} = f_{/E}$.
- La partie linéaire de $x \mapsto ax + b$ de \mathbb{K} dans \mathbb{K} est $x \mapsto ax$.
- La partie linéaire de t_u est id_E .
- La partie linéaire de $h_{O,\lambda}$ est λid_E .
- La partie linéaire de $p_{\mathcal{F},G}$ est $p_{F,G}$ la projection vectorielle sur F parallèlement à G .
- La partie linéaire de $a_{\mathcal{F},\lambda,G}$ est $p_{F,G} + \lambda p_{G,F}$, en particulier la partie linéaire de la symétrie par rapport à \mathcal{F} parallèlement à G est la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G .

Proposition 2.5.9. Soient $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ et $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ deux applications affines, alors $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$. En particulier, si f est inversible alors \vec{f} est inversible et $\vec{f}^{-1} = (\vec{f})^{-1}$.

Démonstration. Soit $O \in \mathcal{E}$, on a pour tout $u \in E$,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(O) + \overrightarrow{(g \circ f)}(u) &= (g \circ f)(O + u) = g\left(f(O) + \vec{f}(u)\right) \\ &= g(f(O)) + \vec{g}\left(\vec{f}(u)\right), \end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{g \circ f}(u) = \vec{g}\left(\vec{f}(u)\right)$. Si f est inversible, alors on a $\vec{f} \circ \vec{f}^{-1} = \overrightarrow{\text{id}_{\mathcal{F}}} = \text{id}_F$. De même $\vec{f}^{-1} \circ \vec{f} = \text{id}_E$. \square

Si on utilise le langage des catégories, les \mathbb{K} -espaces affines sont les objets d'une catégorie dont les flèches sont les applications affines (à proprement parler c'est plutôt le couple (f, \vec{f}) , mais \vec{f} est totalement déterminées par f). On peut alors résumer les propriétés de \vec{f} en disant qu'on a construit un foncteur covariant de la catégorie des \mathbb{K} -espaces affines dans celle des \mathbb{K} -espaces vectoriels qui envoie un espace affine sur sa direction et une application affine f vers sa partie linéaire \vec{f} .

2.5.3 Action sur les sous-espaces affines

Le but essentiel de cette section est de vérifier que les applications affines préservent bien les notions d'alignement, de parallélisme et de tangence.

Proposition 2.5.10. Soient $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une application affine et \mathcal{G} un sous-espace affine de \mathcal{E} de direction G . Alors $f(\mathcal{G})$ est un sous-espace affine de \mathcal{F} de direction $\vec{f}(G)$.

Démonstration. Soit $O \in \mathcal{G}$, on a : $f(\mathcal{G}) = f(O + G) = f(O) + \vec{f}(G)$. Donc $f(\mathcal{G})$ est bien un sous-espace affine de \mathcal{F} de direction $\vec{f}(G)$. \square

Corollaire 2.5.11. *Les applications affines préservent les alignements et le parallélisme.*

Corollaire 2.5.12. *Soient $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une application affine et \mathcal{G} un sous-espace affine de \mathcal{E} de direction G . Alors $\dim(\mathcal{G}) = \dim(f(\mathcal{G})) + \dim(G \cap \ker(\vec{f}))$.*

Démonstration. On applique le théorème du rang à $\vec{f}_{/G}$ donc le noyau est $G \cap \ker(\vec{f})$.

$$\dim(\mathcal{G}) = \dim(G) = \dim(\vec{f}(G)) + \dim(\ker(\vec{f}_{/G})) = \dim(f(\mathcal{G})) + \dim(G \cap \ker(\vec{f})). \quad \square$$

Proposition 2.5.13. *Soient $f : (\mathcal{E}, E) \rightarrow (\mathcal{F}, F)$ une application affine et \mathcal{G} un sous-espace affine de \mathcal{F} de direction G . Alors $f^{-1}(\mathcal{G})$ est un sous-espace affine de \mathcal{E} de direction $(\vec{f})^{-1}(G)$ ou est vide.*

Démonstration. Supposons $f^{-1}(\mathcal{G})$ non vide. Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ des points pondérés de $f^{-1}(\mathcal{G})$ avec $m := \sum \lambda_i \neq 0$, alors :

$$f\left(\frac{1}{m} \sum \lambda_i A_i\right) = \frac{1}{m} \sum \lambda_i f(A_i) \in \mathcal{G}$$

Donc $f^{-1}(\mathcal{G})$ est bien un sous-espace affine. Soient $O \in f^{-1}(\mathcal{G})$ et $u \in E$, on a :

$$O + u \in f^{-1}(\mathcal{G}) \iff f(O + u) \in \mathcal{G} \iff f(O) + \vec{f}(u) \in \mathcal{G} \iff \vec{f}(u) \in G.$$

Donc u est dans la direction de $f^{-1}(\mathcal{G})$ si et seulement si $\vec{f}(u) \in G$. \square

Proposition 2.5.14. *Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application affine, alors l'ensemble $\text{Fix}(f)$ de ses points fixes est un sous-espace affine de \mathcal{E} de direction $\text{Fix}(\vec{f})$ ou est vide.*

Démonstration. Supposons $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$. Comme f est affine, une combinaison barycentrique de points fixes est un point fixe. Soient $O \in \text{Fix}(f)$ et $u \in E$, on a :

$$O + u \in \text{Fix}(f) \iff f(O + u) = O + u \iff f(O) + \vec{f}(u) = O + u \iff \vec{f}(u) = u.$$

Donc u appartient à la direction de $\text{Fix}(f)$ si et seulement si $\vec{f}(u) = u$. \square

Vérifions maintenant que les applications affines préservent les tangences. Dans la fin de cette section, on considère le cas d'applications affines entre \mathbb{R} -espaces affines de dimensions finies. Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, comme pour tout $O \in \mathcal{E}$ on a $f : M \mapsto f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OM})$ et \vec{f} est linéaire continue, il est immédiat que f est de classe \mathcal{C}^∞ et que pour tout $x \in \mathcal{E}$, $d_x f = \vec{f}$.

Soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{E}$ dérivable en 0, alors $f \circ \gamma$ est une courbe paramétrée à valeurs dans \mathcal{F} , dérivable en 0, et de dérivée $\vec{f}(\gamma'(0))$ en 0. Si $\gamma'(0) \notin \ker(\vec{f})$, alors la tangente à $f \circ \gamma$ en 0 est la droite :

$$f(\gamma(0)) + \mathbb{R}\vec{f}(\gamma'(0)) = f(\gamma(0)) + \vec{f}(\mathbb{R}\gamma'(0)) = f(\gamma(0) + \mathbb{R}\gamma'(0)),$$

c'est-à-dire l'image par f de la tangente à γ en 0.

De même, une bijection affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est un \mathcal{C}^∞ difféomorphisme de \mathcal{E} dans \mathcal{F} dont la différentielle en tout point de \mathcal{E} est \vec{f} . En particulier, f envoie une sous-variété M de \mathcal{E} sur une sous-variété de \mathcal{F} et l'espace tangent affine à M en x est envoyé par f sur l'espace tangent affine à $f(M)$ en $f(x)$.

2.5.4 Action sur les repères

Proposition 2.5.15. *Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ affine et $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ non vide, alors $f(\langle \mathcal{A} \rangle) = \langle f(\mathcal{A}) \rangle$.*

Démonstration. D'une part $f(\langle \mathcal{A} \rangle)$ est un sous-espace affine de \mathcal{F} contenant $f(\mathcal{A})$ donc $\langle f(\mathcal{A}) \rangle \subset f(\langle \mathcal{A} \rangle)$. D'autre part, si $A \in \langle \mathcal{A} \rangle$ alors A est une combinaison barycentrique d'éléments de \mathcal{A} , donc $f(A)$ est une combinaison barycentrique d'éléments de $f(\mathcal{A})$. Donc $f(\langle \mathcal{A} \rangle) \subset \langle f(\mathcal{A}) \rangle$. \square

Proposition 2.5.16. *Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une application affine.*

1. *Si f est injective, l'image d'une famille libre est une famille libre.*
2. *Si f est surjective, l'image d'une famille génératrice est génératrice.*
3. *Si f est bijective, l'image d'un repère est un repère.*

Démonstration. Si f est injective, et si la famille $(A_i)_{i \in I}$ est libre, supposons qu'il existe $j \in I$ tel que $f(A_j) = \sum_{i \neq j} \lambda_i f(A_i)$ avec $(\lambda_i)_{i \neq j}$ presque nulle et $\sum_{i \neq j} \lambda_i = 1$. Alors $f(A_j) = f(\sum_{i \neq j} \lambda_i A_i)$ et comme f est injective $A_j = \sum_{i \neq j} \lambda_i A_i$. C'est absurde.

Soit \mathcal{A} une partie génératrice de \mathcal{E} , alors par la proposition 2.5.15 on a :

$$\langle f(\mathcal{A}) \rangle = f(\langle \mathcal{A} \rangle) = f(\mathcal{E}) = \mathcal{F}.$$

Le troisième point est une conséquence immédiate des deux premiers. \square

Remarque 2.5.17. On peut aussi prouver ces résultats en passant par la partie linéaire de f et en utilisant les résultats similaires pour les familles libres, familles génératrices et bases d'un espace vectoriel.

Proposition 2.5.18. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ un repère affine de \mathcal{E} et soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille de points de \mathcal{F} , alors il existe une unique application affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ telle que pour tout $i \in I$, $f(A_i) = B_i$.*

Démonstration. Si f existe, elle vérifie $f(\sum \lambda_i A_i) = \sum \lambda_i B_i$ pour toute famille presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I}$ de somme 1. Cela définit totalement f et on vérifie que l'application ainsi définie est bien affine. \square

Corollaire 2.5.19. *La seule application affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ fixant un repère affine est $\text{id}_{\mathcal{E}}$.*

Corollaire 2.5.20. *Soient \mathcal{E} et \mathcal{F} deux \mathbb{K} -espaces affines de dimension finie n , alors \mathcal{E} et \mathcal{F} sont isomorphes.*

Démonstration. Soient (A_0, \dots, A_n) et (B_0, \dots, B_n) des repères affines de \mathcal{E} et \mathcal{F} respectivement. Soient f (resp. g) l'unique application affine telle que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f(A_i) = B_i$ (resp. $g(B_i) = A_i$). Alors d'après le corollaire 2.5.19, $g = f^{-1}$. \square

Remarque 2.5.21. L'isomorphisme donné par le corollaire 2.5.20 n'est bien sûr pas canonique. Il dépend d'un choix de repères.

En particulier, tout \mathbb{K} -espace affine \mathcal{E} de dimension n est isomorphe à l'hyperplan affine : $\{(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid \sum \lambda_i = 1\} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ (cf. exemple 2.3.4). Le choix d'un repère affine de \mathcal{E} est équivalent au choix d'un isomorphisme envoyant point par point ce repère sur la base canonique de \mathbb{K}^{n+1} (voir ex. 2.4.15). On peut donc réaliser tout espace affine comme un hyperplan affine d'un espace vectoriel. Cela justifie l'utilisation des notations additives 2.2.7 pour les barycentres.

2.5.5 Espace affine comme hyperplan affine d'un espace vectoriel

Dans cette section, nous expliquons comment définir un isomorphisme canonique entre un \mathbb{K} -espace affine (\mathcal{E}, E) de dimension finie n et un certain hyperplan affine d'un \mathbb{K} -espace vectoriel.

On note V l'ensemble des formes affines sur \mathcal{E} , c'est-à-dire l'ensemble des applications affines de \mathcal{E} dans \mathbb{K} . C'est un \mathbb{K} -espace vectoriel comme sous-espace des fonctions de \mathcal{E} dans \mathbb{K} . Comme une application affine est totalement déterminée par ses valeurs sur un repère affine, $\dim(V) = n + 1$.

Soit $A \in \mathcal{E}$, alors $\text{ev}_A : \phi \mapsto \phi(A)$ est une forme linéaire sur V , d'où $\text{ev} : \mathcal{E} \rightarrow V^*$, définie par $\text{ev}(A) := \text{ev}_A$.

Lemme 2.5.22. *L'application $\text{ev} : \mathcal{E} \rightarrow V^*$ est affine.*

Démonstration. Soient $(A_i, \lambda_i)_{i \in [1, n]}$ des points pondérés de \mathcal{E} de masse totale 1, alors pour tout $\phi \in V$, on a :

$$\text{ev} \left(\sum \lambda_i A_i \right) (\phi) = \phi \left(\sum \lambda_i A_i \right) = \sum \lambda_i \phi(A_i) = \left(\sum \lambda_i \text{ev}_{A_i} \right) (\phi). \quad \square$$

Lemme 2.5.23. *L'application $\text{ev} : \mathcal{E} \rightarrow V^*$ est injective.*

Démonstration. Soient A et $B \in \mathcal{E}$, si $\text{ev}_A = \text{ev}_B$ alors pour tout $\phi \in V$ on a $\phi(A) = \phi(B)$ et donc $\vec{\phi}(\overrightarrow{AB}) = 0$. Si $A \neq B$ alors $\overrightarrow{AB} \neq 0$ et on peut trouver $\phi \in V$ tel que $\vec{\phi} \in E^*$ ne s'annule pas sur \overrightarrow{AB} . C'est absurde, donc $A = B$ et ev est injective. \square

Ainsi $\mathcal{H} := \text{ev}(\mathcal{E})$ est un sous-espace affine de V^* de dimension n . Et ev réalise un isomorphisme de \mathcal{E} vers \mathcal{H} . Notons H la direction de \mathcal{H} et $\mathbf{1} \in V$ la fonction $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}$ constante égale à 1.

Lemme 2.5.24. *On a $\mathcal{H} = \{f \in V^* \mid f(\mathbf{1}) = 1\}$. Sa direction H est l'hyperplan des formes linéaires sur V^* qui s'annulent sur les constantes.*

Démonstration. Pour tout $A \in \mathcal{E}$, $\text{ev}_A(\mathbf{1}) := \mathbf{1}(A) = 1$. Donc $\mathcal{H} \subset \{f \in V^* \mid f(\mathbf{1}) = 1\}$. L'évaluation sur $\mathbf{1}$ est une forme linéaire sur V^* . Donc $\{f \in V^* \mid f(\mathbf{1}) = 1\}$ est un hyperplan affine de V^* contenant \mathcal{H} , donc égal à \mathcal{H} .

La direction de \mathcal{H} est alors $H = \{f \in V^* \mid f(\mathbf{1}) = 0\}$, c'est-à-dire l'hyperplan des formes linéaires sur V^* qui s'annulent sur les constantes. \square

Remarque 2.5.25. Les constantes forment une droite vectorielle de V , donc les formes linéaires nulles sur les constantes forment un hyperplan vectoriel de V^* .

Pour tout $u \in E$, on note $\vec{\text{ev}}_u : V \rightarrow \mathbb{K}$ l'application définie par $\vec{\text{ev}}_u : \phi \mapsto \vec{\phi}(u)$. C'est une forme linéaire sur V . On définit donc ainsi $\vec{\text{ev}} : E \rightarrow V^*$ telle que $\vec{\text{ev}} : u \mapsto \vec{\text{ev}}_u$.

Lemme 2.5.26. *L'application $\vec{\text{ev}}$ et la partie linéaire de ev .*

Démonstration. Soit $O \in \mathcal{E}$, pour tout $A \in \mathcal{E}$ on a, pour tout $\phi \in V$,

$$\text{ev}_A(\phi) = \phi(A) = \phi(O + \overrightarrow{OA}) = \phi(O) + \vec{\phi}(\overrightarrow{OA}) = \text{ev}_O(\phi) + \vec{\text{ev}}_{\overrightarrow{OA}}(\phi).$$

Donc pour tout $A \in \mathcal{E}$, $\text{ev}(A) = \text{ev}(O) + \vec{\text{ev}}(\overrightarrow{OA})$. \square

Au final, on a construit de façon totalement intrinsèque un isomorphisme affine ev de \mathcal{E} vers un hyperplan affine ne contenant pas 0 de l'espace vectoriel V^* . Cet hyperplan est :

$$\mathcal{H} = \{f \in V^* \mid f(\mathbf{1}) = 1\},$$

et il est dirigé par l'hyperplan H des formes linéaires qui s'annulent sur les constantes. La partie linéaire de ev est $\vec{\text{ev}} : E \rightarrow V^*$, et naturellement $H = \vec{\text{ev}}(E)$.

2.5.6 Le théorème fondamental de la géométrie affine

On a vu dans le corollaire 2.5.11 que les applications affines préservent l'alignement, le théorème suivant donne une réciproque partielle de cet énoncé. Ce résultat est appelé "théorème fondamental de la géométrie affine" mais il ne faut pas s'y tromper, il apporte une réponse à une question naturelle mais n'a que peu d'intérêt pratique. On l'utilisera néanmoins dans la preuve qu'une bijection d'un espace euclidien préservant l'orthogonalité est une similitude (prop. 3.4.30). La démonstration est trop longue pour être reproduite ici. On peut la trouver dans [4, T. 1, sect. 2.6]. Elle utilise le résultat de l'exercice 2.10.

Théorème 2.5.27 (Théorème fondamental de la géométrie affine). *Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une bijection entre espaces affines réels de même dimension $n \geq 2$. Si pour tout triplet (A, B, C) de points alignés de \mathcal{E} les points $f(A), f(B)$ et $f(C)$ sont alignés dans \mathcal{F} , alors f est une application affine.*

Contre-exemples 2.5.28. • Toute application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} préserve l'alignement pour la structure affine canonique de \mathbb{R} , le résultat est donc faux si $n = 1$.

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f : (x, y, z) \mapsto \begin{cases} (x, y, 0) & \text{si } z = 0, \\ (0, 0, 0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors f préserve l'alignement mais n'est pas affine. Par exemple, si f était affine, $f^{-1}(0)$ serait un sous-espace affine de \mathbb{R}^3 .

- La conjugaison $c : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ définie par $(z_1, z_2) \mapsto (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ préserve l'alignement. En effet, elle envoie la droite $z + \mathbb{C}u$ sur $\bar{z} + \mathbb{C}\bar{u}$. Si c était une application \mathbb{C} -affine, alors sa partie linéaire $\vec{c} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ serait une application \mathbb{C} -linéaire satisfaisant $\vec{c}(z) = \vec{c}(\vec{0}z) = c(z)c(0) = \vec{0}\bar{z} = \bar{z}$. C'est absurde.

Remarques 2.5.29. • Dans le contre-exemple précédent, c est affine sur \mathbb{R} lorsqu'on munit \mathbb{C}^2 de sa structure de \mathbb{R} -espace affine canonique.

- Le théorème reste vrai si on remplace \mathbb{R} par un corps de cardinal strictement supérieur à 2 et n'ayant pas d'automorphisme autre que l'identité, par exemple \mathbb{Q} .
- Plus généralement, sur un corps $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$, une bijection f entre espaces de même dimension $n \geq 2$ qui préserve l'alignement est *semi-affine*. C'est-à-dire qu'il existe un automorphisme σ de \mathbb{K} tel que pour toute famille $(A_i, \lambda_i)_{i \in [1, n]}$ avec $m := \sum \lambda_i \neq 0$ on ait :

$$f\left(\frac{1}{m} \sum \lambda_i A_i\right) = \frac{1}{m} \sum \sigma(\lambda_i) f(A_i).$$

Sur \mathbb{F}_2 une bijection préserve toujours l'alignement.

2.5.7 Exercices

Exercice 2.19. Vérifier que les applications de l'exemple 2.5.3 sont affines. Vérifier que leurs parties linéaires sont bien celles données dans l'exemple 2.5.8.

Exercice 2.20. Soient $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une application affine entre espaces affines réels et $A, B \in \mathcal{E}$. Montrer que $f([A, B]) = [f(A), f(B)]$.

Exercice 2.21. Soient f_1, \dots, f_n des applications affines de \mathcal{E} dans \mathcal{F} et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $m := \sum \lambda_i \neq 0$. Montrer que $\frac{1}{m} \sum \lambda_i f_i$ définit une application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{F} .

Exercice 2.22 ([10], p. 31). Soient (\mathcal{E}, E) et (\mathcal{F}, F) deux \mathbb{K} -espaces affines, on note $\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ (resp. $\mathcal{L}(E, F)$) l'ensemble des applications affines (resp. linéaires) de \mathcal{E} dans \mathcal{F} (resp. de E dans F). Montrer que $\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est naturellement muni d'une structure de \mathbb{K} -espace affine de direction $F \times \mathcal{L}(E, F)$. Donner sa dimension en fonction de celles de \mathcal{E} et \mathcal{F} .

Exercice 2.23 (Applications affines et vectorialisé). Soient $f : (\mathcal{E}, E) \rightarrow (\mathcal{F}, F)$ et $O \in \mathcal{E}$. On rappelle que $\Theta_O : E \rightarrow \mathcal{E}, u \mapsto O + u$. Montrer que f est affine si et seulement si $\Theta_{f(O)}^{-1} f \Theta_O$ est linéaire de E dans F . Dans ce cas, montrer que $\vec{f} = \Theta_{f(O)}^{-1} f \Theta_O$.

Exercice 2.24. Montrer qu'une application linéaire $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est injective (resp. surjective, resp. bijective) si et seulement si $\vec{f} : E \rightarrow F$ l'est.

Exercice 2.25 ([10], p. 30). Soient $f_i : \mathcal{E} \rightarrow K$ des formes affines non nulles où $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et $k \leq \dim(\mathcal{E})$. Montrer que $\bigcap f_i^{-1}(c_i)$ est un sous-espace affine de codimension k si et seulement si $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k)$ est une famille libre de E^* .

Exercice 2.26. Soient $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une bijection affine et $A \in \mathcal{E}$ tels que l'orbite de A sous l'action de f soit finie, de cardinal non divisible par la caractéristique du corps de base. Montrer que f a un point fixe.

Exercice 2.27. Soit $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application affine, montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. p est une projection,
2. $p \circ p = p$,
3. $\vec{p} \circ \vec{p} = \vec{p}$ et p a un point fixe.

Exercice 2.28 (Composée d'homothéties). Décrire la nature et les éléments caractéristiques de la composée de l'homothétie de centre A et de rapport α avec l'homothétie de centre B et de rapport β .

Exercice 2.29 (Conjugaison). Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ affine, décrire $f \circ t_u \circ f^{-1}$ et $f \circ h_{A,\alpha} \circ f^{-1}$, où t_u est la translation de vecteur u et $h_{A,\alpha}$ est l'homothétie de centre A et de rapport α .

Exercice 2.30 ([2], p. 44). Soit ABC un vrai triangle du plan affine réel et $M_0 \in (AB)$. On construit M_1 l'intersection de (BC) avec la parallèle à (AC) passant par M_0 , puis M_2 l'intersection de (AC) avec la parallèle à (AB) passant par M_1 , etc. Montrer que $M_6 = M_0$.

2.6 Le groupe affine

Dans cette section, on s'intéresse au groupe des bijections affines d'un espace affine \mathcal{E} . Ceci fournit de premiers exemples des interactions entre algèbre et géométrie. On obtient des informations sur la structure du groupe affine par son action naturelle. Dans l'autre sens, on utilise la réduction de la partie linéaire d'une application affine pour la décrire géométriquement.

2.6.1 Le groupe affine

Définition 2.6.1. D'après la proposition 2.5.4, l'ensemble des bijections affines de \mathcal{E} dans lui-même est un groupe pour la composition. Ce groupe est appelé le *groupe affine* de \mathcal{E} et est noté $\text{Aff}(\mathcal{E})$.

Proposition 2.6.2. Soit \mathcal{E} un espace affine, alors $\text{Aff}(\mathcal{E})$ agit simplement transitivement sur les repères affines de \mathcal{E} .

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 2.5.18. \square

Proposition 2.6.3. L'application partie linéaire $\vec{\cdot} : \text{Aff}(\mathcal{E}) \rightarrow GL(E)$ est un morphisme de groupe surjectif dont le noyau est le sous-groupe des translations.

Démonstration. Si $f \in \text{Aff}(\mathcal{E})$, alors f est inversible et $\overrightarrow{f^{-1}} = (\vec{f})^{-1}$, donc $\vec{f} \in GL(E)$ et $\vec{\cdot}$ est bien définie. D'après la proposition 2.5.9, c'est bien un morphisme de groupe.

Soient $\varphi \in GL(E)$ et $O \in \mathcal{E}$, alors $f : M \mapsto O + \varphi(\overrightarrow{OM})$ est affine de partie linéaire φ , donc $\vec{\cdot}$ est surjective. Soit $f \in \ker(\vec{\cdot})$, alors $\vec{f} = \text{Id}_E$. Soient $O \in \mathcal{E}$ et $u := \overrightarrow{Of(O)}$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a :

$$f(M) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OM}) = O + u + \overrightarrow{OM} = M + u.$$

Donc f est la translation de vecteur u . \square

Notons $t : E \rightarrow \text{Aff}(\mathcal{E})$ le morphisme de groupe $u \mapsto t_u$. On a alors une suite exacte de la forme :

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{t} \text{Aff}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\vec{\cdot}} GL(E) \longrightarrow 0 \quad (2.3)$$

Soit $O \in \mathcal{E}$, rappelons que $\Theta_O : u \mapsto O + u$. On pose $s_O : GL(E) \rightarrow \text{Aff}(\mathcal{E})$ définie par $s_O : \varphi \mapsto \Theta_O \varphi (\Theta_O)^{-1}$ (cf. exercice 2.23).

Proposition 2.6.4. Pour tout $O \in \mathcal{E}$, s_O est une section de la suite exacte (2.3). En particulier, on a que $\text{Aff}(\mathcal{E}) \simeq E \rtimes GL(E)$.

Démonstration. Il est clair que s_O est un morphisme de groupe. Soit $\varphi \in GL(E)$, d'après l'exercice 2.23, $\overrightarrow{s_O(\varphi)} = \varphi$, donc $\vec{\cdot} \circ s_O = \text{Id}_{GL(E)}$ et s_O est bien une section de (2.3). D'après la proposition 1.2.11, on a alors $\text{Aff}(\mathcal{E}) \simeq E \rtimes GL(E)$. \square

Remarques 2.6.5. • Attention l'isomorphisme de la prop. 2.6.4 dépend de O .

- Si on explicite cet isomorphisme (voir sect. 1.2.2), on a que pour tout $f \in \text{Aff}(\mathcal{E})$ et tout $O \in \mathcal{E}$, il existe un unique $u \in E$ tel que $f = t_u \circ s_O(\vec{f})$. En particulier, il existe un unique couple $(u, \varphi) \in E \times \text{Aff}(\mathcal{E})$ tel que $\varphi(O) = O$ et $f = t_u \circ \varphi$.
- De même, il existe un unique $v \in E$ tel que $f = s_O(\vec{f}) \circ t_v$. A priori $u \neq v$.

2.6.2 Existence de points fixes

Proposition 2.6.6. Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension finie et soit $f \in \text{Aff}(\mathcal{E})$. Alors f admet un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de \vec{f} .

Démonstration. D'après la proposition 2.5.14, $\text{Fix}(f)$ est un sous-espace affine de \mathcal{E} de direction $\text{Fix}(\vec{f}) = \ker(\vec{f} - \text{Id})$. Si 1 est valeur propre de \vec{f} , alors $\dim(\text{Fix}(f)) \geq 1$. Ce sous-espace affine peut être vide, mais il ne peut pas être réduit à un point.

Si 1 n'est pas valeur propre de \vec{f} alors $\text{Fix}(f)$ est un sous-espace affine de dimension 0 et il suffit de vérifier qu'il est non vide. Soit $O \in \mathcal{E}$, alors pour tout $u \in E$ on a :

$$O + u \in \text{Fix}(f) \iff f(O + u) = f(O) + \vec{f}(u) = O + u \iff \vec{f}(u) - u = -\overrightarrow{Of(O)}.$$

Par ailleurs, $\vec{f} - \text{id} \in GL(E)$. Donc il existe un unique $u \in E$ tel que $\vec{f}(u) - u = -\overrightarrow{Of(O)}$, et f a un unique point fixe. \square

Remarque 2.6.7. On a besoin du fait qu'un endomorphisme injectif est aussi surjectif dans un espace vectoriel de dimension finie. La dimension finie est donc primordiale.

On a vu dans le second point de 2.6.5 que tout élément de $\text{Aff}(\mathcal{E})$ peut s'écrire comme composée d'une translation et d'une bijection affine ayant un point fixe. La proposition suivante précise ce résultat.

Proposition 2.6.8. *Soient (\mathcal{E}, E) un espace affine de dimension finie et $f \in \text{Aff}(\mathcal{E})$ tel que $E = \ker(\vec{f} - \text{Id}) \oplus \text{Im}(\vec{f} - \text{Id})$, alors il existe un unique couple $(v, g) \in E \times \text{Aff}(\mathcal{E})$ tel que :*

- g a un point fixe,
- $\vec{g}(v) = v$,
- $f = t_v \circ g$.

De plus, t_v et g commutent, $\text{Fix}(g)$ est dirigé par $\ker(\vec{f} - \text{Id}_E)$, et f a un point fixe si et seulement si $v = 0$.

Démonstration. On procède par analyse et synthèse. Supposons que (v, g) existe, on a alors $\vec{f} = \vec{g}$ et $\vec{f}(v) = v$. Soit $O \in \text{Fix}(g)$, on a $f(O) = t_v(g(O)) = O + v$ donc $\overrightarrow{Of(O)} = v \in \ker(\vec{f} - \text{Id})$. Soit maintenant $M \in \mathcal{E}$, on a :

$$\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(O)f(M)} = v + \vec{f}(\overrightarrow{OM}) - \overrightarrow{OM}.$$

Donc v est la projection de $\overrightarrow{Mf(M)}$ sur $\ker(\vec{f} - \text{Id})$ et \overrightarrow{OM} est un antécédent de la projection de $\overrightarrow{Mf(M)}$ sur $\text{Im}(\vec{f} - \text{Id})$. En particulier, v est unique et g également, car $g = (t_v)^{-1} \circ f$.

Passons maintenant à la synthèse. Soit $M \in \mathcal{E}$, on décompose $\overrightarrow{Mf(M)} := v + \vec{f}(u) - u$ selon la somme directe $\ker(\vec{f} - \text{Id}) \oplus \text{Im}(\vec{f} - \text{Id})$. Soit $O := M - u$, alors on a $\overrightarrow{OM} = u$ et donc $\overrightarrow{Of(O)} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{Mf(M)} - \vec{f}(\overrightarrow{OM}) = v$. Posons $g := (t_v)^{-1} \circ f$. Alors on a $f = t_v \circ g$. De plus, $g(O) = f(O) - v = O$ et $\vec{g}(v) = \vec{f}(v) = v$. On a donc montré l'existence de (v, g) .

Montrons que t_v et g commutent. On a $g \circ t_v \circ g^{-1} = \text{Id}_E$ donc $g \circ t_v \circ g^{-1}$ est une translation. Soit $O \in \text{Fix}(g)$, alors

$$g \circ t_v \circ g^{-1}(O) = g(O + v) = g(O) + \vec{g}(v) = O + \vec{f}(v) = O + v.$$

Donc c'est la translation de vecteur v et $g \circ t_v = t_v \circ g$.

Le sous-espace $\text{Fix}(g)$ est dirigé par $\text{Fix}(\vec{g}) = \text{Fix}(\vec{f})$.

Si $v = 0$ alors $f = g$ a un point fixe. Si f a un point fixe alors $(0, f)$ est un couple qui convient et il est unique. \square

2.6.3 Sous-groupes du groupe affine

On a vu que $\text{Aff}(\mathcal{E})$ contient un sous-groupe distingué isomorphe au groupe additif de E : le groupe des translations, qui est aussi $\ker(\vec{})$. Ceci est résumé par la suite exacte (2.3). Nous allons étudier rapidement d'autres sous-groupes de $\text{Aff}(\mathcal{E})$.

Proposition 2.6.9. *Soit \mathcal{E} un espace affine, le centre de $\text{Aff}(\mathcal{E})$ est trivial, sauf si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ et $\dim(\mathcal{E}) = 1$ auquel cas $\text{Aff}(\mathcal{E}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Soit f dans le centre de $\text{Aff}(\mathcal{E})$. Soit $O \in \mathcal{E}$, pour tout $u \in E$ on a $f \circ t_u = t_u \circ f$ donc

$$f(O) + \vec{f}(u) = f(O + u) = f(O) + u.$$

Donc $\vec{f} = \text{Id}_E$ et f est une translation, disons de vecteur v .

Soit $g \in \text{Aff}(\mathcal{E})$, alors $g(O) + \vec{g}(v) = g(O + v) = g(O) + v$, donc $\vec{g}(v) = v$. Ainsi $\vec{g}(v) = v$ pour tout $g \in \text{Aff}(\mathcal{E})$, i.e. $\varphi(v) = v$ pour tout $\varphi \in GL(E)$. Si \mathbb{K} est de cardinal strictement supérieur à 2 ou si E est de dimension au moins 2, cela impose que $v = 0$ et $f = \text{Id}_E$.

Sur \mathbb{F}_2 , si \mathcal{E} est de dimension 1, $\text{Aff}(\mathcal{E})$ a seulement deux éléments : l'identité, et la transposition qui échange les deux points de \mathcal{E} . Cette dernière est affine car c'est la translation de l'unique vecteur non nul de E . \square

Définition 2.6.10. On appelle groupe des *homothéties-translations* le sous-groupe suivant du groupe affine :

$$\mathcal{HT}(\mathcal{E}) := \left\{ f \in \text{Aff}(\mathcal{E}) \mid \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \vec{f} = \lambda \text{Id} \right\} = (\vec{\cdot})^{-1}(\mathbb{K}^* \text{Id}).$$

En particulier, $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$ est distingué car image réciproque d'un sous-groupe distingué de $GL(E)$ (on rappelle que $\mathbb{K}^* \text{Id}$ est le centre de $GL(E)$). Le groupe des homothéties-translations est le sous-groupe des applications affines qui envoient tout sous-espace de \mathcal{E} sur un sous-espace qui lui est parallèle.

On a une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{t} \mathcal{HT}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\vec{\cdot}} \mathbb{K}^* \text{Id} \longrightarrow 0.$$

Proposition 2.6.11. Soit $f \in \mathcal{HT}(\mathcal{E})$, on a les équivalences suivantes.

1. $f = \text{Id}_{\mathcal{E}}$, si et seulement si $|\text{Fix}(f)| \geq 2$, si et seulement si $\vec{f} = \text{id}_E$ et $|\text{Fix}(f)| \geq 1$.
2. f est une translation non triviale, si et seulement si $|\text{Fix}(f)| = 0$, si et seulement si $\vec{f} = \text{Id}_E$ et $f \neq \text{Id}_{\mathcal{E}}$.
3. f est une homothétie non triviale, si et seulement si $|\text{Fix}(f)| = 1$, si et seulement si $\vec{f} = \lambda \text{Id}_E$ avec $\lambda \neq 1$.

Démonstration. Pour le point 1, si $|\text{Fix}(f)| \geq 2$ soient A et $B \in \text{Fix}(f)$, on a en particulier $|\text{Fix}(f)| \geq 1$ et $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{AB}$. Comme \vec{f} est une homothétie vectorielle, son rapport est nécessairement 1. Les autres implications sont claires.

Pour le point 2, si $|\text{Fix}(f)| = 0$, alors $f \neq \text{Id}_{\mathcal{E}}$ et $\vec{f} = \lambda \text{Id}_E$. On a forcément $\lambda = 1$ sinon f aurait un point fixe par la proposition 2.6.6. Les autres implications sont claires.

Pour le point 3, si f est une homothétie de rapport différent de 1, alors f a un unique point fixe par la proposition 2.6.6. Toujours par cette proposition, si $|\text{Fix}(f)| = 1$ alors 1 n'est pas valeur propre de \vec{f} , donc $\vec{f} = \lambda \text{Id}_E$ avec $\lambda \neq 1$. Le reste est clair. \square

Pour conclure cette section, définissons rapidement le sous-groupe des bijections affines qui préservent le volume.

Définition 2.6.12. On appelle *groupe spécial affine*, le sous-groupe de $\text{Aff}(\mathcal{E})$ suivant :

$$\left\{ f \in \text{Aff}(\mathcal{E}) \mid \det(\vec{f}) = 1 \right\} = (\vec{\cdot})^{-1}(SL(E)).$$

Ce sous-groupe est distingué dans $\text{Aff}(\mathcal{E})$ et il s'inscrit dans la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{t} \left\{ f \in \text{Aff}(\mathcal{E}) \mid \det(\vec{f}) = 1 \right\} \xrightarrow{\vec{\cdot}} SL(E) \longrightarrow 0.$$

2.6.4 Exercices

Exercice 2.31. Déterminer le groupe affine de \mathbb{K} muni de sa structure canonique de droite affine.

Exercice 2.32 (Groupe des homothéties-translations). Soit \mathcal{E} un \mathbb{K} -espace affine, on note $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$ le sous-groupe des homothéties-translations de \mathcal{E} .

1. Soit $f \in \text{Aff}(\mathcal{E})$ envoyant tout sous-espace affine de \mathcal{E} sur un sous-espace parallèle. Montrer que $f \in \mathcal{HT}(\mathcal{E})$.
2. Soit $f \in \mathcal{HT}(\mathcal{E})$, déterminer les sous-espaces stables par f .
3. Déterminer le centre de $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$.
4. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que les homothéties engendrent $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$. Que se passe-t-il sur les autres corps ?

Exercice 2.33 (Produits semi-directs). Soit (\mathcal{E}, E) un \mathbb{K} -espace affine, montrer qu'on a les décompositions en produits semi-directs suivantes.

- $\text{Aff}(\mathcal{E}) = E \rtimes GL(E)$,
- $\left\{ f \in \text{Aff}(\mathcal{E}) \mid \det(\vec{f}) = 1 \right\} = E \rtimes SL(E)$,
- $\mathcal{HT}(\mathcal{E}) = E \rtimes \mathbb{K}^*$.

Exercice 2.34 (Invariants et obstructions). Soit \mathcal{E} un espace affine.

1. Montrer que $\text{Aff}(\mathcal{E})$ agit simplement transitivement sur les repères affines (resp. cartésiens) de \mathcal{E} .
2. Montrer que $\text{Aff}(\mathcal{E})$ agit 2-transitivement sur \mathcal{E} . Identifier l'obstruction à ce que cette action soit 3-transitive.
3. Montrer que $\text{Aff}(\mathcal{E})$ agit transitivement sur l'ensemble des droites affines de \mathcal{E} . Identifier l'obstruction à ce que cette action soit 2-transitive.
4. Trouver une obstruction à ce que l'action $\mathcal{HT}(\mathcal{E}) \curvearrowright \mathcal{E}$ soit 2-transitive.
5. Donner un invariant total pour l'action de $\text{Aff}(\mathcal{E})$ sur les sous-espaces affines de \mathcal{E} . Même question lorsqu'on restreint l'action à $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$ à la source.

Exercice 2.35 (Représentation linéaire du groupe affine). Soit V un espace vectoriel de dimension $n + 1$ et $\eta \in V^* \setminus \{0\}$.

1. Montrer que $\mathcal{E} := \eta^{-1}(\{1\})$ est un espace affine de direction $\ker(\eta)$. Montrer que le sous-groupe $\{f \in GL(V) \mid \eta \circ f = \eta\}$ est isomorphe au groupe affine de \mathcal{E} .
2. En déduire que le groupe affine d'un \mathbb{K} -espace affine de dimension n est isomorphe au sous-groupe de $GL_{n+1}(\mathbb{K})$ dont les éléments sont les matrices de la forme :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & a_n \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right),$$

avec $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

2.7 Coordonnées

Dans cette section on présente les coordonnées barycentriques et cartésiennes dans un espace affine de dimension finie. Dans un cas comme dans l'autre, l'intérêt est de ramener la connaissance d'un point, d'un sous-espace ou d'une application affine à la connaissance d'un nombre fini de scalaires. Notre référence pour cette section est toujours [10].

2.7.1 Coordonnées barycentriques versus coordonnées cartésiennes

Définition 2.7.1. Soit (A_0, \dots, A_n) un repère affine de \mathcal{E} , pour tout $A \in \mathcal{E}$ il existe un unique $(n+1)$ -uplet $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ et $A = \sum_{i=0}^n \lambda_i A_i$. On dit que $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ sont les *coordonnées barycentriques* de A dans le repère (A_0, \dots, A_n) .

Remarque 2.7.2. Parfois on demande simplement que $\sum_{i=0}^n \lambda_i \neq 0$. Les coordonnées barycentriques ne sont alors définies qu'à une constante de \mathbb{K}^* près.

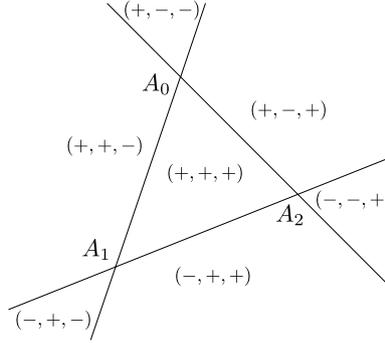


Figure 2.4 – Signes des coordonnées barycentriques dans un repère du plan affine réel.

Le choix d'un repère affine (A_0, \dots, A_n) permet d'identifier \mathcal{E} à l'hyperplan affine d'équation $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ dans \mathbb{K}^{n+1} , en envoyant point par point ce repère sur la base canonique de \mathbb{K}^{n+1} . Une fois qu'on a fait cette identification, les coordonnées barycentriques d'un point de \mathcal{E} dans (A_0, \dots, A_n) sont ses coordonnées dans la base canonique de \mathbb{K}^{n+1} . Les calculs en coordonnées barycentriques se ramènent donc à des calculs vectoriels dans \mathbb{K}^{n+1} (voir l'exercice 2.36).

Exemple 2.7.3. Soient $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{E}$, on suppose que les coordonnées barycentriques de B_i dans le repère (A_0, \dots, A_n) sont $(\mu_{i,0}, \dots, \mu_{i,n})$, i.e. $\sum_{j=0}^n \mu_{i,j} = 1$ et $\sum_{j=0}^n \mu_{i,j} A_j = B_i$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ de somme $m \neq 0$ et soit $B := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k \lambda_i B_i$. Par associativité et homogénéité du barycentre, on a :

$$B = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k \lambda_i \sum_{j=0}^n \mu_{i,j} A_j = \frac{1}{m} \sum_{i,j} \lambda_i \mu_{i,j} A_j = \sum_{j=0}^n \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^k \lambda_i \mu_{i,j} \right) A_j.$$

Finalement, les coordonnées barycentriques de B dans le repère (A_0, \dots, A_n) sont les $\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^k \lambda_i \mu_{i,j} \right)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, et tout se passe comme si on avait fait le calcul dans \mathbb{K}^{n+1} .

Définition 2.7.4. Soit (O, e_1, \dots, e_n) un repère cartésien de \mathcal{E} , pour tout $A \in \mathcal{E}$ il existe un unique n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $A = O + \sum x_i e_i$. On dit que (x_1, \dots, x_n) sont les *coordonnées cartésiennes* de A dans le repère (O, e_1, \dots, e_n) .

Faisons maintenant le lien entre les coordonnées barycentriques et les coordonnées cartésiennes d'un point dans un espace affine \mathcal{E} de dimension n . Soit (A_0, \dots, A_n) un repère affine de \mathcal{E} , notons $e_i := \overrightarrow{A_0 A_i}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors (A_0, e_1, \dots, e_n) est un

repère cartésien de \mathcal{E} par la proposition 2.4.17. Soit $A \in \mathcal{E}$ on a :

$$\begin{aligned} A = A_0 + \sum_{i=1}^n x_i e_i &\iff \overrightarrow{A_0 A} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{A_0 A_i} \\ &\iff \overrightarrow{A_0 A} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{A_0 A_i} + \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) \overrightarrow{A_0 A_0} \\ &\iff A = \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i. \end{aligned}$$

Donc si A a pour coordonnées cartésiennes (x_1, \dots, x_n) dans (A_0, e_1, \dots, e_n) , ses coordonnées barycentriques dans (A_0, \dots, A_n) sont $(1 - \sum_{i=1}^n x_i, x_1, \dots, x_n)$. Inversement, si A a pour coordonnées barycentriques $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ dans (A_0, \dots, A_n) , alors $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$ et les coordonnées cartésiennes de A dans (A_0, e_1, \dots, e_n) sont $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Remarque 2.7.5. En particulier, une fonction de \mathcal{E} dans \mathbb{K} est polynomiale de degré d dans un repère affine si et seulement si elle est polynomiale de degré d dans le repère cartésien associé. De même, la notion de fonction polynomiale de degré d ne dépend pas d'un choix de repère (affine ou cartésien). Cette notion a un sens intrinsèque dans un espace affine de dimension finie. C'est notamment utile quand on veut parler de coniques.

2.7.2 Équations de sous-espaces affines

Soient \mathcal{E} un espace affine et $\mathcal{F} := A + F$ un sous-espace affine de dimension k de \mathcal{E} . Si $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ alors :

$$M \in \mathcal{F} \iff \overrightarrow{AM} \in F \iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}, \overrightarrow{AM} = \sum \lambda_i u_i.$$

Supposons \mathcal{E} muni d'un repère cartésien dans lequel $A := (a_1, \dots, a_n)$, $M := (x_1, \dots, x_n)$ et pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ $u_i := (u_{i,1}, \dots, u_{i,n})$ alors on a une *représentation paramétrique* de \mathcal{F} :

$$M \in \mathcal{F} \iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}, \begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda_1 u_{1,1} + \dots + \lambda_k u_{k,1} \\ \dots \\ x_n = a_n + \lambda_1 u_{1,n} + \dots + \lambda_k u_{k,n}. \end{cases}$$

Si maintenant $F := f^{-1}(0)$ avec $f : E \rightarrow \mathbb{K}^k$ linéaire, soit $O \in \mathcal{E}$ alors :

$$M \in \mathcal{F} \iff \overrightarrow{OM} \in F \iff f(\overrightarrow{OM}) = 0 \iff f(\overrightarrow{OM}) = f(\overrightarrow{OA}).$$

Si $f(\overrightarrow{OA}) := (b_1, \dots, b_k)$ et si E est muni d'une base dans laquelle $\overrightarrow{OM} := (x_1, \dots, x_n)$ et la matrice de f est (f_{ij}) , alors on a une *équation cartésienne* de \mathcal{F} :

$$M \in \mathcal{F} \iff f(x_1, \dots, x_n) = (b_1, \dots, b_k) \iff \begin{cases} f_{11}x_1 + \dots + f_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ f_{k1}x_1 + \dots + f_{kn}x_n = b_k. \end{cases}$$

Supposons maintenant que $\mathcal{F} := \langle \{A_1, \dots, A_k\} \rangle$, où la famille (A_1, \dots, A_k) est affinement libre. On identifie \mathcal{E} à l'hyperplan affine d'équation cartésienne $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ dans \mathbb{K}^{n+1} par le choix d'un repère affine. Notons $(a_{ij})_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ les coordonnées barycentriques de A_j dans ce repère. Soit $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, alors $M \in \mathcal{F}$ si et seulement

si la famille (M, A_1, \dots, A_k) est affinement liée, c'est-à-dire si et seulement si la famille (M, A_1, \dots, A_k) est vectoriellement liée dans \mathbb{K}^{n+1} . Donc

$$M \in \mathcal{F} \iff \operatorname{rg} \begin{pmatrix} x_0 & a_{0,1} & a_{0,2} & \cdots & a_{0,k} \\ x_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,k} \end{pmatrix} = k,$$

ce qui permet d'obtenir un système d'équations barycentriques décrivant \mathcal{F} .

Remarque 2.7.6. Il n'est pas nécessaire de considérer des coordonnées barycentriques normalisées (i.e. de somme 1), en effet cette condition est invariante si on multiplie une colonne de la matrice par un scalaire. En particulier, on obtient toujours un système d'équations homogènes.

Exemple 2.7.7. On se place dans un plan affine muni d'un repère. Soit $A := (a_0, a_1, a_2)$ et $B := (b_0, b_1, b_2)$ alors

$$\begin{aligned} M := (x_0, x_1, x_2) \in (AB) &\iff \det \begin{pmatrix} x_0 & a_0 & b_0 \\ x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff x_0(a_1b_2 - a_2b_1) + x_1(a_2b_0 - a_0b_2) + x_2(a_0b_1 - a_1b_0) = 0. \end{aligned}$$

2.7.3 Matrice d'une application affine

Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ affine entre \mathbb{K} -espaces affines de dimension finie. Alors f est totalement déterminée par l'image d'un repère affine (A_0, \dots, A_n) de \mathcal{E} . Soit (B_0, \dots, B_m) un repère affine de \mathcal{F} , notons $(a_{ij})_{i \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ les coordonnées barycentriques de $f(A_j)$ dans ce repère. Soit $A := (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{E}$, alors

$$f(A) = f\left(\sum_{j=0}^n \lambda_j A_j\right) = \sum_{j=0}^n \lambda_j f(A_j) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m \lambda_j a_{ij} B_i = \sum_{i=0}^m \left(\sum_{j=0}^n a_{ij} \lambda_j\right) B_i.$$

Les coordonnées barycentriques de $f(A)$ sont donc les $\left(\sum_{j=0}^n a_{ij} \lambda_j\right)_{i \in \llbracket 0, m \rrbracket}$. Finalement, si on note M la matrice (a_{ij}) , on obtient les coordonnées barycentriques de $f(A)$ dans le repère (B_0, \dots, B_m) en appliquant M aux coordonnées barycentriques de A dans le repère (A_0, \dots, A_n) .

Remarque 2.7.8. Il n'est pas nécessaire de considérer des coordonnées barycentriques normalisées pour A . En revanche, il faut faire attention à prendre des coordonnées barycentriques normalisées des $(f(A_j))_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.

2.7.4 Exercices

Exercice 2.36 (Le calcul barycentrique comme calcul vectoriel, [10] p. 13). Cet exercice est la suite de l'exercice 2.17.

Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit \mathcal{E} un hyperplan affine de V ne contenant pas 0 (penser à l'exemple fondamental $\{(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid \sum \lambda_i = 1\} \subset \mathbb{K}^{n+1}$). On note E la direction de \mathcal{E} , qui est un hyperplan vectoriel de V .

Soient $A_0, \dots, A_k \in \mathcal{E}$ avec A_j de coordonnées barycentriques (a_{0j}, \dots, a_{nj}) dans un certain repère affine de \mathcal{E} . Montrer que (A_0, \dots, A_k) est affinement libre si et seulement si la matrice des (a_{ij}) est de rang $k+1$. En déduire que (A_0, \dots, A_n) est un repère affine si et seulement si $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Exercice 2.37 (Les coordonnées barycentriques comme volumes, [10] p. 14). Soient \mathcal{E} un espace affine de dimension n , (A_0, \dots, A_n) un repère affine et e une base quelconque de E . Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, et tout $M \in \mathcal{E}$ on note :

$$\Delta_i(M) := \det_e \left(\overrightarrow{MA_0}, \dots, \overrightarrow{MA_{i-1}}, \overrightarrow{MA_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{MA_n} \right).$$

1. Soit $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées barycentriques (x_0, \dots, x_n) dans le repère (A_0, \dots, A_n) , montrer que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_i = \frac{\Delta_i(M)}{\Delta_i(A_i)}$.
Indication : le rapport $\frac{\Delta_i(M)}{\Delta_i(A_i)}$ ne dépendant pas de la base e , on peut supposer que $e = \left(\overrightarrow{A_i A_0}, \dots, \overrightarrow{A_i A_{i-1}}, \overrightarrow{A_i A_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{A_i A_n} \right)$ de sorte que $\Delta_i(A_i) = 1$.
2. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\Delta_i(A_i) = (-1)^i \Delta_0(A_0)$.
3. Interpréter les coordonnées barycentriques en termes de volumes orientés.

2.8 Quelques théorèmes classiques

Pour conclure ce chapitre, nous citons un certain nombre de théorèmes célèbres de géométrie affine. On peut les trouver dans la plupart des références déjà citées dans ce chapitre [2, 4, 10, 20]. Pour chaque résultat nous donnons une référence possible

Notation 2.8.1. Soient A, B et C trois points alignés d'un espace affine avec $A \neq C$. On note $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ l'unique scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\overline{AB} = \alpha \overline{AC}$. On interprète $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ comme le rapport des longueurs orientées de \overline{AB} et \overline{AC} .

Théorème 2.8.2 (Thalès, [10] p. 43). Soient (\mathcal{E}, E) un espace affine, $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ et \mathcal{H}_3 trois hyperplans parallèles distincts de direction H et soient (\mathcal{D}, D) et (\mathcal{D}', D') deux droites de \mathcal{E} telles que $D \oplus H = E$ et $D' \oplus H = E$. On note A_i (resp. B_i) l'unique point de $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{D}'$). Alors on a :

$$\frac{\overline{A_1 A_2}}{\overline{A_1 A_3}} = \frac{\overline{B_1 B_2}}{\overline{B_1 B_3}}.$$

Si de plus $A_1 = B_1$ et $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}'$,

$$\frac{\overline{A_1 A_2}}{\overline{A_1 A_3}} = \frac{\overline{B_1 B_2}}{\overline{B_1 B_3}} = \frac{\overline{A_2 B_2}}{\overline{A_3 B_3}}.$$

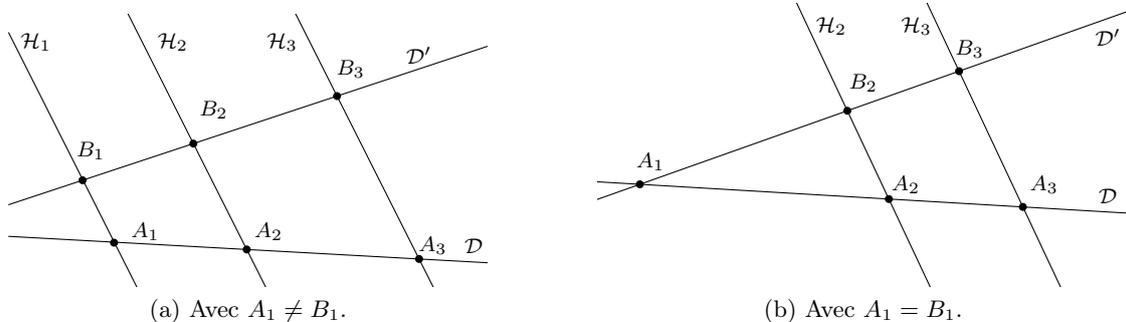


Figure 2.5 – Le théorème de Thalès dans un plan affine.

Démonstration. Posons $\alpha := \frac{\overrightarrow{B_1B_2}}{\overrightarrow{B_1B_3}}$. On note p la projection affine sur \mathcal{D} parallèlement à H . On a alors, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $p(B_i) = A_i$. Par définition, on a $\alpha \overrightarrow{B_1B_3} = \overrightarrow{B_1B_2}$. En appliquant \vec{p} à cette égalité on trouve :

$$\alpha \overrightarrow{A_1A_3} = \alpha \vec{p}(\overrightarrow{B_1B_3}) = \vec{p}(\overrightarrow{B_1B_2}) = \overrightarrow{A_1A_2}.$$

Comme $A_1 \neq A_3$, on en déduit $\frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\overrightarrow{A_1A_3}} = \alpha$.

Si $A_1 = B_1$, soit h l'homothétie de centre A_1 et de rapport α . Comme $\overrightarrow{A_1A_2} = \alpha \overrightarrow{A_1A_3}$ et $\overrightarrow{B_1B_2} = \alpha \overrightarrow{B_1B_3}$ on a $h(A_3) = A_2$ et $h(B_3) = B_2$. Donc

$$\overrightarrow{A_2B_2} = \vec{h}(\overrightarrow{A_3B_3}) = \alpha \overrightarrow{A_3B_3},$$

car \vec{h} est l'homothétie vectorielle de rapport α . Finalement $\alpha = \frac{\overrightarrow{A_2B_2}}{\overrightarrow{A_3B_3}}$. \square

Théorème 2.8.3 (Pappus affine, [10] p. 46). *Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites affines distinctes d'un plan affine. Soient $A, B, C \in \mathcal{D}$ et $A', B', C' \in \mathcal{D}'$, on suppose ces six points distincts. Si $(AB') \parallel (A'B)$ et $(BC') \parallel (B'C)$ alors $(AC') \parallel (A'C)$.*

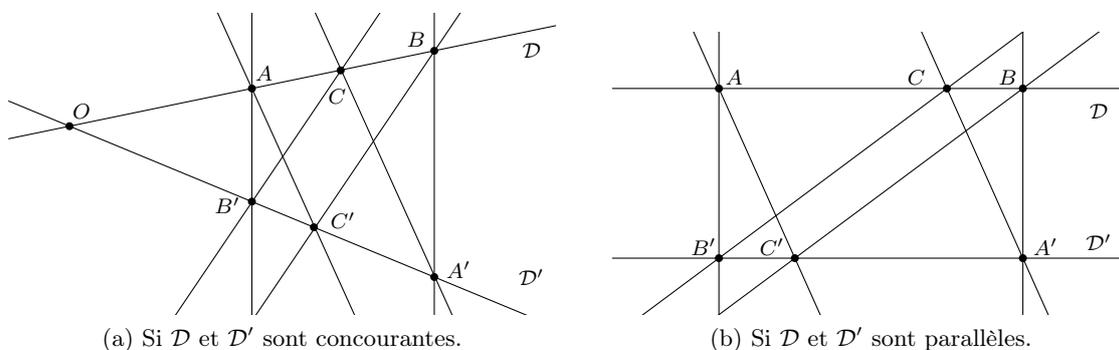


Figure 2.6 – Le théorème de Pappus affine.

Démonstration. Supposons que les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' s'intersectent en O . Soient h_1 l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}}$ et h_2 l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\overrightarrow{OC}}{\overrightarrow{OB}}$. Remarquons que si $O = B$ ou $O = A$ alors les hypothèses imposent que $A = B = C = O$ et le résultat est vrai dans ce cas. On suppose désormais que A et $B \neq O$ de sorte que h_1 et h_2 sont bien définies.

On a $h_1(A) = B$ et h_1 envoie donc (AB') sur la droite parallèle passant par B , à savoir $(A'B)$. Comme B' est l'intersection de (AB') et \mathcal{D}' , $h_1(B')$ est l'intersection de $h_1((AB')) = (A'B)$ et $h_1(\mathcal{D}') = \mathcal{D}'$. Donc $h_1(B') = A'$. Par un raisonnement similaire $h_2(C') = B'$.

D'une part $h_2(h_1(A)) = C$. D'autre part, comme h_1 et h_2 ont même centre, elles commutent. Donc $h_2(h_1(C')) = h_1(h_2(C')) = h_1(B') = A'$. Ainsi $h_2 \circ h_1$ envoie (AC') sur $(A'C)$ et ces deux droites sont donc parallèles.

Si \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont parallèles, on considère t_1 la translation de vecteur \overrightarrow{AB} et t_2 la translation de vecteur \overrightarrow{BC} . Par le même genre d'arguments que précédemment, $t_1(B') = A'$ et $t_2(C') = B'$. On a alors $t_2(t_1(A)) = C$ et $t_2(t_1(C')) = t_1(t_2(C')) = A'$ et donc $t_2 \circ t_1$ envoie (AC') sur $(A'C)$ et ces deux droites sont donc parallèles. \square

Théorème 2.8.4 (Desargues affine, [10] p. 47). *Soient ABC et $A'B'C'$ deux vrais triangles sans sommet commun et tels que $(AB) \parallel (A'B')$, $(AC) \parallel (A'C')$ et $(BC) \parallel (B'C')$. Alors (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.*

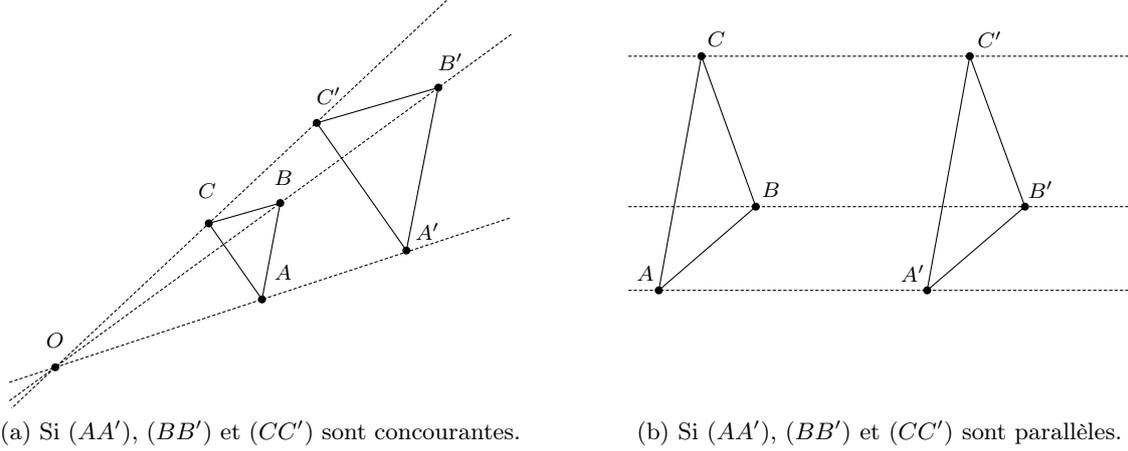


Figure 2.7 – Le théorème de Desargues affine.

Démonstration. Supposons dans un premier temps que (AA') et (BB') soient sécantes en O . En particulier ces droites sont distinctes, ce qui impose $O \notin (AB)$ sous nos hypothèses. Montrons que $O \in (CC')$.

Soient $\alpha := \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ et h l'homothétie de centre O et de rapport α . On a $h(A) = A'$ donc h envoie (AB) sur la droite parallèle passant par A' , à savoir $(A'B')$. Par ailleurs $O \in (BB')$, donc (BB') est stable par h . Le point B est l'unique point d'intersection de (AB) et (BB') . Il est donc envoyé par h sur le point d'intersection de $h((AB)) = (A'B')$ et $h((BB')) = (BB')$. Donc $h(B) = B'$.

Ensuite, h envoie (AC) sur la droite parallèle passant par A' , à savoir $(A'C')$. De même $h((BC)) = (B'C')$, de sorte que $h(C) = C'$. Donc O, C et C' sont alignés et $O \in (CC')$.

Si (AA') et (BB') sont parallèles, soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$. Cette translation envoie (AB) sur $(A'B')$ et donc $t(B) = B'$. De même, t envoie (AC) sur $(A'C')$ et (BC) sur $(B'C')$ donc $t(C) = C'$. Ceci montre que $(CC') \parallel (AA') \parallel (BB')$. \square

Remarque 2.8.5. Dans les preuves des théorèmes de Pappus et Desargues, on doit considérer deux cas selon que certaines droites sont parallèles ou non. Comme on le verra dans le chapitre 5, cela vient du fait que ces deux théorèmes sont en fait de nature projective. Dans les versions projectives de ces résultats, il n'y a plus de cas à distinguer.

Théorème 2.8.6 (Menelaüs, [10] p. 44). *Soit (A, B, C) un repère d'un plan affine, soient $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$ supposés distincts de A, B et C . Alors A', B' et C' sont alignés si et seulement si :*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Démonstration. On va utiliser les coordonnées barycentriques dans le repère (A, B, C) . Comme $A' \in (BC)$ et $A' \notin \{B, C\}$, ses coordonnées sont de la forme $(0, \alpha, 1 - \alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$. On a alors $\alpha \overrightarrow{A'B} + (1 - \alpha) \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$, c'est-à-dire $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{1 - \alpha}{\alpha}$.

De même, on a $B' = (1 - \beta, 0, \beta)$ et $C' = (\gamma, 1 - \gamma, 0)$ avec $\beta, \gamma \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ et on

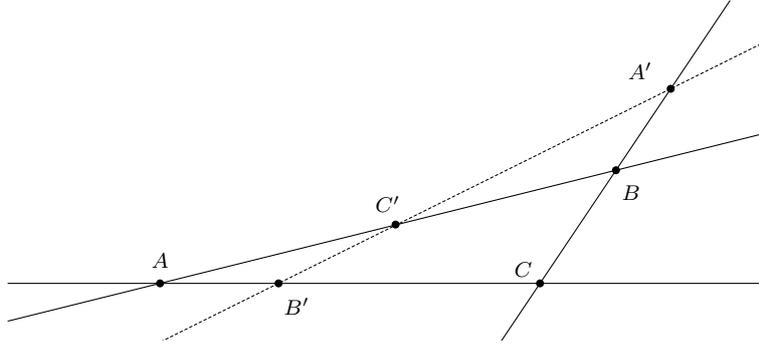


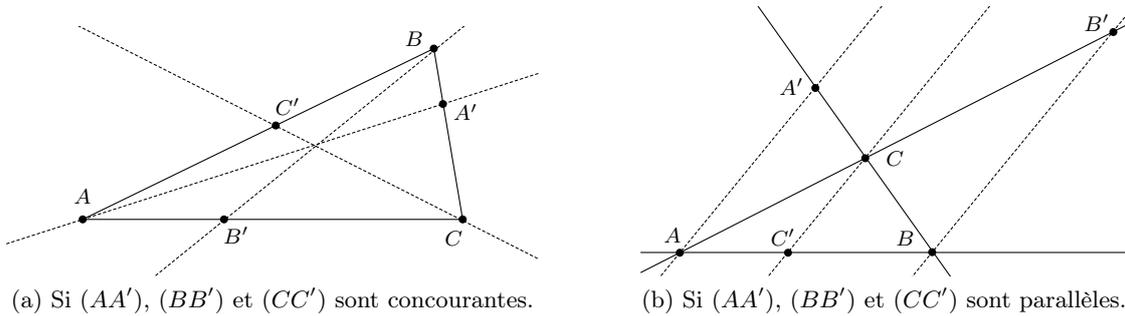
Figure 2.8 – Le théorème de Menelaüs.

montre que $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{1-\beta}{\beta}$ et $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{1-\gamma}{\gamma}$. Alors on a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}
 A', B', C' \text{ alignés} &\iff \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1-\beta & \gamma \\ \alpha & 0 & 1-\gamma \\ 1-\alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \leq 2 \\
 &\iff \det \begin{pmatrix} 0 & 1-\beta & \gamma \\ \alpha & 0 & 1-\gamma \\ 1-\alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} = \alpha\beta\gamma + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 0 \\
 &\iff \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{1-\beta}{\beta} \frac{1-\gamma}{\gamma} = -1 \\
 &\iff \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1. \quad \square
 \end{aligned}$$

Théorème 2.8.7 (Céva, [10] p. 45). *Soit (A, B, C) un repère d'un plan affine, soient $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$ supposés distincts de A , B et C . Alors les droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes si et seulement si :*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$



(a) Si (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes.

(b) Si (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles.

Figure 2.9 – Le théorème de Céva.

Démonstration. On utilise les mêmes notations que dans la preuve du théorème de Menelaüs (thm. 2.8.6). On travaille toujours dans le repère affine (A, B, C) .

Supposons dans un premier temps que les droites (AA') , (BB') et (CC') concourent en un point $M := (x, y, z)$. On a $x \neq 0$, sinon on aurait $M \in (BC)$ ce qui imposerait $B' = C$

et $C' = B$. Ceci est exclu par hypothèse. De même $y \neq 0$ et $z \neq 0$. Comme $M \in (AA')$, il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $M = \mu A + (1 - \mu)A'$. On a donc

$$(x, y, z) = \mu(1, 0, 0) + (1 - \mu)(0, \alpha, 1 - \alpha) = (\mu, \alpha(1 - \mu), (1 - \alpha)(1 - \mu))$$

de sorte que $\frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{z}{y}$. Le même raisonnement conduit à $\frac{1-\beta}{\beta} = \frac{x}{z}$ et $\frac{1-\gamma}{\gamma} = \frac{y}{x}$. Finalement,

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \left(-\frac{1-\beta}{\beta}\right) \left(-\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) = -\frac{z}{y} \frac{x}{z} \frac{y}{x} = -1.$$

Si maintenant les droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles de direction D , soit p la projection sur (BC) parallèlement à D . On a $p(A) = A'$, $p(B') = B$ et $p(C') = C$. Par le même raisonnement que dans la preuve du théorème de Thalès (thm. 2.8.2), on montre alors que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$. De même, $\frac{\overline{BC'}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$ en utilisant la projection sur (AC) parallèlement à D . Au final on a :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} \cdot \frac{\overline{BC'}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Réciproquement, supposons que $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$. Si (AA') et (BB') sont parallèles, notons C'' le point d'intersection de (AB) avec la parallèle à (AA') passant par C . D'après le sens direct appliqué avec C'' à la place de C' , on a :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = -1 = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}.$$

Donc $\frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{1-\gamma}{\gamma}$. Alors $\gamma \overrightarrow{C''A} + (1-\gamma)\overrightarrow{C''B} = 0$, donc $C'' = (\gamma, 1-\gamma, 0) = C'$ et $(CC') \parallel (AA') \parallel (BB')$.

Enfin, si (AA') et (BB') concourent en $M = (x, y, z)$, on a comme dans le sens direct que $\frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{z}{y}$ et $\frac{1-\beta}{\beta} = \frac{x}{z}$. Mais alors

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{1-\beta}{\beta} \frac{1-\gamma}{\gamma} = -\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

et donc $\frac{1-\gamma}{\gamma} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\beta}{1-\beta} = \frac{y}{x}$ et $(1-\gamma)x = \gamma y$. D'où

$$\begin{aligned} zC + (1-z)C' &= (0, 0, z) + (x+y)(\gamma, 1-\gamma, 0) \\ &= ((x+y)\gamma, (x+y)(1-\gamma), z) \\ &= (x(\gamma+1-\gamma), y(1-\gamma+\gamma), z) \\ &= M \end{aligned}$$

et $M \in (CC')$. Finalement (AA') , (BB') et (CC') concourent en M . □

Théorème 2.8.8 (Gergonne, [10] p. 49). *Soit (A, B, C) un repère d'un plan affine, soient $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$ supposés distincts de A, B et C . Si les droites (AA') , (BB') et (CC') concourent en un point M , alors M vérifie :*

$$\frac{\overline{MA'}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{MB'}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{MC'}}{\overline{CC'}} = 1.$$

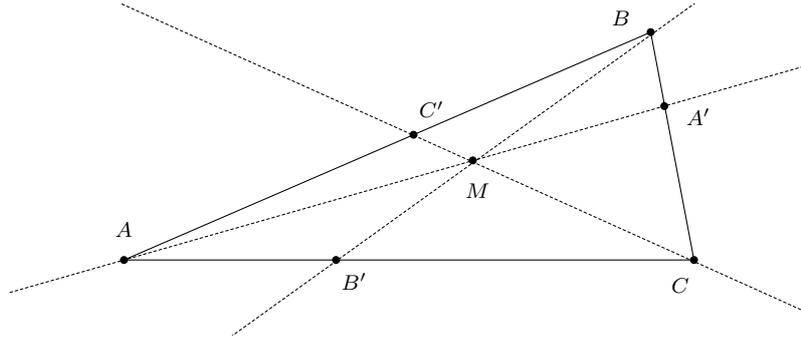


Figure 2.10 – Le théorème de Gergonne.

Démonstration. On travaille dans le repère affine (A, B, C) avec les mêmes notations que pour les preuves précédentes (thm. 2.8.6 et 2.8.7), i.e. $A' := (0, \alpha, 1 - \alpha)$, $B' := (1 - \beta, 0, \beta)$, $C' := (\gamma, 1 - \gamma, 0)$ et $M := (x, y, z)$. Comme $M \in (AA')$, $M = \lambda A + (1 - \lambda)A'$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$. Donc $\lambda \overrightarrow{MA} + (1 - \lambda) \overrightarrow{MA'} = 0$, d'où

$$\overrightarrow{AA'} = \lambda \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA'} = (1 - \lambda) \overrightarrow{MA'} + \lambda \overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MA'}$$

et $\frac{\overrightarrow{MA'}}{\overrightarrow{AA'}} = \lambda$. Par ailleurs $M = (x, y, z) = \lambda(1, 0, 0) + (1 - \lambda)(0, \alpha, 1 - \alpha)$ et donc $\lambda = x$. On a donc montré que $\frac{\overrightarrow{MA'}}{\overrightarrow{AA'}} = x$. On prouve de façon similaire que $\frac{\overrightarrow{MB'}}{\overrightarrow{BB'}} = y$ et $\frac{\overrightarrow{MC'}}{\overrightarrow{CC'}} = z$. Ainsi,

$$\frac{\overrightarrow{MA'}}{\overrightarrow{AA'}} + \frac{\overrightarrow{MB'}}{\overrightarrow{BB'}} + \frac{\overrightarrow{MC'}}{\overrightarrow{CC'}} = x + y + z = 1. \quad \square$$

Chapitre 3

Géométrie euclidienne

On va désormais s'intéresser à la géométrie euclidienne. Il s'agit de considérer un espace affine réel dont la direction est un espace euclidien. On ajoute ainsi une structure métrique à la structure affine. Dans ce cadre, on peut manipuler les notions de distance et d'angle. Dans tout ce chapitre, les espaces vectoriels et affines considérés seront des espaces réels de dimension finie.

La géométrie euclidienne étant la partie la plus étudiée de la géométrie classique, il existe une multitude de résultats dans ce cadre, d'intérêts variés. Nous n'en évoquerons que quelques uns, mais les exercices de [10, chap. C], par exemple, donnent de nombreux exemples (et applications).

Les deux sujets principaux que nous allons aborder sont : la classification des isométries d'un espace affine euclidien de dimension 2 ou 3 et la définition des notions d'angles. On profite aussi de cette occasion pour évoquer l'utilisation des nombres complexes en géométrie, et notamment les propriétés de morphisme de l'exponentielle complexe.

Les références pour ce chapitre sont [2, chap. II, III et V], [4, T. 2] et [10, chap. C]. Pour les résultats d'algèbre concernant le groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien, nous renvoyons à [4, T. 2 chap. 8] ou [15, chap. VIII]. Attention néanmoins, ce qui est appelé angle dans [15] correspond à ce que nous appelons la mesure d'un angle.

3.1 L'exponentielle complexe

Dans cette section, on rappelle succinctement les propriétés de l'exponentielle complexe qui sont utiles en géométrie euclidienne plane. On pourra se reporter à [7, sect. I.3], qui présente une preuve un peu différente de la proposition 3.1.4. On suppose ici connus tous les résultats classiques sur les séries entières.

3.1.1 Propriétés de morphismes

Définition 3.1.1. L'*exponentielle* est la fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie comme la somme de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} X^n$, qui est de rayon de convergence infini. On note cette fonction \exp et on note souvent e^z pour $\exp(z)$.

Proposition 3.1.2. \exp est un morphisme de groupe de $(\mathbb{C}, +)$ vers (\mathbb{C}^*, \cdot) .

Démonstration. On a immédiatement $e^0 = 1$. Soient $x, y \in \mathbb{C}$ alors

$$e^{x+y} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} (x+y)^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} x^k y^{n-k} = e^x e^y,$$

où on a reconnu un produit de Cauchy pour obtenir la dernière égalité. \square

Proposition 3.1.3. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z| = \exp(\Re(z))$. En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|e^{it}| = 1$.*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$, $|e^z|^2 = e^z \bar{e}^z = e^z e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = \exp(2\Re(z)) = \exp(\Re(z))^2$. Donc $|e^z| = \pm \exp(\Re(z))$ et ces deux quantités sont positives, donc $|e^z| = \exp(\Re(z))$. \square

Dans la suite, on notera $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} = 1\}$ l'ensemble des complexes de module 1. C'est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \cdot) . De plus, le cercle \mathbb{S}^1 est connexe, par exemple parce qu'il est connexe par arcs. Soient x et $y \in \mathbb{S}^1$, on peut trouver un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ reliant x à y . Alors $\frac{\gamma}{|\gamma|}$ est un chemin continu dans \mathbb{S}^1 reliant x à y .

Proposition 3.1.4. *L'application $t \mapsto e^{it}$ réalise un morphisme de groupe surjectif de $(\mathbb{R}, +)$ vers (\mathbb{S}^1, \cdot) . Son noyau est un sous-groupe discret de \mathbb{R} non réduit à $\{0\}$.*

Démonstration. Notons $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ l'application $t \mapsto e^{it}$. D'après 3.1.3, ϕ est bien à valeurs dans \mathbb{S}^1 et on déduit de 3.1.2 que c'est un morphisme de groupe. On va montrer que le sous-groupe $\phi(\mathbb{R})$ est à la fois ouvert et fermé dans \mathbb{S}^1 , on conclura par connexité que ϕ est surjectif.

Commençons par montrer que $\phi(\mathbb{R}) \neq \{1\}$. En dérivant terme à terme la série, on a $\exp' = \exp$. En particulier, $\exp'(0) = 1$ et $\phi'(0) = i$. Donc ϕ n'est pas constante au voisinage de 0 et $\phi(\mathbb{R})$ n'est pas réduit à $\{1\}$.

Ensuite $\phi(\mathbb{R})$ est un voisinage de 1 dans \mathbb{S}^1 . En effet, soit $z_0 := x_0 + iy_0 \in \phi(\mathbb{R}) \setminus \{1\}$, montrons par l'absurde que $\mathbb{S}^1 \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > x_0\} \subset \phi(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $z := x + iy \in \mathbb{S}^1$ tel que $x > x_0$ et $z \notin \phi(\mathbb{R})$. Alors $z^{-1} = \bar{z} \notin \phi(\mathbb{R})$ et $x < 1$. On peut alors séparer $\phi(\mathbb{R})$ en deux ouverts disjoints non vides :

$$\phi(\mathbb{R}) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > x\} \quad \text{et} \quad \phi(\mathbb{R}) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < x\},$$

qui contiennent respectivement 1 et z_0 . Or, comme \exp est continue et \mathbb{R} est connexe, $\phi(\mathbb{R})$ est connexe. On obtient une contradiction, donc $\mathbb{S}^1 \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > x_0\} \subset \phi(\mathbb{R})$.

Soit U un ouvert de \mathbb{S}^1 tel que $1 \in U \subset \phi(\mathbb{R})$. Pour tout $z \in \phi(\mathbb{R})$, comme la multiplication par z est un homéomorphisme de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{S}^1 , $z \cdot U$ est un ouvert de \mathbb{S}^1 et $z \in z \cdot U \subset \phi(\mathbb{R})$. Donc $\phi(\mathbb{R})$ est ouvert. Enfin, $\mathbb{S}^1 \setminus \phi(\mathbb{R}) = \bigcup_{z \notin \phi(\mathbb{R})} z \cdot \phi(\mathbb{R})$ est ouvert donc $\phi(\mathbb{R})$ est fermé. Finalement $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1$ par connexité de \mathbb{S}^1 .

Le noyau de ϕ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, donc dense ou discret. Comme ϕ est continu, si $\ker(\phi)$ était dense on aurait ϕ constant à 1. Ce n'est pas le cas donc $\ker(\phi)$ est discret. Comme ϕ est surjectif, il existe $t \in \mathbb{R}^*$ tel que $\phi(t) = -1$. Alors $\phi(2t) = \phi(t)^2 = 1$ et $2t \in \ker(\phi)$, donc $\ker(\phi) \neq \{0\}$. \square

Définition 3.1.5. On note π l'unique réel positif tel que $2\pi\mathbb{Z} = \ker(\phi)$.

Corollaire 3.1.6. *Le morphisme $t \mapsto e^{it}$ induit un isomorphisme de groupes topologiques de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur \mathbb{S}^1 .*

Démonstration. Notons de nouveau $\phi : t \mapsto e^{it}$, d'après la proposition 3.1.4 on a une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow 2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\phi} \mathbb{S}^1 \longrightarrow 1$$

donc ϕ induit un isomorphisme $\bar{\phi} : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^1$. Il faut ensuite vérifier que $\bar{\phi}$ est un homéomorphisme. Comme ϕ est continu, $\bar{\phi}$ l'est aussi pour la topologie quotient. Ainsi $\bar{\phi}$ est une bijection continue, $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est compact (car séparé et image de $[0, 2\pi]$ par la projection canonique) et \mathbb{S}^1 est séparé donc $\bar{\phi}$ est un homéomorphisme. \square

Remarque 3.1.7. Attention, $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et \mathbb{S}^1 ne sont pas canoniquement isomorphes. En effet, $t \mapsto e^{-it}$ induit aussi un isomorphisme, qui est $\bar{\phi}$ composé avec la conjugaison complexe au but (ou avec $-\text{Id}_{\mathbb{R}}$ à la source).

On peut ensuite définir \cos et \sin comme les parties réelle et imaginaire de la fonction $t \mapsto e^{it}$ respectivement. On déduit ensuite les formules usuelles de trigonométrie des résultats précédents sur l'exponentielle. Par exemple, d'après 3.1.3 on a $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3.1.2 Exercices

Exercice 3.1 (Une formule bien connue). Montrer que $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Exercice 3.2 (Trigonométrie). Vérifier que vous savez redémontrer les formules de trigonométrie usuelles :

$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \\ \sin(a + b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), \\ &\dots\end{aligned}$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(3x) = 4\cos(x)^3 - 3\cos(x)$.

3.2 Espaces vectoriels euclidiens

Dans cette section, on rappelle des résultats concernant les espaces vectoriels euclidiens qui nous seront utiles dans la suite. On discute des notions d'espaces euclidiens et d'isométries puis on étudie le groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien. On porte un intérêt tout particulier au cas de la dimension 2, qui est crucial pour définir les angles (cf. sect. 3.3). Ces sujets sont traités dans [4, T. 2 chap. 8] et [15, chap. VIII], par exemple.

3.2.1 Définitions

Définition 3.2.1. Un espace vectoriel *euclidien* est un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension finie muni d'un produit scalaire euclidien $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Notations 3.2.2. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien, on note $\|\cdot\|$ la norme associée. On notera parfois $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ et $\|\cdot\|_E$ pour éviter les ambiguïtés.

On rappelle que pour tout $x \in E$, $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. On rappelle également que la norme permet de retrouver le produit scalaire grâce à l'*identité de polarisation* suivante :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right). \quad (3.1)$$

Définition 3.2.3. Deux vecteurs x et $y \in E$ sont dits *orthogonaux* si $\langle x, y \rangle = 0$, on note parfois $x \perp y$. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits *orthogonaux* si : $\forall x \in F, \forall y \in G, \langle x, y \rangle = 0$. Dans ce cas, on note $F \perp G$.

Remarque 3.2.4. Si $F \perp G$ alors $F \cap G = \{0\}$ et on notera parfois $F \oplus^\perp G$.

Définition 3.2.5. Soit F un sous-espace de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, l'*orthogonal* de F est :

$$F^\perp := \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

C'est le plus grand sous-espace de E orthogonal à F , et il vérifie $F \oplus^\perp F^\perp = E$.

Définition 3.2.6. Soit $\varphi : E \rightarrow F$ une application linéaire entre espaces euclidiens, l'adjoint de φ est l'unique application linéaire $\varphi^* : F \rightarrow E$ telle que :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad \langle \varphi(x), y \rangle_F = \langle x, \varphi^*(y) \rangle_E.$$

On rappelle que $\text{Im}(\varphi^*) = \ker(\varphi)^\perp$ et $\ker(\varphi^*) = \text{Im}(\varphi)^\perp$. De plus, si M est la matrice de φ dans des bases orthonormées de E et F , alors la matrice de φ^* dans ces mêmes bases est M^t .

3.2.2 Isométries vectorielles

Définition 3.2.7. Soit $\varphi : E \rightarrow F$ une application linéaire entre espaces vectoriels euclidiens, on dit que φ est une *isométrie vectorielle* si elle préserve le produit scalaire, i.e. si :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle_F = \langle x, y \rangle_E.$$

Remarques 3.2.8. • Par (3.1), une application linéaire φ est une isométrie vectorielle si et seulement si $\forall x \in E, \|\varphi(x)\|_F = \|x\|_E$.

- On ne demande pas qu'une isométrie vectorielle soit bijective. En revanche si φ est une isométrie vectorielle alors elle est injective.

Proposition 3.2.9. Soit $\varphi : E \rightarrow F$ linéaire entre espaces euclidiens, φ est une isométrie vectorielle si et seulement si $\varphi^*\varphi = \text{Id}_E$. Dans ce cas, $\varphi\varphi^*$ est la projection orthogonale sur $\text{Im}(\varphi)$.

Démonstration. Si $\varphi^*\varphi = \text{Id}_E$ alors pour tout $x, y \in E$, on a

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle \varphi^*\varphi(x), y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Inversement si φ est une isométrie vectorielle alors pour tout $x, y \in E, \langle \varphi^*\varphi(x), y \rangle = \langle x, y \rangle$, donc $\varphi^*\varphi = \text{Id}_E$.

On a $\ker(\varphi^*) = \text{Im}(\varphi)^\perp$, donc $\ker(\varphi\varphi^*) \supset \text{Im}(\varphi)^\perp$. Soient $x \in \text{Im}(\varphi)$ et $z \in E$ tels que $\varphi(z) = x$. Si $\varphi^*\varphi = \text{Id}_E$, on a :

$$\varphi\varphi^*(x) = (\varphi\varphi^*)\varphi(z) = \varphi(\varphi^*\varphi)(z) = \varphi(z) = x.$$

Donc $\varphi\varphi^*$ restreinte à $\text{Im}(\varphi)$ est l'identité de $\text{Im}(\varphi)$. □

Corollaire 3.2.10. Soit $\varphi : E \rightarrow F$ une isométrie vectorielle entre espaces euclidiens de même dimension, alors φ est inversible et $\varphi^{-1} = \varphi^*$.

Proposition 3.2.11. Soient $\varphi : E \rightarrow F$ et $\psi : F \rightarrow G$ deux isométries vectorielles, alors $\psi \circ \varphi$ est une isométrie vectorielle. Si de plus φ est inversible alors φ^{-1} est une isométrie vectorielle.

Démonstration. Soient $x, y \in E$, on a $\langle \psi(\varphi(x)), \psi(\varphi(y)) \rangle = \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. Si φ est inversible, soient $x, y \in F$, alors on a $\langle \varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y) \rangle = \langle \varphi\varphi^{-1}(x), \varphi\varphi^{-1}(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ car φ est une isométrie. □

3.2.3 Le groupe orthogonal

Définition 3.2.12. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien, l'ensemble des isométries vectorielles de E dans lui-même est un sous-groupe de $GL(E)$, appelé *groupe orthogonal*. On le note :

$$O(E) := \{\varphi \in GL(E) \mid \varphi^*\varphi = \text{Id}_E\}.$$

Exemple 3.2.13. Soit F un sous-espace de E , on a $E = F \oplus^\perp F^\perp$ et on peut définir $s_F : E \rightarrow E$ linéaire par $(s_F)_{/F} := \text{Id}_F$ et $(s_F)_{/F^\perp} := -\text{Id}_{F^\perp}$. Alors $s_F \in O(E)$ et $\det(s_F) = (-1)^{\dim(E) - \dim(F)}$.

Définition 3.2.14. Soit F un sous-espace de E , on dit que s_F est la *symétrie orthogonale* par rapport à F . Si F est un hyperplan on dit que s_F est une *réflexion*, si $\text{codim } F = 2$ on dit que s_F est un *retournement*.

Si $\varphi \in O(E)$ et M est sa matrice dans une base orthonormée de E , alors la matrice de φ^* est $M^t = M^{-1}$. Le choix d'une base orthonormée de E définit ainsi un isomorphisme entre $O(E)$ et

$$O_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid (M^t)M = I_n\},$$

où $n = \dim(E)$ et I_n est la matrice identité de taille n . Cela permet aussi de montrer que $\det(\varphi^*) = \det(M^t) = \det(M) = \det(\varphi)$ et donc $\det(\varphi)^2 = 1$. Le déterminant se restreint donc en un morphisme de groupe surjectif $\det : O(E) \rightarrow \{-1, 1\}$.

Définition 3.2.15. Le noyau de \det restreint à $O(E)$ est appelé *groupe spécial orthogonal*. On le note :

$$SO(E) := \{\varphi \in O(E) \mid \det(\varphi) = 1\}.$$

Les éléments de $SO(E)$ sont appelés isométries *directes*, ceux de $O(E) \setminus SO(E)$ sont appelés isométries *indirectes*.

Remarque 3.2.16. Le groupe $SO(E)$ est le groupe des isométries de E qui préservent les orientations. Notons que cela a du sens même si E n'est pas orienté.

Proposition 3.2.17. Soit $\varphi \in O(E)$, alors les valeurs propres réelles de φ appartiennent à $\{-1, 1\}$.

Démonstration. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de φ et $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé, alors $\lambda^2 \|x\|^2 = \|\lambda x\|^2 = \|\varphi(x)\|^2 = \|x\|^2 \neq 0$. Donc $\lambda^2 = 1$. \square

Proposition 3.2.18. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien, alors le centre de $O(E)$ est $\{\text{Id}, -\text{Id}\}$. Supposons de plus que $\dim(E) \geq 3$. Si $\dim(E)$ est impaire alors le centre de $SO(E)$ est $\{\text{Id}\}$, si $\dim(E)$ est paire alors le centre de $SO(E)$ est $\{\text{Id}, -\text{Id}\}$.

Démonstration. Rappelons que si f et $g \in GL(E)$ commutent alors f stabilise les espaces propres de g . Soit φ dans le centre de $O(E)$, alors φ commute avec toutes les réflexions donc il stabilise toutes les droites de E . Ainsi φ est une homothétie et, par la proposition 3.2.17, $\varphi = \pm \text{Id}$. Réciproquement, $\{-\text{Id}, \text{Id}\}$ est bien inclus dans le centre de $O(E)$.

Soit maintenant φ dans le centre de $SO(E)$. Alors φ commute avec tous les retournements, donc stabilise tous les plans de E . Comme $\dim(E) \geq 3$, cela implique que φ stabilise toutes les droites de E et donc est une homothétie. Comme précédemment $\varphi = \pm \text{Id}$, mais $-\text{Id} \in SO(E)$ si et seulement si $\dim(E)$ est paire. Cela établit une inclusion, l'inclusion réciproque est claire. \square

Remarque 3.2.19. Si $\dim(E) = 1$ alors $SO(E) = \{\text{Id}\}$. Si $\dim(E) = 2$ on verra que $SO(E)$ est commutatif.

Proposition 3.2.20. Soit $\varphi \in O(E)$, alors $E = \ker(\varphi - \text{Id}) \oplus^\perp \text{Im}(\varphi - \text{Id})$.

Démonstration. Par le théorème du rang, il suffit de prouver que $\ker(\varphi - \text{Id}) \perp \text{Im}(\varphi - \text{Id})$. Soient $x \in \ker(\varphi - \text{Id})$ et $y \in E$, alors

$$\langle x, \varphi(y) - y \rangle = \langle x, \varphi(y) \rangle - \langle x, y \rangle = \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle - \langle x, y \rangle = 0,$$

car φ est une isométrie. D'où le résultat. \square

Proposition 3.2.21. *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien, alors $O(E)$ est engendré par les réflexions. Plus précisément, soit $\varphi \in O(E)$ alors φ s'écrit comme un produit de r réflexions, où $r := \text{rg}(\varphi - \text{Id})$, et ce nombre est minimal.*

Démonstration. On va montrer par récurrence forte sur le rang r de $\varphi - \text{Id}$ que φ s'écrit comme produit de r réflexions. Si $\text{rg}(\varphi - \text{Id}) = 0$ alors $\varphi = \text{Id}$ et c'est bon.

Si $\text{rg}(\varphi - \text{Id}) = r > 0$, alors il existe $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) \neq x_0$. Soit s la réflexion par rapport à $(\varphi(x_0) - x_0)^\perp$. On va montrer que $\text{rg}(s \circ \varphi - \text{Id}) \leq r - 1$. Par hypothèse de récurrence on aura que $s \circ \varphi$ s'écrit comme produit de $(r - 1)$ réflexions et, comme s est une involution, cela prouvera que φ s'écrit comme produit de r réflexions.

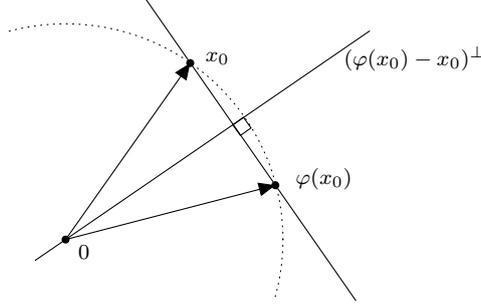


Figure 3.1 – Construction de la réflexion s .

D'après la proposition 3.2.20, on a :

$$\ker(\varphi - \text{Id}) = \text{Im}(\varphi - \text{Id})^\perp \subset (\varphi(x_0) - x_0)^\perp = \ker(s - \text{Id}).$$

Donc, pour tout $x \in \ker(\varphi - \text{Id})$, on a $s(\varphi(x)) = s(x) = x$. D'où $\ker(\varphi - \text{Id}) \subset \ker(s \circ \varphi - \text{Id})$. Par ailleurs, $\langle \varphi(x_0) + x_0, \varphi(x_0) - x_0 \rangle = \|\varphi(x_0)\|^2 - \|x_0\|^2 = 0$ car φ est une isométrie. On a alors $\varphi(x_0) + x_0 \in \ker(s - \text{Id})$, puis

$$s(\varphi(x_0)) = s\left(\frac{\varphi(x_0) + x_0}{2} + \frac{\varphi(x_0) - x_0}{2}\right) = \frac{\varphi(x_0) + x_0}{2} - \frac{\varphi(x_0) - x_0}{2} = x_0.$$

Donc $x_0 \in \ker(s \circ \varphi - \text{Id}) \setminus \ker(\varphi - \text{Id})$, d'où $\dim(\ker(s \circ \varphi - \text{Id})) > \dim(\ker(\varphi - \text{Id}))$ et $\text{rg}(s \circ \varphi - \text{Id}) < \text{rg}(\varphi - \text{Id}) = r$.

Pour conclure, soient s_1, \dots, s_k des réflexions, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $\ker(s_i - \text{Id})$ est un hyperplan de E . Dans ce cas, $\psi := s_k \circ \dots \circ s_1$ coïncide avec l'identité sur l'intersection des $\ker(s_i - \text{Id})$. Par récurrence, cette intersection est de codimension au plus k , donc $\text{rg}(\psi - \text{Id}) \leq k$. En particulier, φ ne peut pas s'écrire comme produit de strictement moins de r réflexions. \square

Corollaire 3.2.22. *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien tel que $\dim(E) \geq 3$, alors $SO(E)$ est engendré par les retournements.*

Démonstration. Soit $\varphi \in SO(E)$, d'après la proposition 3.2.21, φ est produit de réflexions. Comme $\det(\varphi) = 1$, φ est produit d'un nombre pair de réflexions, et il suffit donc de montrer qu'en dimension supérieure à 3 tout produit de deux réflexions est produit de retournements.

Soit s et s' deux réflexions de E . Notons $D := \ker(s + \text{Id})$ et $D' := \ker(s' + \text{Id})$ qui sont de dimension 1. Soit Δ une droite de E contenue dans $\text{Vect}(D \cup D')^\perp$ et σ la réflexion par rapport à Δ^\perp . Alors on a $s' \circ s = s' \circ \sigma \circ \sigma \circ s$ et il s'agit de montrer que $s' \circ \sigma$ et $\sigma \circ s$ sont des retournements.

On peut décomposer E en $D \oplus^\perp \Delta \oplus^\perp F$, où $F := \text{Vect}(D \cup \Delta)^\perp = D^\perp \cap \Delta^\perp$. Si $x \in D$, alors $\sigma(s(x)) = \sigma(-x) = -x$. Si $x \in \Delta$, alors $\sigma(s(x)) = \sigma(x) = -x$. Enfin, si $x \in F$ alors $\sigma(s(x)) = \sigma(x) = x$. Donc $\sigma \circ s$ est un retournement. De même pour $s' \circ \sigma$. \square

3.2.4 Réduction des endomorphismes orthogonaux

Commençons par nous intéresser à $O_2(\mathbb{R})$. Soit $M := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ alors :

$$M \in O_2(\mathbb{R}) \iff (M^t)M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0. \end{cases}$$

D'après la section 3.1, si $M \in O_2(\mathbb{R})$ il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, $(c, d) = (\cos(\beta), \sin(\beta))$ et $\cos(\alpha - \beta) = ac + bd = 0$. On a donc $\alpha \equiv \beta + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Il existe alors $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\varepsilon \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \varepsilon \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ et $\varepsilon = \det(M)$. Finalement, si $M \in SO_2(\mathbb{R})$ (resp. $M \in O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$) il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π , tel que : $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ (resp. $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$). Inversement toute matrice de cette forme appartient bien à $SO_2(\mathbb{R})$ (resp. $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$).

On peut désormais décrire la structure de groupe de $SO_2(\mathbb{R})$.

Proposition 3.2.23. *L'application $r : \theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est un morphisme de groupe continu surjectif de \mathbb{R} dans $SO_2(\mathbb{R})$ de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.*

Démonstration. On vient de voir que r est surjective. Elle est bien continue. La propriété de morphisme s'obtient par un calcul direct. Enfin, $\theta \in \mathbb{R}$ est dans le noyau de r si et seulement si $\cos(\theta) = 1$ et $\sin(\theta) = 0$, i.e. $e^{i\theta} = 1$. Le noyau est donc bien $2\pi\mathbb{Z}$, par définition de π (def. 3.1.5). \square

Définition 3.2.24. Les matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ sont appelées *matrices de rotation*. La matrice $r(\theta)$ est appelée *rotation d'angle θ* .

Remarque 3.2.25. On parle de la rotation d'angle θ , mais on n'a pas encore défini ce qu'est l'angle θ en question.

Corollaire 3.2.26. *Les groupes topologiques $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $SO_2(\mathbb{R})$ sont isomorphes. En particulier, $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.*

Démonstration. Le morphisme r induit un isomorphisme de groupe continu de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur $SO_2(\mathbb{R})$, d'après 3.2.23. Comme $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est compact et $SO_2(\mathbb{R})$ est séparé, c'est un homéomorphisme. \square

Remarque 3.2.27. L'application $\bar{r} : \theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ induit un autre isomorphisme naturel de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ vers $SO_2(\mathbb{R})$. On considère cependant l'isomorphisme induit par r comme canonique. La raison est la suivante : considérons la matrice de rotation envoyant le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^2 sur le second, l'antécédent de norme minimal de cette matrice par r est $\frac{\pi}{2} > 0$ alors que son antécédent de norme minimale par \bar{r} est $-\frac{\pi}{2}$.

Soit maintenant $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension 2. Le choix d'une base orthonormée de E définit un isomorphisme entre $O(E)$ et $O_2(\mathbb{R})$ qui envoie $SO(E)$ sur $SO_2(\mathbb{R})$. En particulier, $SO(E)$ est commutatif.

Définition 3.2.28. En dimension 2, les éléments de $SO(E)$ sont appelés *rotations* de E .

Décrivons les éléments de $O(E)$. Soit $\varphi \in O(E) \setminus SO(E)$, d'après la proposition 3.2.21, φ est produit d'au plus deux réflexions. Comme $\det(\varphi) = -1$, φ est une réflexion. En particulier, sa matrice dans une bonne base orthonormée de E est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Définition 3.2.31. Soit $\varphi \in GL(E)$, on dit que φ est une *similitude* de E s'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|\varphi(x)\| = \lambda\|x\|$. Le coefficient λ est appelé le *rapport* de la similitude. On dit que φ est une similitude *directe* si son déterminant est positif, et *indirecte* sinon.

Exemple 3.2.32. La composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport λ est une similitude de rapport $|\lambda|$.

L'ensemble des similitudes de E forme un sous-groupe de $GL(E)$, de même que l'ensemble des similitudes directes. L'application qui à une similitude associe son rapport est un morphisme de groupes à valeurs dans (\mathbb{R}_+^*, \cdot) .

Proposition 3.2.33. Soit φ une similitude de E de rapport λ , alors il existe un unique $O \in O(E)$ tel que $\varphi = \lambda O$. De plus, φ est directe si et seulement si O l'est.

Démonstration. Si $O \in O(E)$ existe alors $O = \frac{1}{\lambda}\varphi$ d'où l'unicité. Ensuite $\frac{1}{\lambda}\varphi$, est bien une isométrie d'où l'existence. Enfin, $\det(\varphi) = \lambda^{\dim(E)} \det(O)$ et $\lambda > 0$, donc φ est directe si et seulement si O l'est. \square

Proposition 3.2.34. Soit $\varphi \in GL(E)$, les conditions suivantes sont équivalentes.

1. φ est une similitude.
2. Il existe $\mu > 0$ tel que pour tout $x, y \in E$, $\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \mu \langle x, y \rangle$.
3. Pour tout $x, y \in E$, si $\langle x, y \rangle = 0$ alors $\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = 0$.

Démonstration. Supposons que φ soit une similitude de rapport λ , alors par l'identité de polarisation (3.1) on a, pour tout $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle &= \frac{1}{2} \left(\|\varphi(x+y)\|^2 - \|\varphi(x)\|^2 - \|\varphi(y)\|^2 \right) \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right) \\ &= \lambda^2 \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Ce qui montre que 1 implique 2. Il est clair que 2 implique 3. Maintenant, si on suppose que φ préserve l'orthogonalité, soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E , alors la famille $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est une base orthogonale de E . Par ailleurs, pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\langle e_i + e_j, e_i - e_j \rangle = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 0$, donc

$$\|\varphi(e_i)\|^2 - \|\varphi(e_j)\|^2 = \langle \varphi(e_i) + \varphi(e_j), \varphi(e_i) - \varphi(e_j) \rangle = \langle \varphi(e_i + e_j), \varphi(e_i - e_j) \rangle = 0.$$

Donc les $\varphi(e_i)$ sont de même norme $\lambda > 0$ et donc φ est une similitude de rapport λ . \square

3.2.6 Exercices

Exercice 3.3 (Caractérisation des isométries vectorielles, [4] T. 2 sect. 8.1). Soit une application ensembliste $\varphi : E \rightarrow F$ entre espaces vectoriels euclidiens de même dimension, montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

- $\forall x, y \in E, \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle_F = \langle x, y \rangle_E$.
- φ est linéaire et $\forall x \in E, \|\varphi(x)\|_F = \|x\|_E$.

Exercice 3.4 (Symétries). Soit $\varphi \in GL(E)$, montrer que φ est une symétrie orthogonale si et seulement si $E = \ker(\varphi - \text{Id}) \oplus^\perp \ker(\varphi + \text{Id})$.

Exercice 3.5 (Générateurs du groupe orthogonal, [4] T. 2 sect. 8.4). Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, soient $\varphi \in O(E)$ et $r := \text{rg}(\varphi - \text{Id})$.

1. Montrer que φ est produit de r réflexions et que ce nombre est minimal.
2. Si $\dim(E) \geq 3$ et $\varphi \in SO(E)$, montrer que φ est produit d'au plus r retournements. Ce nombre est-il minimal? Qu'en est-il en dimension 2?

Exercice 3.6 (Décomposition en réflexions). Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un plan euclidien, montrer que tout élément de $SO(E)$ est produit de deux réflexions, dont l'une peut être choisie arbitrairement.

Exercice 3.7. Déterminer un invariant total pour l'action naturelle $O(E) \curvearrowright E$. Quelles sont les orbites de cette action? Mêmes questions pour l'action naturelle de $O(E)$ sur $E \times E$. Que se passe-t-il si on remplace $O(E)$ par $SO(E)$?

Exercice 3.8. Montrer que $O(E)$ agit simplement transitivement sur l'ensemble des bases orthonormées de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Combien y a-t-il d'orbites pour l'action de $SO(E)$ sur ces bases?

Exercice 3.9 (Conjugaison). 1. Dans $O_2(\mathbb{R})$, soit r la rotation d'angle α , s et s' deux réflexions par rapport aux droites D et D' . Déterminer le type et les éléments caractéristiques de srs^{-1} , $ss's^{-1}$, rsr^{-1} .

2. Soient r et r' deux rotations de $SO_3(\mathbb{R})$, déterminer les éléments caractéristiques de $rr'r^{-1}$ en fonction de ceux de r et r' .

3. À quelle condition deux rotations de $SO_3(\mathbb{R})$ commutent-elles?

Exercice 3.10 (Encore des produits semi-directs). Montrer que $O_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^1 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Plus généralement, montrer que $O(E) \simeq SO(E) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 3.11 (Connexité de $SO(E)$). Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Montrer que $SO(E)$ est connexe. Montre que $O(E)$ a exactement deux composantes connexes.

Exercice 3.12 (Commutation des similitudes vectorielles). Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un plan euclidien, montrer que les similitudes directes commutent. Qu'en est-il des similitudes indirectes? Que se passe-t-il en dimension supérieure?

3.3 Angles

L'objectif de cette section est de définir les différentes notions d'angles ainsi que les mesures de ces angles. On va définir quatre notions d'angles, qui sont toutes des raffinements de la notion d'angle orienté de demi-droites. Le cadre de cette section est un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de dimension finie supérieure ou égale à 2. Concernant les angles, on pourra consulter [2, sect. III.1], [4, T. 2, sect. 8.6 et 8.7] ou [10, sect. C.1.1].

3.3.1 Notions d'angles

Définition 3.3.1. On appelle *demi-droite* de E tout ensemble de la forme $\{tu \mid t \in \mathbb{R}_+\}$, avec $u \in E \setminus \{0\}$.

Remarque 3.3.2. Dans la discussion ci-dessous, on pourrait remplacer les demi-droites par des vecteurs unitaires. Cela ne changerait rien.

Les groupes $O(E)$ et $SO(E)$ agissent transitivement sur les droites de E , ainsi que sur les demi-droites de E (alternativement sur la sphère unité $\mathbb{S}(E)$). Ces actions ne sont pas 2-transitives. Une obstruction à la 2-transitivité est l'orthogonalité ou non des deux (demi-)droites du couple.

Définition 3.3.3. On appelle *angles*, les orbites pour les actions de $O(E)$ et $SO(E)$ sur les couples de droites et de demi-droites. On définit ainsi quatre notions d'angles.

		sur les couples de	
		demi-droites vectorielles	droites vectorielles
action du groupe	$SO(E)$	angles orientés de demi-droites	angles orientés de droites
	$O(E)$	angles non orientés de demi-droites	angles non-orientés de droites

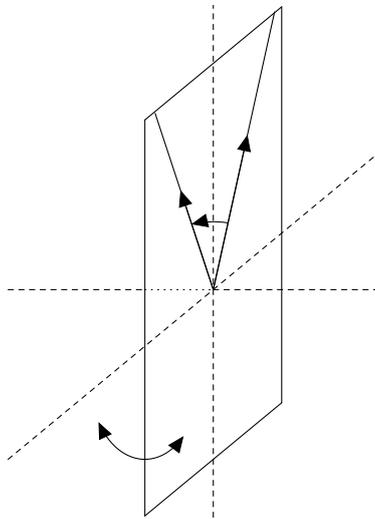
On utilise parfois la terminologie *angles géométriques* pour désigner les angles non orientés.

Les angles sont tautologiquement des invariants totaux pour les actions qui les définissent. Cela n'a d'intérêt que si on peut ramener ces angles à des nombres (ou d'autres quantités simples), ce que nous ferons dans la section 3.3.3. La proposition suivante est également tautologique.

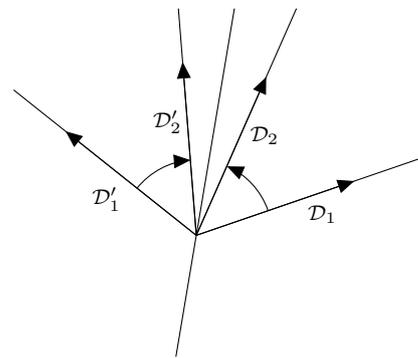
Proposition 3.3.4. *Les isométries vectorielles préservent les angles non-orientés. Les isométries vectorielles directes préservent les angles orientés.*

Remarques 3.3.5. • On peut parler d'angles orientés même si l'espace ambiant E n'est pas orienté.

- En dimension supérieure ou égale à 3, les notions d'angles et d'angles orientés coïncident. En effet, pour tout couple de (demi-)droites, il existe une réflexion qui fixe ces (demi-)droites. Dans la suite, on ne parlera d'angles orientés qu'en dimension 2.
- En dimension 2, les réflexions renversent les angles orientés, au sens où l'image par une réflexion d'un couple $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ de (demi-)droites est dans l'orbite de $(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1)$ sous l'action de $SO(E)$.



(a) Réflexion stabilisant un couple de demi-droites, en dimension 3.



(b) Action d'une réflexion sur un angle orienté de demi-droites dans le plan euclidien.

Figure 3.2 – Action des réflexions sur les angles orientés.

3.3.2 Structure de groupe sur les angles orientés en dimension 2

Dans cette section, E est un espace euclidien de dimension 2. Dans ce cas, l'ensemble \mathcal{A} des angles orientés de demi-droites de E est canoniquement en bijection avec $SO(E)$. Cela permet de faire de \mathcal{A} un groupe commutatif, par transfert de structure.

Notation 3.3.6. Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux demi-droites de E , on note $\widehat{(\mathcal{D}, \mathcal{D}')}$ l'angle orienté de demi-droites qu'elles définissent. Si $u, v \in E \setminus \{0\}$ on notera $\widehat{(u, v)}$ l'angle orienté défini par les demi-droites engendrées par u et v respectivement.

En dimension 2, l'action de $SO(E)$ sur les demi-droites de E (i.e. sur la sphère) est simplement transitive. On note $\phi : \{\text{couples de demi-droites de } E\} \rightarrow SO(E)$ l'application qui à un couple $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ associe l'unique $r \in SO(E)$ telle que $r(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_2$. C'est une surjection.

Proposition 3.3.7. Soient $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2)$ deux couples de demi-droites, alors on a $\phi(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \phi(\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2)$ si et seulement si $\widehat{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)} = \widehat{(\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2)}$.

Démonstration. Soient $r := \phi(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ et φ l'unique élément de $SO(E)$ tel que $\varphi(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}'_1$. Comme $SO(E)$ est commutatif, on a : $\varphi(\mathcal{D}_2) = \varphi(r(\mathcal{D}_1)) = r(\varphi(\mathcal{D}_1)) = r(\mathcal{D}'_1)$.

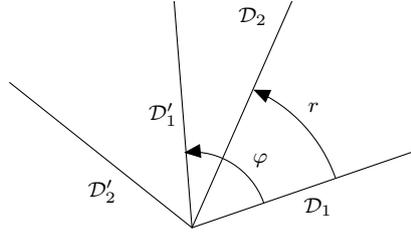


Figure 3.3 – Actions de r et φ sur \mathcal{D}_1 .

D'un côté, $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2)$ définissent le même angle orienté si et seulement si $\varphi(\mathcal{D}_2) = \mathcal{D}'_2$. De l'autre, $\phi(\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2) = \phi(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = r$ si et seulement si $r(\mathcal{D}'_1) = \mathcal{D}'_2$. D'où l'équivalence. \square

Ainsi, ϕ induit une application $\bar{\phi} : \mathcal{A} \rightarrow SO(E)$, définie par $\bar{\phi}(\widehat{(\mathcal{D}, \mathcal{D}')}) := \phi(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$. Comme ϕ est surjective, $\bar{\phi}$ l'est également. De plus, $\bar{\phi}$ est injective d'après la prop. 3.3.7. Donc $\bar{\phi}$ est une bijection, et on munit \mathcal{A} de l'unique structure de groupe qui en fait un isomorphisme. En particulier, cela fait de \mathcal{A} un groupe commutatif et on notera sa loi additivement.

Remarques 3.3.8. • La bijection $\bar{\phi}$ est canonique.

- On a utilisé de façon cruciale deux faits qui ne sont vrais qu'en dimension 2 : la simple transitivité de l'action $SO(E) \curvearrowright \mathbb{S}(E)$, et la commutativité de $SO(E)$. On ne peut donc pas adapter cette construction en dimension supérieure.

Définitions 3.3.9. On appelle *angle nul* le neutre de $(\mathcal{A}, +)$, c'est-à-dire l'unique $a \in \mathcal{A}$ tel que $\bar{\phi}(a) = \text{Id}_E$. On appelle *angle plat* l'unique élément d'ordre 2 de \mathcal{A} , c'est-à-dire l'unique $a \in \mathcal{A}$ tel que $\bar{\phi}(a) = -\text{Id}_E$. Enfin, on appelle *angles droits* les deux éléments d'ordre 4 de \mathcal{A} .

Proposition 3.3.10 (Relations de Chasles pour les angles). Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et \mathcal{D}_3 trois demi-droites de E , on a :

$$\widehat{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)} + \widehat{(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)} = \widehat{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_3)}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \left(\bar{\phi}(\widehat{(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)}) \circ \bar{\phi}(\widehat{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)}) \right) (\mathcal{D}_1) &= (\phi(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3) \circ \phi(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)) (\mathcal{D}_1) \\ &= \phi(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)(\mathcal{D}_2) \\ &= \mathcal{D}_3. \end{aligned}$$

Donc

$$\overline{\phi}\left(\widehat{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_3)}\right) = \phi(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_3) = \overline{\phi}\left(\widehat{(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)}\right) \circ \overline{\phi}\left(\widehat{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)}\right).$$

Par définition, $\overline{\phi}$ est un isomorphisme de $(\mathcal{A}, +)$ vers $(SO(E), \circ)$. D'où le résultat. \square

De la même façon, $SO(E)$ agit transitivement sur les droites vectorielles de E . Cette action est transitive, et le stabilisateur d'une droite est $\{\pm \text{Id}_E\}$. Par le même genre de construction que ci-dessus, on peut définir une bijection canonique entre les angles orientés de droites de E et $SO(E)/\{\pm \text{Id}_E\}$, ce qui permet de munir les angles orientés de droites d'une structure de groupe commutatif, par transfert de structure.

Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites de E . On a quatre choix possibles d'un couple de demi-droites portées par \mathcal{D} et \mathcal{D}' respectivement. Notons ces choix $(\mathcal{D}_+, \mathcal{D}'_+)$, $(\mathcal{D}_+, \mathcal{D}'_-)$, $(\mathcal{D}_-, \mathcal{D}'_+)$ et $(\mathcal{D}_-, \mathcal{D}'_-)$. On a alors :

$$\widehat{(\mathcal{D}_+, \mathcal{D}'_+)} = \widehat{(\mathcal{D}_+, \mathcal{D}'_-)} + \text{plat} = \widehat{(\mathcal{D}_-, \mathcal{D}'_+)} + \text{plat} = \widehat{(\mathcal{D}_-, \mathcal{D}'_-)}.$$

Les quatre angles orientés de demi-droites que l'on peut définir à partir de \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont donc congrus modulo $\{\text{nul}, \text{plat}\}$. Ceci permet de définir une bijection entre les angles orientés de droites et $\mathcal{A}/\{\text{nul}, \text{plat}\}$. Cette bijection est en fait un isomorphisme.

Remarque 3.3.11. Alternativement, on peut définir la loi de groupe sur les angles orientés de droites en demandant que cette bijection soit un isomorphisme.

3.3.3 Mesure d'un angle

On va maintenant définir la mesure d'un angle, c'est-à-dire associer un nombre à chaque angle. En d'autres termes, on va définir un invariant total classifiant les orbites que sont les angles. Pour définir la mesure d'un angle orienté, il est nécessaire d'orienter le plan.

On considère désormais un plan euclidien orienté E . Alors, soit $\varphi \in SO(E)$, la matrice de φ est la même dans toute base orthonormée directe de E . En effet, un changement de base orthonormée directe revient à conjuguer la matrice de φ par une matrice de $SO_2(\mathbb{R})$, et $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif. Dans ce cas, on a donc un isomorphisme canonique entre $SO(E)$ et $SO_2(\mathbb{R})$. On a alors une suite d'isomorphismes canoniques :

$$\mathcal{A} \simeq SO(E) \simeq SO_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \quad (3.2)$$

où le premier isomorphisme est le $\overline{\phi}$ défini à la section 3.3.2, le deuxième associe à un élément de $SO(E)$ sa matrice dans une base orthonormée directe quelconque et le troisième est induit par $r : \theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ de \mathbb{R} dans $SO_2(\mathbb{R})$.

Définition 3.3.12. On appelle *la mesure* de l'angle orienté de demi-droites $\widehat{(\mathcal{D}, \mathcal{D}')}$ l'unique $\overline{\theta} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ image de $\widehat{(\mathcal{D}, \mathcal{D}')}$ par la composition d'isomorphismes (3.2). Si $\theta \in \mathbb{R}$ est un relèvement de $\overline{\theta}$, on dit que θ est *une mesure* de $\widehat{(\mathcal{D}, \mathcal{D}')}$.

En démontant les isomorphismes (3.2), une mesure de $\widehat{(\mathcal{D}, \mathcal{D}')}$ est un $\theta \in \mathbb{R}$ tel que l'unique application de $SO(E)$ envoyant \mathcal{D} sur \mathcal{D}' ait pour matrice $r(\theta)$ dans toute base orthonormée directe.

Exemple 3.3.13. Une mesure de l'angle plat est π , les angles droits ont des mesures congrues à $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ modulo 2π , selon qu'ils sont directs ou indirects.

De même, on peut définir *la mesure* de l'angle orienté défini par les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' comme l'unique $\bar{\theta} \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ image de cet angle par la suite d'isomorphismes canoniques :

$$\{\text{angles orientés de droites}\} \simeq SO(E)/\{\pm \text{Id}_E\} \simeq SO_2(\mathbb{R})/\{\pm \text{Id}\} \simeq \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z},$$

où tous les isomorphismes sont obtenus par passage au quotient à partir de (3.2).

Exemple 3.3.14. Deux droites orthogonales définissent un angle orienté de mesure $\frac{\pi}{2}$ modulo π .

Pour conclure, évoquons la mesure des angles non orientés. Si \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont deux demi-droites de E , alors $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ et $(\mathcal{D}', \mathcal{D})$ définissent le même angle non orienté. Si θ est une mesure de $(\widehat{\mathcal{D}, \mathcal{D}'})$, alors $-\theta$ est une mesure de $(\widehat{\mathcal{D}', \mathcal{D}})$. On peut donc associer une mesure dans $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})/\{x = -x\}$ à un angle non-orienté de demi-droites.

Plus simplement, toutes les mesures de $(\widehat{\mathcal{D}, \mathcal{D}'})$ et $(\widehat{\mathcal{D}', \mathcal{D}})$ ont même cosinus. Si u et v sont des vecteurs directeurs de \mathcal{D} et \mathcal{D}' respectivement, on peut définir les mesures de l'angle non-orienté défini par \mathcal{D} et \mathcal{D}' comme les $\theta \in \mathbb{R}$ vérifiant : $\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$. On parle de *la mesure* de cet angle pour désigner son unique mesure appartenant à $[0, \pi]$.

Si maintenant \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont deux droites, on peut associer à l'angle non orienté qu'elles définissent une mesure dans $(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})/\{x = -x\}$. En effet, les mesures des angles orientés définis par $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ et $(\mathcal{D}', \mathcal{D})$ sont opposées l'une de l'autre. Par ailleurs, les mesures de ces angles sont les $\theta \in \mathbb{R}$ satisfaisant $|\cos(\theta)| = \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \|v\|}$, où u et v sont des vecteurs directeurs de \mathcal{D} et \mathcal{D}' respectivement. On parle de *la mesure* de cet angle pour désigner son unique mesure appartenant à $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Remarques 3.3.15.

- Les définitions des mesures des angles non orientés que l'on vient de donner ont du sens en toute dimension et ne nécessitent pas d'avoir orienté l'espace.
- Les angles non orientés ne forment pas un groupe. En particulier, ils s'additionnent mal.

3.3.4 Exercices

Exercice 3.13. Soit E un espace vectoriel euclidien, déterminer un invariant total pour l'action de $O(E)$ sur les couples de vecteurs de E .

Exercice 3.14 (Angles et réflexions). Soient \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux demi-droites d'un plan vectoriel euclidien, montrer qu'on a les égalités $(\widehat{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2}) = -(\widehat{\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1})$ entre angles orientés et $(\widehat{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2}) = (\widehat{\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1})$ entre angles géométriques.

Exercice 3.15 (Angles de droites et de demi-droites, [2] p. 73). Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites d'un plan euclidien et $(\widehat{\mathcal{D}, \mathcal{D}'})$ l'angle de droites orienté qu'elles définissent. Vérifier que $2(\widehat{\mathcal{D}, \mathcal{D}'})$ définit bien un unique angle orienté de demi-droites. En déduire que les groupes des angles orientés de droites et de demi-droites sont isomorphes.

Exercice 3.16 (Angles et orientation, [2] p. 110). Dans un plan euclidien orienté E , soient $u, v \in E \setminus \{0\}$. Montrer que (u, v) est une base directe (resp. indirecte) de E si et seulement si $(\widehat{u, v})$ admet une mesure dans $]0, \pi[$ (resp. dans $] -\pi, 0[$). Que se passe-t-il si les mesures de $(\widehat{u, v})$ sont congrues à 0 (resp. π) modulo 2π ?

Exercice 3.17 (Bissectrices, [4] T. 2 sect. 8.7). Montrer que l'équation $2x = a$ d'inconnue x a exactement deux solutions dans le groupes des angles orientés de droites (resp. demi-droites). Utiliser ce fait pour définir les bissectrices d'un angle orienté de droites (resp. demi-droites).

3.4 Espaces affines euclidiens

Dans cette section, on définit et on étudie rapidement les espaces affines euclidiens. Dans ce cadre, en plus des notions affines, on peut naturellement parler de distances, d'angles, de perpendiculaires, de médiatrices, de bissectrices, de hauteurs ou encore de cercles. On s'intéresse entre autre à la classification des isométries en dimension 2 et 3 et au groupe des similitudes.

3.4.1 Espaces affines euclidiens et isométries affines

Définition 3.4.1. Un *espace affine euclidien* est un espace affine réel \mathcal{E} de dimension finie dont la direction est un espace vectoriel euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

On a immédiatement la proposition suivante.

Proposition 3.4.2. Si $(\mathcal{E}, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace affine euclidien, alors $d : (A, B) \mapsto \|\overrightarrow{AB}\|$ est une distance sur \mathcal{E} .

Remarque 3.4.3. Un sous-espace affine d'un espace affine euclidien est un espace affine euclidien, en restreignant le produit scalaire ambiant.

Définition 3.4.4. Deux sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} de $(\mathcal{E}, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sont dits *orthogonaux* si leurs directions le sont.

On retrouve le classique théorème de Pythagore.

Théorème 3.4.5 (Pythagore). Soient A, B, C trois points d'un espace affine euclidien, alors $(AB) \perp (AC)$ si et seulement si $d(A, B)^2 + d(A, C)^2 = d(B, C)^2$.

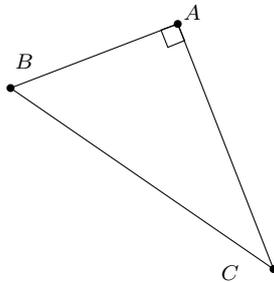


Figure 3.4 – Le théorème de Pythagore dans un plan euclidien.

Démonstration. En effet,

$$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \langle \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \rangle = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle.$$

On a donc $d(A, B)^2 + d(A, C)^2 = d(B, C)^2$ si et seulement si $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $(AB) \perp (AC)$. \square

Définition 3.4.6. Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une application entre espaces affines euclidiens. On dit que f est une *isométrie affine* si f préserve les distances, i.e. pour tout $A, B \in \mathcal{E}$, $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$.

Exemples 3.4.7. 1. Les translations sont des isométries affines.

2. Soit (\mathcal{F}, F) un sous-espace affine de E , la symétrie par rapport à \mathcal{F} parallèlement à F^\perp est une isométrie, appelée *symétrie orthogonale* par rapport à \mathcal{F} . Si \mathcal{F} est un hyperplan, on parle de *réflexion affine*. Si $\text{codim}(\mathcal{F}) = 2$, on parle de *retournement affine*.

Remarque 3.4.8. Attention, on ne demande pas dans la définition que f soit affine. On va voir que c'est le cas plus bas, cf. thm. 3.4.11.

Proposition 3.4.9. Soient $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ et $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ deux isométries affines, alors $g \circ f$ est une isométrie affine. Si de plus f est inversible, alors f^{-1} est une isométrie affine.

Démonstration. C'est immédiat. □

Proposition 3.4.10. Une isométrie affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est injective. De plus, si A, B et C sont alignés dans cet ordre alors $f(A), f(B)$ et $f(C)$ sont alignés dans cet ordre.

Démonstration. L'injectivité est immédiate vue la définition.

L'alignement est préservé car il peut se traduire en termes de distances. Soient A, B et $C \in \mathcal{E}$, ces points sont alignés dans cet ordre si et seulement si $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$. C'est le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire pour la distance venant d'une norme euclidienne, qui traduit le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

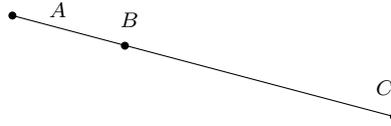


Figure 3.5 – Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.

Ainsi, si A, B et C sont alignés dans cet ordre, alors

$$d(f(A), f(C)) = d(A, C) = d(A, B) + d(B, C) = d(f(A), f(B)) + d(f(B), f(C)),$$

et donc $f(A), f(B)$ et $f(C)$ sont alignés dans cet ordre. □

Théorème 3.4.11. Une application $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est une isométrie affine si et seulement si f est affine et \vec{f} est une isométrie vectorielle.

Démonstration. Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ affine entre espaces euclidiens. Pour tout $A, B \in \mathcal{E}$, on a $\|\vec{f}(\overrightarrow{AB})\| = \|f(A)f(B)\| = d(f(A), f(B))$ et $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$. Donc f est une isométrie si et seulement si, pour tout $u \in E$, $\|\vec{f}(u)\| = \|u\|$. Il s'agit donc de montrer qu'une isométrie affine est nécessairement affine.

Comme le corps de base est \mathbb{R} , il suffit de montrer que pour tout A et $B \in \mathcal{E}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $f(\lambda A + (1 - \lambda)B) = \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B)$. Cela assure que f préserve les barycentres (cf. rem. 2.2.12).

Soient $A, B \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $G := \lambda A + (1 - \lambda)B$. On a $\overrightarrow{GB} = \lambda \overrightarrow{AB}$. Si $\lambda \in]0, 1[$, alors A, G et B sont alignés dans cet ordre et $d(G, B) = \lambda d(A, B)$. Donc $f(A), f(G)$ et $f(B)$ sont alignés dans cet ordre, d'après 3.4.10. De plus, $d(f(G), f(B)) = \lambda d(f(A), f(B))$ donc $\vec{f}(\overrightarrow{GB}) = \lambda \vec{f}(\overrightarrow{AB})$ et $f(G) = \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B)$. Les cas $\lambda < 0$ et $\lambda > 1$ se traitent de façon similaire. Si $\lambda \in \{0, 1\}$ alors $G \in \{A, B\}$ et le résultat est clair. □

Définition 3.4.12. Soit $(\mathcal{E}, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace affine euclidien, un *repère euclidien* de \mathcal{E} est un repère cartésien (O, e_1, \dots, e_n) tel que (e_1, \dots, e_n) soit une base orthonormée de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Proposition 3.4.13. Soient \mathcal{E} et \mathcal{F} deux espaces affines euclidiens de même dimension n . Soient (O, e_1, \dots, e_n) et (O', e'_1, \dots, e'_n) des repères euclidiens de \mathcal{E} et \mathcal{F} respectivement. Alors il existe une unique isométrie affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ telle que $f(O) = O'$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\vec{f}(e_i) = e'_i$.

Démonstration. Il existe une unique application affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ telle que $f(O) = O'$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\vec{f}(e_i) = e'_i$. En effet, (O, e_1, \dots, e_n) et (O', e'_1, \dots, e'_n) des repères cartésiens de \mathcal{E} et \mathcal{F} respectivement. D'après 3.4.10, il suffit donc de vérifier que \vec{f} est une isométrie vectorielle. C'est le cas puisque \vec{f} envoie une base orthonormée de E sur une base orthonormée de F . \square

En particulier, tout espace affine euclidien de dimension n est isométrique à \mathbb{R}^n muni du produit scalaire usuel. Évidemment, cette isométrie n'est pas canonique.

3.4.2 Le groupe des isométries

Définitions 3.4.14. Soit $(\mathcal{E}, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace affine euclidien.

- L'ensemble des isométries affines de \mathcal{E} dans lui-même est un sous-groupe de $\text{Aff}(\mathcal{E})$, noté $\text{Isom}(\mathcal{E})$.
- On définit un morphisme de groupe surjectif $\text{Isom}(\mathcal{E}) \rightarrow \{-1, 1\}$ par $f \mapsto \det(\vec{f})$. Son noyau est le sous-groupe $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$ des *isométries directes*.
- Une application $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$ est appelée un *déplacement* si $f \in \text{Isom}^+(\mathcal{E})$ et un *antidéplacement* sinon.

Proposition 3.4.15. Soit $(\mathcal{E}, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n . Le centre de $\text{Isom}(\mathcal{E})$ est trivial. Si $n \geq 2$ alors le centre de $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$ est trivial. Si $n = 1$, alors $\text{Isom}^+(\mathcal{E}) \simeq E$ est commutatif.

Démonstration. On procède comme dans la preuve de la prop. 2.6.9. Si f est dans le centre de $\text{Isom}(\mathcal{E})$ (ou de $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$), alors f commute à toutes les translations. On a donc $\vec{f}(O) + \vec{f}(u) = f(O + u) = f(O) + u$ pour tout $O \in \mathcal{E}$ et tout $u \in E$. En particulier, $\vec{f} = \text{Id}_E$ et f est une translation, disons de vecteur v .

Si $n \geq 2$, supposons $v \neq 0$. Il existe alors $g \in \text{Isom}^+(\mathcal{E})$ tel que $\vec{g}(v) \neq v$. Mais alors tout $O \in \mathcal{E}$, $g(O) + \vec{g}(v) = g(O + v) \neq g(O) + v$. Donc f et g ne commutent pas. Donc $v = 0$ et $f = \text{Id}_{\mathcal{E}}$.

Si $n = 1$, soit g une symétrie de \mathcal{E} . On a $\vec{g} = -\text{Id}_E$ et donc $g \circ t_v \circ g^{-1} = t_{-v}$. En particulier, g et f ne commutent que si $v = 0$. Donc le centre de $\text{Isom}(\mathcal{E}) = \{\text{Id}_{\mathcal{E}}\}$.

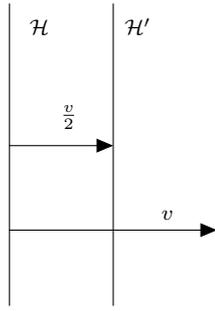
Toujours pour $n = 1$, $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$ est le groupe des translations, d'où le dernier point. \square

Proposition 3.4.16. Soit $(\mathcal{E}, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n . Le groupe $\text{Isom}(\mathcal{E})$ est engendré par les réflexions affines. Si $n \geq 3$ alors $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$ est engendré par les retournements affines

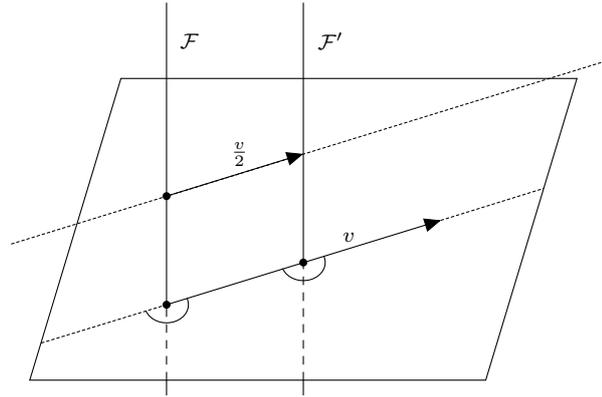
Démonstration. D'après la prop. 3.2.21 et le cor. 3.2.22, il suffit de montrer qu'on peut écrire une translation comme produit de réflexions (resp. de retournements) affines.

Soit $v \in E$, on note $H := \text{Vect}(v)^\perp$. Soit \mathcal{H} un hyperplan affine de direction H et $\mathcal{H}' := \mathcal{H} + \frac{v}{2}$. Alors $s_{\mathcal{H}'} \circ s_{\mathcal{H}}$ est la translation de vecteur v . En effet, sa partie linéaire est $(s_H)^2 = \text{Id}_E$ et si $M \in \mathcal{H}$ alors $s_{\mathcal{H}'} \circ s_{\mathcal{H}}(M) = s_{\mathcal{H}'}(M) = M + v$.

De même, si $n \geq 2$, soit P un plan vectoriel contenant v . Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de \mathcal{E} de direction P^\perp et $\mathcal{F}' := \mathcal{F} + \frac{v}{2}$. Alors $s_{\mathcal{F}'} \circ s_{\mathcal{F}}$ est la translation de vecteur v . \square



(a) Comme produit de deux réflexions affines en dimension 2.



(b) Comme produit de deux retournements affines en dimension 3.

Figure 3.6 – Décomposition d’une translation comme composée de symétries orthogonales.

3.4.3 Classification des isométries affines

Dans cette section, on classe les isométries en dimension 2 et 3, voir par exemple [10, sect. C.1.2].

Proposition 3.4.17. *Soient $(\mathcal{E}, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace affine euclidien et $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$. Alors il existe un unique couple $(v, g) \in E \times \text{Isom}(\mathcal{E})$ tel que :*

- g a un point fixe,
- $\vec{g}(v) = v$,
- $f = t_v \circ g$.

De plus, t_v et g commutent, $\text{Fix}(g)$ est dirigé par $\ker(\vec{f} - \text{Id}_E)$, et f a un point fixe si et seulement si $v = 0$.

Démonstration. Comme f est une isométrie, $\vec{f} \in O(E)$ et donc, d’après la prop. 3.2.20 on a $E = \ker(\vec{f} - \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(\vec{f} - \text{Id}_E)$. On peut donc appliquer la proposition 2.6.8 à f , ce qui donne l’existence d’un unique couple $(v, g) \in E \times \text{Aff}(\mathcal{E})$ satisfaisant les conditions de l’énoncé. Comme $\vec{g} = \vec{f}$, on a $g \in \text{Isom}(\mathcal{E})$, d’où le résultat. \square

Soient \mathcal{E} un plan affine euclidien et $f \in \text{Isom}^+(\mathcal{E})$ telle que $\vec{f} \neq \text{Id}_E$. Comme \vec{f} est une rotation, 1 n’est pas valeur propre de \vec{f} et f a donc un unique point fixe (voir prop. 2.6.6).

Définitions 3.4.18. On dit que f est une *rotation affine*, son unique point fixe est appelé le *centre* de la rotation. Si de plus \mathcal{E} est orienté, on appelle *angle* de la rotation l’unique $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ soit la matrice de \vec{f} dans toute base orthonormée directe.

Les tableaux 3.7 et 3.9 ci-dessous récapitulent les classifications des isométries en dimension 2 et 3, en fonction d’une forme normale de la partie linéaire et de l’existence ou non de points fixes. Ils donnent aussi la liste des éléments caractéristiques pour chacune des classes d’isométries.

		points fixes	
		oui	non
forme normale de \vec{f} dans une base orthonormée	Id_E	Id_E	translation (vecteur de translation)
	$-\text{Id}_E$	symétrie centrale (centre)	impossible
	$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$	rotation (centre et angle)	impossible
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	réflexion (axe de symétrie)	symétrie glissée (axe et vecteur parallèles)

Figure 3.7 – Classification des isométries affines en dimension 2.

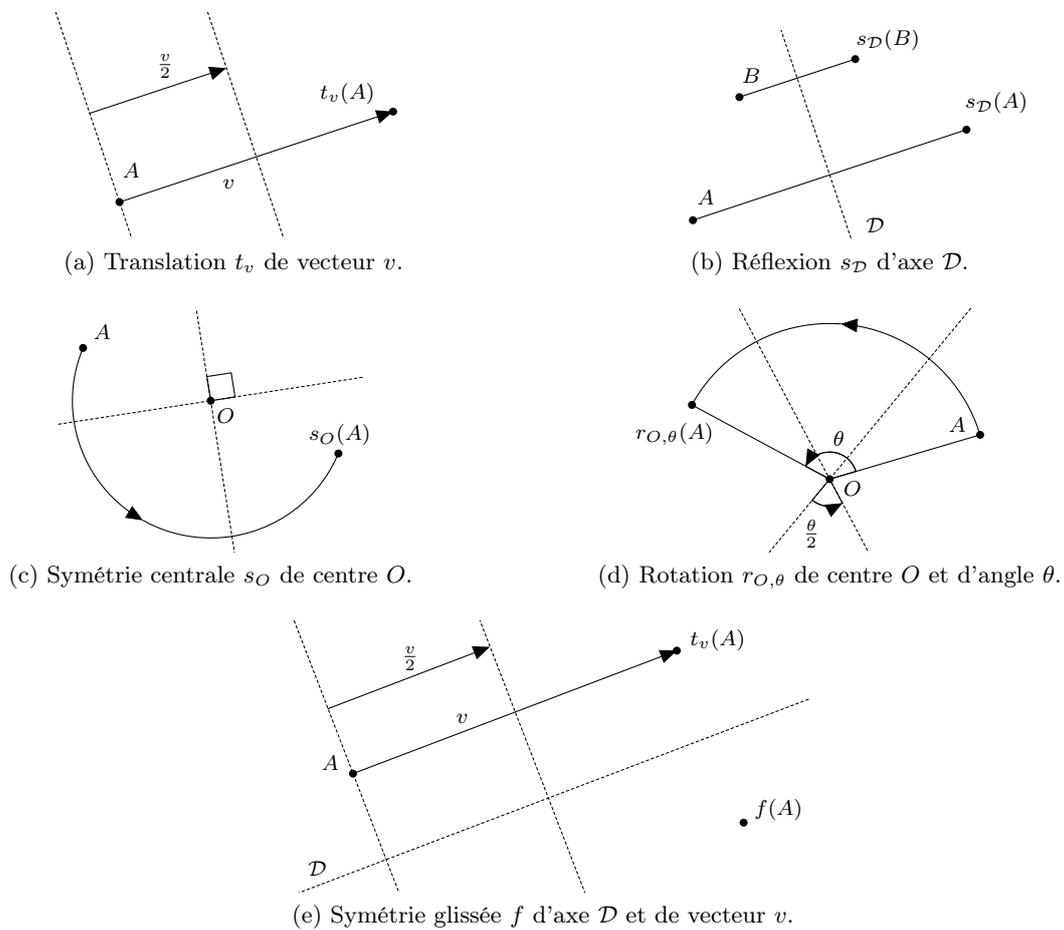


Figure 3.8 – Représentation des isométries affines en dimension 2, les droites en pointillés sont les axes de réflexions donnant une décomposition minimale en produit de réflexions. Attention, l'ordre dans lequel on compose les réflexions n'est pas anodin.

Remarque 3.4.19. Pour parler de l'angle d'une rotation il faut avoir orienté le plan (en dimension 2) et avoir orienté l'espace et l'axe de rotation (en dimension 3). Dans les tableaux 3.7 et 3.9 et sur la figure 3.8, on suppose que l'espace ambiant est orienté quand on parle de l'angle d'une rotation.

		points fixes	
		oui	non
	Id_E	$\text{Id}_{\mathcal{E}}$	translation (vecteur de translation)
forme	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$	rotation affine (axe orienté et angle)	vissage (axe, vecteur et angle)
normale	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	retournement affine (axe)	vissage (axe et vecteur)
de \vec{f}	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	réflexion orthogonale (plan de symétrie)	symétrie glissée (plan de symétrie et vecteur dans ce plan)
dans une	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$	anti-rotation (axe orienté et angle)	impossible
base orthonormée	$-\text{Id}_E$	symétrie centrale (centre)	impossible

Figure 3.9 – Classification des isométries affines en dimension 3.

À titre d'exercice, on pourra représenter l'action de ces isométries sur l'espace euclidien et trouver une décomposition explicite en un nombre minimal de réflexions.

3.4.4 Angles dans un plan affine euclidien

Dans cette section, on travaille dans un plan euclidien \mathcal{E} . Nous allons énoncer quelques propriétés liées aux angles dans \mathcal{E} . On rappelle que si $u, v \in E \setminus \{0\}$, alors $\widehat{(u, v)}$ désigne l'angle orienté défini par les demi-droites engendrées par u et v respectivement.

Proposition 3.4.20. Soient $A, B, C \in \mathcal{E}$, alors l'angle

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} + \widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})}$$

est plat.

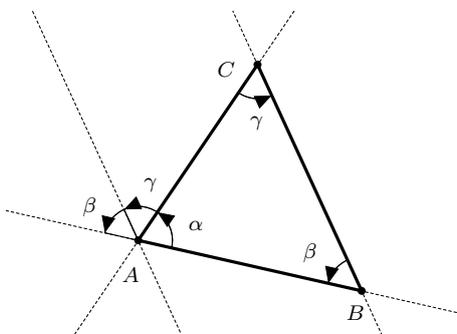


Figure 3.10 – La somme des angles d'un triangle est l'angle plat.

Démonstration. Comme $-\text{Id}_E \in \text{SO}(E)$, on a :

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} + \widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})} + \widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})}.$$

En appliquant deux fois la relation de Chasles, ceci est égal à $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA})}$ qui est plat. \square

Corollaire 3.4.21. *Si \mathcal{E} est orienté et on note α, β et $\gamma \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ les mesures respectives des angles $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$, $\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$, alors $\alpha + \beta + \gamma \equiv \pi \pmod{2\pi}$.*

Proposition 3.4.22 (Angle au centre). *Soient A, B et $C \in \mathcal{E}$ trois points distincts d'un cercle de centre O , alors $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} = 2\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$.*

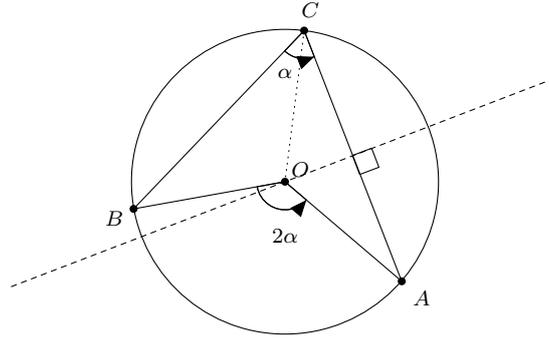


Figure 3.11 – Le théorème de l'angle au centre.

Démonstration. Notons Π l'angle plat. On applique la prop. 3.4.20 dans le triangle AOC :

$$\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})} + \widehat{(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA})} + \widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO})} = \Pi.$$

Par ailleurs, O appartient à la médiatrice de $[AC]$ et la réflexion par rapport à cette médiatrice échange A et C . D'où $\widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO})} = -\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO})} = \widehat{(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA})}$. On a donc :

$$\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})} = \Pi + 2\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO})}.$$

En raisonnant de même dans le triangle BOC , on obtient : $\widehat{(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})} = \Pi + 2\widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CO})}$.

Finalement, par la relation de Chasles,

$$\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} = \widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})} - \widehat{(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})} = 2\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO})} - 2\widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CO})} = 2\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}. \quad \square$$

Proposition 3.4.23 (Angles inscrits). *Soient A, B, C et $D \in \mathcal{E}$ quatre points distincts d'un cercle \mathcal{C} de centre O , alors les angles orientés de droites $((CA), (CB))$ et $((DA), (DB))$ sont égaux.*

Démonstration. Par la proposition 3.4.22 on a :

$$2\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} = 2\widehat{(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})}.$$

Donc on a $\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})}$ ou $\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})} + \Pi$, d'où l'égalité des angles de droites. \square

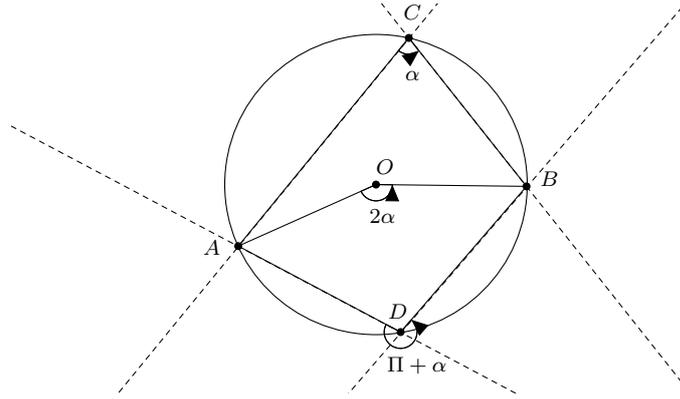


Figure 3.12 – Le théorème l’angle inscrit.

3.4.5 Similitudes affines

On s’intéresse maintenant aux similitudes affines, sujet traité dans [4, T. 2, sect. 9.5] et [10, sect. C.1.3] par exemple. On va s’appuyer sur les résultats concernant les similitudes vectorielles (cf. section 3.2.5).

Définitions 3.4.24. Soit $(\mathcal{E}, E \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace affine euclidien, on appelle *similitude affine* de \mathcal{E} toute application $f \in \text{Aff}(\mathcal{E})$ telle que \vec{f} soit une similitude vectorielle. On dit que f est *directe* si \vec{f} l’est (i.e. si $\det(\vec{f}) > 0$), et *indirecte* sinon. On appelle *rapport* de f le rapport de similitude de \vec{f} .

Définition 3.4.25. L’ensemble des similitudes affines (resp. similitudes affines directes) de \mathcal{E} est un sous-groupe de $\text{Aff}(\mathcal{E})$ noté $\text{Sim}(\mathcal{E})$ (resp. $\text{Sim}^+(\mathcal{E})$).

Remarques 3.4.26.

1. Le sous-groupe $\text{Sim}(\mathcal{E})$ (resp. $\text{Sim}^+(\mathcal{E})$) est l’image réciproque du groupe des similitudes (resp. similitudes directes) vectorielles de E par $\vec{\cdot}$.
2. Soit $f \in \text{Sim}(\mathcal{E})$, $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$ si et seulement si son rapport est 1.
3. $\text{Isom}(\mathcal{E}) \triangleleft \text{Sim}(\mathcal{E})$ et $\text{Isom}^+(\mathcal{E}) \triangleleft \text{Sim}^+(\mathcal{E})$.

Proposition 3.4.27. Soit $f \in \text{Sim}(\mathcal{E})$ de rapport $\lambda > 0$. Si $\lambda \neq 1$ alors f a un unique point fixe.

Démonstration. D’après prop. 3.2.33, \vec{f} est la composée d’une isométrie et de l’homothétie de rapport $\lambda \neq 1$. En particulier, 1 n’est pas valeur propre de \vec{f} et on peut appliquer la proposition 2.6.6. \square

Définition 3.4.28. Soit $f \in \text{Sim}(\mathcal{E}) \setminus \text{Isom}(\mathcal{E})$, son unique point fixe est appelé le *centre* de la similitude.

Proposition 3.4.29. Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien et soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application non constante qui préserve les rapports de distance, c’est-à-dire pour tout $A, B, A', B' \in \mathcal{E}$ on a :

$$d(A, B)d(f(A'), f(B')) = d(A', B')d(f(A), f(B)).$$

Alors f est une similitude.

Réciproquement, une similitude préserve les rapports de distances.

Démonstration. Comme f n’est pas constante, il existe $A_0, B_0 \in \mathcal{E}$ tels que $f(A_0) \neq f(B_0)$, et nécessairement $A_0 \neq B_0$. On note $\lambda := \frac{d(f(A_0), f(B_0))}{d(A_0, B_0)} > 0$. Alors, pour tout $A, B \in \mathcal{E}$

on a $d(f(A), f(B)) = \lambda d(A, B)$. Soit h une homothétie de rapport λ , alors $h^{-1} \circ f = g$ est une isométrie affine. Donc $f = h \circ g$ est affine par le théorème 3.4.11, et $\vec{f} = \lambda \vec{g}$ est une similitude vectorielle.

Inversement, si f est une similitude de rapport λ , alors pour tout $A, B \in \mathcal{E}$ on a $d(f(A), f(B)) = \lambda d(A, B)$, d'où le résultat. \square

Proposition 3.4.30. *Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien de dimension au moins 2. Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une bijection, telle que pour tout $A, B, C, D \in \mathcal{E}$ avec $A \neq B$ et $C \neq D$, si $(AB) \perp (CD)$ alors $(f(A)f(B)) \perp (f(C)f(D))$. Alors f est une similitude.*

Réciproquement une similitude vérifie ces conditions.

Démonstration. Commençons par la réciproque. Si f est une similitude et $(AB) \perp (CD)$, alors $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle = 0$ et donc $\langle \vec{f}(\overrightarrow{AB}), \vec{f}(\overrightarrow{CD}) \rangle = 0$ d'après la prop. 3.2.34. Comme $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ et $\vec{f}(\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{f(C)f(D)}$ on en déduit $(f(A)f(B)) \perp (f(C)f(D))$.

Passons au sens direct. Si f est affine et vérifie l'hypothèse, soient $u, v \in E \setminus \{0\}$ tels que $\langle u, v \rangle = 0$ et $O \in \mathcal{E}$, on pose $A := C := O$, $B := O + u$ et $D := O + v$. Alors $(AB) \perp (CD)$ et donc $O + \mathbb{R}\vec{f}(u) = (f(A)f(B)) \perp (f(C)f(D)) = f(O) + \mathbb{R}\vec{f}(v)$. Donc $\langle \vec{f}(u), \vec{f}(v) \rangle = 0$.

Donc \vec{f} préserve l'orthogonalité et c'est une similitude d'après la prop. 3.2.34.

Il reste à vérifier f est bien affine. On va montrer que f préserve l'alignement, et en déduire que f est affine par le théorème fondamental 2.5.27. Soient $A, B, C \in \mathcal{E}$ distincts et alignés. Soit (O, e_1, \dots, e_n) un repère de \mathcal{E} tel que $O = A$, $B = O + e_1$ et les e_i sont deux à deux orthogonaux.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $f(O) \neq f(O + e_i)$. De plus, pour tout $i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $(f(O)f(O + e_i)) \perp (f(O)f(O + e_j))$. Donc $(\overrightarrow{f(O), f(O)f(O + e_1)}, \dots, \overrightarrow{f(O), f(O)f(O + e_n)})$ est un repère cartésien de \mathcal{E} , tels que les $\overrightarrow{f(O), f(O)f(O + e_i)}$ soient deux à deux orthogonaux. Alors $(AC) = (AB) = (O + \mathbb{R}e_1)$ est orthogonale à chacune des droites $(O + \mathbb{R}e_i)$. Donc $(f(A)f(C)) = (f(O)f(C))$ est orthogonale à chacune des droites $(f(O)f(O + e_i))$ avec $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Donc $(f(A)f(C)) = (f(O)f(O + e_1)) = (f(A)f(B))$ et finalement $f(A), f(B)$ et $f(C)$ sont alignés.

Donc f préserve bien l'alignement, donc est affine. Et finalement f est bien une similitude affine. \square

3.4.6 Exercices

Exercice 3.18 (Plus de produits semi-directs). Soit $(\mathcal{E}, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace affine euclidien, montrer que $\text{Isom}(\mathcal{E}) \simeq E \rtimes O(E)$ et $\text{Isom}^+(\mathcal{E}) \simeq E \rtimes SO(E)$.

Montrer de même que $\text{Sim}(\mathcal{E})$ (resp. $\text{Sim}^+(\mathcal{E})$) est le produit semi-direct de E par le groupe des similitudes (resp. similitudes directes) vectorielles de E .

Exercice 3.19 (Action des isométries). Soit $(\mathcal{E}, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace affine euclidien.

1. Déterminer un invariant total pour l'action de $\text{Isom}(\mathcal{E})$ sur les couples de points de \mathcal{E} .
2. Déterminer un invariant total pour l'action de $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$ sur les couples de points de \mathcal{E} lorsque $n \geq 2$. Que se passe-t-il en dimension 1 ?
3. Déterminer des invariants totaux pour les actions de $\text{Isom}(\mathcal{E})$ et $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$ sur les triplets de points de \mathcal{E} .
4. Montrer que $\text{Isom}(\mathcal{E})$ agit simplement transitivement sur les repères euclidiens de \mathcal{E} . Combien y a-t-il d'orbites pour l'action de $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$ sur les repères euclidiens ? Déterminer un invariant total pour cette action.

Exercice 3.20 (Groupes finis d'isométries). Soit $(\mathcal{E}, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace affine euclidien.

1. Soit G un sous-groupe fini de $\text{Isom}(\mathcal{E})$, montrer que les éléments de G ont un point fixe commun.
2. Si $\dim(E) = 2$, déterminer les sous-groupes finis de $SO(E)$ et $O(E)$.
3. En déduire la liste des sous-groupes finis de $\text{Isom}(\mathcal{E})$ et $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$ lorsque $\dim(\mathcal{E}) = 2$.

Exercice 3.21 (Générateurs de $\text{Isom}(\mathcal{E})$, [10] pp. 146–147). Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien. Soient $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$ et $r := \text{rg}(\vec{f} - \text{Id}_E)$.

1. Si f a un point fixe, montrer que f s'écrit comme produit de r réflexions affines et pas moins.
2. Si f a un point fixe, montrer que f s'écrit comme produit de $r + 2$ réflexions affines et pas moins.
3. Montrer que f s'écrit comme produit d'au plus $\dim(\mathcal{E}) + 1$ réflexions.

Exercice 3.22 (Décomposition en réflexions). Pour chacune des classes d'isométries en dimension 2 ou 3 (voir figures 3.7 et 3.9) donner une décomposition explicite en produit de réflexions, avec le nombre minimal de réflexions.

Exercice 3.23 (Composée de rotations). Soient $r_{A,\alpha}$ et $r_{B,\beta}$ deux rotations d'un plan affine euclidien, de centre A (resp. B) et d'angle α (resp. β). Déterminer la nature de la composée de ces rotations et ses éléments caractéristiques.

Exercice 3.24 ([2], pp. 83–84). Soient A, B et C trois points distincts sur un cercle de centre O dans un plan affine euclidien.

1. Montrer qu'on a l'égalité d'angles orientés de demi-droites $\widehat{(\vec{OA}, \vec{OB})} = 2\widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})}$.
2. En déduire que l'angle orienté de droites $((\vec{CA}), (\vec{CB}))$ ne dépend pas de C .
3. On note \mathcal{D} la tangente au cercle en B , montrer que $\widehat{(\vec{OA}, \vec{OB})} = 2\widehat{(\vec{AB}, \mathcal{D})}$. En quoi ce résultat est-il le cas limite de la question précédente?

Exercice 3.25 ([2], p. 85). Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine euclidien.

1. Montrer qu'il existe un unique cercle \mathcal{C} passant par A, B et C et expliquer comment construire son centre O .
2. Montrer que $D \in \mathcal{C}$ si et seulement si $\widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})} = \widehat{(\vec{DA}, \vec{DB})}$.
3. On identifie le plan à \mathbb{C} par le choix d'une base orthonormée. Traduire le critère de cocyclicité précédent en termes des affixes a, b, c et d des points A, B, C et D .

Exercice 3.26 (Action des similitudes). Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien.

1. Déterminer un invariant total pour l'action de $\text{Sim}(\mathcal{E})$ sur les triplets de points alignés (resp. non alignés).
2. Même question pour l'action de $\text{Sim}^+(\mathcal{E})$.

Exercice 3.27 (Angles et similitudes affines). Soient \mathcal{E} un espace affine euclidien de dimension au moins 2 et $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$. On dit que f préserve les angles orientés (resp. non-orientés) de demi-droites, si pour tout $A, B, C \in \mathcal{E}$ avec $B \neq A \neq C$ on a

$$\widehat{(\vec{f(A)f(B)}, \vec{f(A)f(C)})} = \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})}.$$

1. Montrer que $f \in \text{Sim}(\mathcal{E})$ si et seulement si f préserve les angles non-orientés de demi-droites.
2. Si $\dim(\mathcal{E}) = 2$, montrer que $f \in \text{Sim}^+(\mathcal{E})$ si et seulement si f préserve les angles orientés de demi-droites.

Exercice 3.28 (Identité du parallélogramme). Soit $ABCD$ un parallélogramme dans un espace affine euclidien \mathcal{E} , montrer que :

$$d(A, B)^2 + d(B, C)^2 + d(C, D)^2 + d(D, A)^2 = 2d(A, C)^2 + 2d(B, D)^2.$$

Exercice 3.29. Montrer que les hauteurs (resp. bissectrices, resp. médiatrices, resp. médianes) d'un triangle sont concourantes.

Exercice 3.30 (Cercle et droite d'Euler, Eiden pp. 30 et 224). Soit ABC un vrai triangle du plan euclidien, on note :

- G le centre de gravité de ABC ,
- H l'orthocentre de ABC ,
- O le centre du cercle circonscrit à ABC ,
- M_A, M_B et M_C les milieux respectifs de $[BC], [AC]$ et $[AB]$,
- H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de A, B et C respectivement,
- H'_A, H'_B et H'_C les symétriques H par rapport à $[BC], [AC]$ et $[AB]$ respectivement.
- P_A, P_B et P_C les milieux respectifs de $[AH], [BH]$ et $[CH]$.

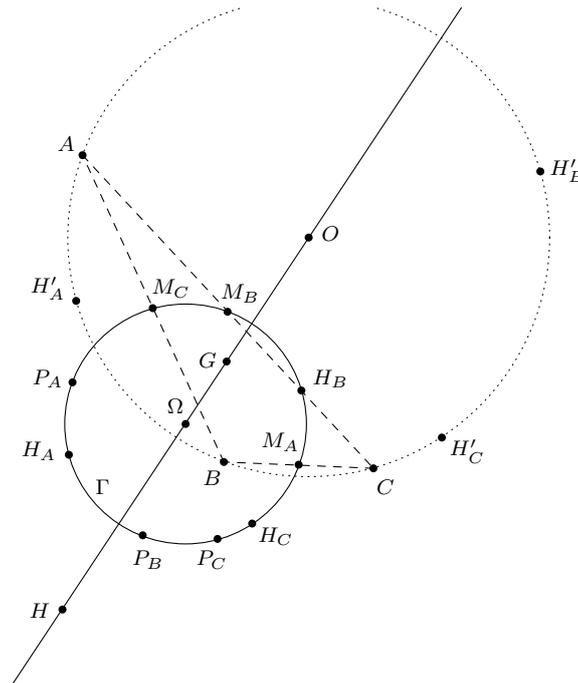


Figure 3.13 – Le cercle et la droite d'Euler.

1. Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$, montrer que l'image de ABC par h est $M_A M_B M_C$. On note Γ le cercle circonscrit à $M_A M_B M_C$
2. Montrer que $h(H) = O$. On note $\Omega := h(O)$. Montrer que Ω est le centre de Γ .
3. Montrer que $\vec{\Omega H} = -\vec{\Omega O}$. En déduire que O, G, Ω et H sont alignés dans cet ordre.
4. Soit h' l'homothétie de centre H et de rapport 2, montrer que $h'(\Omega) = O$ et $h'(\Gamma)$ est le cercle circonscrit à ABC . (*Indication* : quelle est la nature de $h' \circ h$?)

5. Montrer que H'_A, H'_B et H'_C appartiennent au cercle circonscrit à ABC .
6. En déduire que H_A, H_B et $H_C \in \Gamma$.
7. Montrer que P_A, P_B et $P_C \in \Gamma$.

Exercice 3.31 (Constructions à la règle et au compas). Soit \mathcal{E} un plan affine euclidien.

1. Soient \mathcal{D} une droite de \mathcal{E} et $A \in \mathcal{E}$, construire à la règle et au compas la perpendiculaire à \mathcal{D} passant par A .
2. Même question avec la parallèle à \mathcal{D} passant par A .
3. Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et \mathcal{D}_3 trois droites parallèles de \mathcal{E} . Construire à la règle et au compas trois points A, B, C tels que $A \in \mathcal{D}_1, B \in \mathcal{D}_2, C \in \mathcal{D}_3$ et ABC est équilatéral.

Exercice 3.32. Soit \mathcal{D} une droite d'un plan affine euclidien, A et B deux points hors de \mathcal{D} et dans le même demi-plan. Construire $M \in \mathcal{D}$ tel que $d(M, A) + d(M, B)$ soit minimal.

Exercice 3.33 (Point de Fermat, [10] pp. 212–214). Soient ABC un triangle non dégénéré d'un plan affine euclidien et $f : M \mapsto d(M, A) + d(M, B) + d(M, C)$.

1. Montrer que f admet un unique minimum, en un point M situé dans l'enveloppe convexe des sommets.
2. Si $M \notin \{A, B, C\}$, montrer que les angles orientés $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}), (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$ et $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA})$ sont égaux. En déduire que leur mesure est congrue à $\pm \frac{2\pi}{3}$ après un choix d'orientation du plan.

3.5 Nombres complexes et géométrie

Pour conclure ce chapitre sur la géométrie euclidienne, on s'intéresse à l'apport des nombres complexes dans les problèmes de géométrie euclidienne plane. Le point essentiel est qu'un plan affine euclidien orienté peut être muni d'une structure canonique de droite affine complexe. On peut alors exprimer simplement les transformations géométriques du plan réel sous-jacent grâce à la structure complexe additionnelle. Par exemple, une rotation d'un plan vectoriel réel s'exprime comme la multiplication par un complexe de module 1.

Nous allons nous contenter d'expliquer comment définir la structure complexe sur un plan euclidien orienté.

3.5.1 Structure complexe sur un plan euclidien orienté

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un plan vectoriel euclidien orienté et soit (e_1, e_2) une base orthonormée directe de E . On peut étendre la multiplication par un scalaire à des scalaires complexes de la façon suivante : $a + ib \in \mathbb{C}$ agit sur E par l'application \mathbb{R} -linéaire dont la matrice dans (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Cela permet de munir E d'une structure d'espace vectoriel complexe de dimension 1. A priori cette structure dépend de la base (e_1, e_2) .

Si $a + ib$ s'écrit sous forme polaire $re^{i\theta}$, alors $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. La multiplication par $a + ib$ est donc produit d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation, c'est donc une similitude directe de E (voir section 3.2.5). En fait, toute similitude directe de E est réalisée d'une unique façon comme la multiplication par un complexe (voir prop. 3.2.33).

Considérons une autre base orthonormée directe de E , alors la matrice de changement de base P de (e_1, e_2) vers cette nouvelle base est une isométrie directe : $P \in SO_2(\mathbb{R})$. Comme $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif, P commute à toutes les similitudes directes (cf. 3.2.33),

en particulier à $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. La multiplication par $a + ib$ a donc la même matrice dans toute base orthonormée directe de E . La structure de droite complexe sur E ne dépend donc pas de la base (e_1, e_2) choisie initialement.

Remarque 3.5.1. On a besoin d'utiliser la commutativité de $SO(E)$ à un moment, cela ne marche donc qu'en dimension 2 réelle.

Soit maintenant $(\mathcal{E}, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un plan affine euclidien orienté. On peut munir canoniquement $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ d'une structure de droite vectorielle complexe. L'action de E sur \mathcal{E} par translation n'est pas modifiée par cette opération. On a donc muni \mathcal{E} d'une structure canonique de droite affine complexe.

3.5.2 Exercices

Exercice 3.34 (Cercles-droites). Déterminer l'image du cercle de centre 1 et de rayon 1 dans \mathbb{C} par $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Exercice 3.35 (Équations en complexes). Déterminer la nature géométrique des ensembles suivants :

1. $\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} = 4\}$,
2. $\{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = 1\}$,
3. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = |z + i|\}$,
4. $\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z - i) = \frac{\pi}{4}\}$,
5. $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid \Re\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0\}$,
6. $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z(\overline{b-a})) = \frac{|b|^2 - |a|^2}{2}\}$.

Exercice 3.36 (Angle moitié et angle au centre). Soient α et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer l'argument de $\frac{e^{i\theta} - e^{i\alpha}}{e^{i\theta} - 1}$. En déduire le théorème de l'angle au centre.

Exercice 3.37 (Caractérisation des triangles équilatéraux). Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj = 0$, où $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Exercice 3.38 (Théorème de Gauss–Lucas). Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que les racines de P' appartiennent à l'enveloppe convexe des racines de P .

Exercice 3.39 (Isométries hyperboliques). Soit $M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, on définit pour tout $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $M \cdot z := \frac{az+b}{cz+d}$, avec les conventions que $M \cdot \infty := \frac{a}{c}$ et $M \cdot (-\frac{d}{c}) := \infty$.

1. Montrer que ceci définit bien une action de groupe $SL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
2. Déterminer le noyau de cette action.
3. Montrer que $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ est stable sous l'action de $SL_2(\mathbb{R})$.

Chapitre 4

Convexité

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux ensembles convexes dans un espace affine réel \mathcal{E} de dimension finie n . La notion de convexité fait que la géométrie affine sur \mathbb{R} est plus riche que sur les autres corps. Le point essentiel est que les droites réelles sont ordonnées. On peut donc parler du segment joignant deux points. C'est aussi l'ordre qui permet de parler de combinaisons convexes et des demi-espaces délimités par un hyperplan. Sur \mathbb{C} par exemple, un hyperplan ne sépare pas l'espace.

Les références pour ce chapitre sont [3, chap. I et II], [4, T. 3 chap. 11] et [14, chap. 1]. Nous ne traiterons pas des polyèdres et polytopes. Les lecteurs désireux d'en apprendre plus sur ce sujet sont invités à consulter [4, T. 3 chap. 12] ou [14, chap. 5]. Voir aussi [3].

Nous ne parlerons pas non plus de la notion de convexité en dimension infinie. C'est cependant un sujet très riche, présentant énormément d'applications en analyse (à tel point que le jury de l'Agrégation consacre une leçon entière au sujet).

4.1 Ensembles convexes

4.1.1 Définitions

Définition 4.1.1. Soient A et $B \in \mathcal{E}$, on note $[AB] := \{\lambda A + (1 - \lambda)B \mid \lambda \in [0, 1]\}$ le *segment* joignant A et B .

Définition 4.1.2. Un ensemble $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ est dit *convexe* si pour tout A et $B \in \mathcal{C}$ on a $[AB] \subset \mathcal{C}$.

Exemples 4.1.3. • Les sous-espaces affines de \mathcal{E} sont convexes.

- Les boules (ouvertes ou fermées) d'un espace affine dont la direction est munie d'une norme sont convexes, par l'inégalité triangulaire.
- Soit \mathcal{H} un hyperplan affine de \mathcal{E} , il existe $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ affine telle que $\mathcal{H} = \varphi^{-1}(0)$. Les ensembles $\varphi^{-1}(] - \infty, 0[)$ et $\varphi^{-1}(]0, \infty[)$ (resp. $\varphi^{-1}(] - \infty, 0])$ et $\varphi^{-1}([0, \infty[)$) sont appelés *demi-espaces* ouverts (resp. fermés) de frontière \mathcal{H} . Les demi-espaces, ouverts ou fermés, sont convexes
- Soient $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ où \mathcal{C} est un convexe de \mathcal{E} et $\text{epi}(f) := \{(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$ son épigraphe. Alors f est convexe si et seulement si $\text{epi}(f)$ est convexe.

Remarques 4.1.4. 1. Les boules pour une norme euclidienne sont strictement convexe, ce n'est pas le cas pour toutes les normes, par exemples la norme 1 ou la norme sup.

2. En dimension infinie un hyperplan ne définit pas nécessairement de demi-espaces, il faut qu'il soit fermé. On rappelle qu'il existe des hyperplans denses en dimension infinie.

Proposition 4.1.5. Une partie $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ est convexe si et seulement si elle est stable par combinaisons convexes, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ et pour tous $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \in \mathcal{C}$.

Démonstration. Le sens direct s'obtient par récurrence en utilisant l'associativité du barycentre. La réciproque est claire. \square

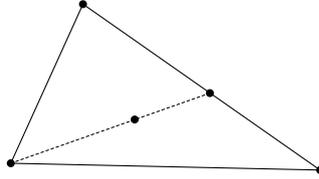


Figure 4.1 – Associativité du barycentre et convexité.

Proposition 4.1.6. L'image d'un ensemble convexe par une application affine est convexe. L'image réciproque d'un convexe par une application affine est convexe.

Démonstration. Pour tout $A, B \in \mathcal{C}$, on a $[f(A)f(B)] = f([AB])$. \square

Proposition 4.1.7. Une intersection de convexes est convexe.

Démonstration. Si A et B sont dans l'intersection, alors $[AB]$ est contenu dans chaque convexe, donc dans l'intersection. \square

4.1.2 Enveloppe convexe

Définition 4.1.8. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$, on appelle *enveloppe convexe* de \mathcal{A} , et on note $\text{Conv}(\mathcal{A})$ le plus petit convexe contenant \mathcal{A} , c'est-à-dire l'intersection de tous les convexes contenant \mathcal{A} .

Proposition 4.1.9. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$, on a

$$\text{Conv}(\mathcal{A}) = \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i A_i \mid k \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A}, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

Démonstration. Un convexe contenant \mathcal{A} contient nécessairement l'ensemble de droite. C'est donc le cas de $\text{Conv}(\mathcal{A})$. On vérifie que l'ensemble de droite est convexe ce qui donne l'autre inclusion. \square

Définitions 4.1.10. L'enveloppe convexe d'un nombre fini de points est appelée *polytope*. On parle de *polygone* pour désigner les polytopes d'intérieur non vide en dimension 2. L'enveloppe convexe d'une famille de $k + 1$ points affinement libres est appelé *simplexe* de dimension k .

Exemple 4.1.11. L'enveloppe convexe de la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} est le *simplexe standard* de dimension n :

$$\Delta_n := \left\{ (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

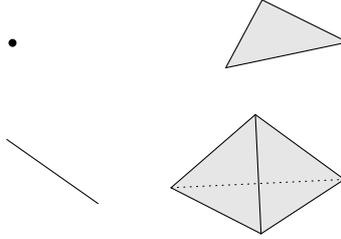


Figure 4.2 – Des simplexes de dimensions 0, 1, 2 et 3.

Théorème 4.1.12 (Carathéodory). *Soient \mathcal{E} un \mathbb{R} -espace affine de dimension n et $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$. Alors tout $M \in \text{Conv}(\mathcal{A})$ s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $n + 1$ points de \mathcal{A} . En particulier,*

$$\text{Conv}(\mathcal{A}) = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i A_i \mid A_i \in \mathcal{A}, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

En dimension 2, cela signifie que tout point contenu dans un polygone donné est contenu dans un triangle défini par trois des sommets de ce polygone. C'est ce qu'illustre la figure 4.3 ci-dessous.

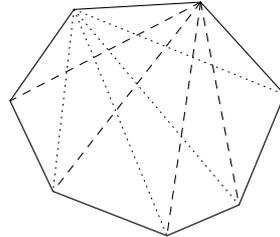


Figure 4.3 – Un polygone à sept sommets, triangulé de deux façons différentes.

Remarque 4.1.13. Attention le $n + 1$ uplet de points de \mathcal{A} donné par le théorème 4.1.12 dépend de M . Il n'est pas unique a priori, comme le montre la figure 4.3.

Démonstration. Soit $M \in \text{Conv}(\mathcal{A})$ on sait déjà que M est combinaison convexe d'éléments de \mathcal{A} . Supposons que $M = \sum_{i=0}^k \lambda_i A_i$ avec $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$ et $A_i \in \mathcal{A}$. On peut supposer les λ_i strictement positifs.

Si $k \leq n$ il n'y a rien à prouver. Si $k > n$, on va montrer qu'on peut se ramener à une combinaison convexe de $k - 1$ points de \mathcal{A} . On conclut ensuite par récurrence.

D'une part on a $\sum_{i=0}^k \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = 0$ et $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$. Ensuite, le système linéaire

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^k \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = 0 \\ \sum_{i=0}^k \alpha_i = 0 \end{cases}$$

admet une solution $\alpha := (\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ non triviale. En effet, c'est un système de $n + 1$ équations en $k + 1$ inconnues avec $k > n$.

Comme $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 0$ et $\alpha \neq 0$, il existe i tel que $\alpha_i > 0$. Soit $\tau := \min \left\{ \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \mid \alpha_i > 0 \right\}$.

Quitte à réindexer, on peut supposer que $\tau = \frac{\lambda_k}{\alpha_k}$. On a alors

$$\sum_{i=0}^{k-1} (\lambda_i - \tau \alpha_i) \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=0}^k (\lambda_i - \tau \alpha_i) \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=0}^k \lambda_i \overrightarrow{MA_i} - \tau \sum_{i=0}^k \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = 0$$

et

$$\sum_{i=0}^{k-1} (\lambda_i - \tau \alpha_i) = \sum_{i=0}^k (\lambda_i - \tau \alpha_i) = \sum_{i=0}^k \lambda_i - \tau \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1.$$

Donc $M = \sum_{i=0}^{k-1} (\lambda_i - \tau \alpha_i) A_i$. Comme $\tau \geq 0$, si $\alpha_i \leq 0$ alors on a $\lambda_i - \tau \alpha_i \geq 0$. Si $\alpha_i > 0$, alors $\lambda_i - \tau \alpha_i \geq 0$ par définition de τ . D'où le résultat. \square

Corollaire 4.1.14. *Soit $K \subset \mathcal{E}$ un compact d'un \mathbb{R} -espace affine de dimension finie, alors $\text{Conv}(K)$ est compacte.*

Démonstration. Notons $n := \dim(\mathcal{E})$. D'après le théorème de Carathéodory (thm. 4.1.12), $\text{Conv}(K)$ est l'image de l'application continue :

$$\begin{aligned} \Delta_n \times K^{n+1} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (\lambda_0, \dots, \lambda_n, A_0, \dots, A_n) &\longmapsto \sum_{i=0}^n \lambda_i A_i. \end{aligned}$$

De plus $\Delta_n \times K^{n+1}$ est compact. Donc $\text{Conv}(K)$ est compacte. \square

4.1.3 Théorèmes de Radon et Helly

Théorème 4.1.15 (Radon). *Soient \mathcal{E} un \mathbb{R} -espace affine de dimension n et $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ contenant au moins $n + 2$ points. Alors il existe deux ensembles P et $N \subset \mathcal{A}$ tels que $P \cap N = \emptyset$ mais $\text{Conv}(P) \cap \text{Conv}(N) \neq \emptyset$.*

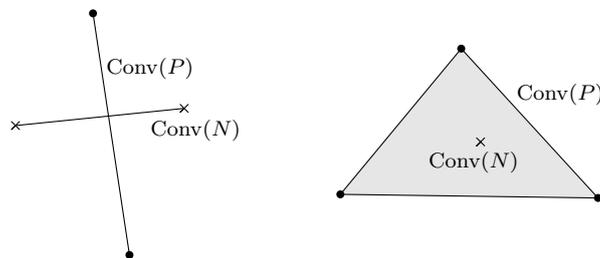


Figure 4.4 – Les deux configurations possibles pour quatre points dans un plan. Les éléments de P sont marqués par un points et ceux de N sont marqués par une croix.

Démonstration. Soient $A_1, \dots, A_{n+2} \in \mathcal{A}$ distincts. Soit $O \in \mathcal{E}$, le système linéaire de $n+1$ équations en $n+2$ inconnues $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+2})$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i = 0 \end{cases}$$

admet une solution α non triviale. Soient $I := \{i \mid \alpha_i > 0\}$ et $J := \{j \mid \alpha_j < 0\}$. Comme $\alpha \neq 0$ et $\sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i = 0$, I et J sont non vides. De plus, $I \cap J = \emptyset$. Posons $P := \{A_i \mid i \in I\}$ et $N := \{A_j \mid j \in J\}$, on a bien P et N non vides et $P \cap N = \emptyset$.

Soit $m := \sum_{i \in I} \alpha_i = -\sum_{j \in J} \alpha_j$, on a :

$$\frac{1}{m} \sum_{i \in I} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = -\frac{1}{m} \sum_{j \in J} \alpha_j \overrightarrow{OA_j} = \frac{1}{m} \sum_{j \in J} (-\alpha_j) A_j \in \text{Conv}(P) \cap \text{Conv}(N). \quad \square$$

Théorème 4.1.16 (Helly). *Soient $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ des convexes d'un \mathbb{R} -espace affine \mathcal{E} de dimension n , on suppose que $k \geq n+1$ et que les intersections $n+1$ à $n+1$ des \mathcal{C}_i sont non vides, i.e. pour tout $I \subset \llbracket 1, k \rrbracket$ de cardinal $n+1$, $\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcap_{i=1}^k \mathcal{C}_i \neq \emptyset$.*

Démonstration. On fait une preuve par récurrence. Si $k = n+1$ il n'y a rien à montrer. Supposons le résultat vrai au rang $k \geq n+1$ et montrons le pour le rang $k+1$. Par hypothèse de récurrence, pour tout $i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$, il existe $A_i \in \bigcap_{j \neq i} \mathcal{C}_j$.

Comme $k+1 \geq n+2$, d'après le théorème de Radon (thm. 4.1.15) on peut trouver P et N deux parties disjointes de $\{A_i \mid 1 \leq i \leq k+1\}$ telles que $\text{Conv}(P) \cap \text{Conv}(N) \neq \emptyset$. Soit $M \in \text{Conv}(P) \cap \text{Conv}(N)$, montrons que $M \in \mathcal{C}_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$.

Soit $i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$, si $j \neq i$ alors $A_j \in \mathcal{C}_i$. Donc \mathcal{C}_i contient $\{A_j \mid j \neq i\}$. En particulier, \mathcal{C}_i contient P ou N . Par convexité, $\text{Conv}(P) \subset \mathcal{C}_i$ ou $\text{Conv}(N) \subset \mathcal{C}_i$. Dans les deux cas $M \in \mathcal{C}_i$, ce qui conclut la preuve. \square

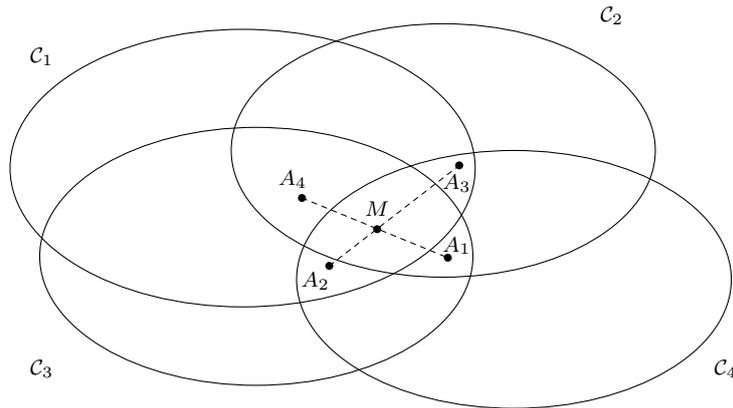


Figure 4.5 – Quatre convexes du plan qui s'intersectent trois à trois.

Théorème 4.1.17 (Helly pour les compacts). *Soit $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ une famille infinie de convexes compacts d'un \mathbb{R} -espace affine \mathcal{E} de dimension n . On suppose que les intersections $n+1$ à $n+1$ des \mathcal{C}_i sont non vides. Alors $\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i \neq \emptyset$.*

Démonstration. D'après la version 4.1.16 du théorème de Helly et l'hypothèse, pour tout $J \subset I$ fini, $\bigcap_{i \in J} \mathcal{C}_i \neq \emptyset$. Supposons que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i = \emptyset$.

Soit $i \in I$, alors pour tout $x \in \mathcal{C}_i$ il existe $i_x \in I$ tel que $x \notin \mathcal{C}_{i_x}$. Mais alors il existe un voisinage ouvert U_x de x dans \mathcal{E} tel que $U_x \cap \mathcal{C}_{i_x} = \emptyset$. La réunion des U_x recouvre \mathcal{C}_i , donc par compacité, il existe $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{C}_i$ tels que $\mathcal{C}_i \subset \bigcup_{j=1}^k U_{x_j}$. Mais alors $\mathcal{C}_i \cap \left(\bigcap_{j=1}^k \mathcal{C}_{i_{x_j}} \right) = \emptyset$. Contradiction. \square

4.1.4 Exercices

Exercice 4.1. Quels sont les convexes de \mathbb{R} ?

Exercice 4.2. Montrer qu'une réunion croissante de convexes est convexe.

Exercice 4.3 (Somme de Minkowski, [4] T. 3 p. 11). Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux convexes d'un espace vectoriel E , soient α et $\alpha' \in \mathbb{R}$, montrer que $\alpha\mathcal{C} + \alpha'\mathcal{C}'$ est un convexe.

Exercice 4.4 (ε -voisinage, [4] T. 3 pp. 11–12). Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien. Pour tout $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ et tout $\varepsilon > 0$, on note $V(\mathcal{A}, \varepsilon) := \{x \in \mathcal{E} \mid d(x, \mathcal{A}) < \varepsilon\}$ le ε -voisinage ouvert (resp. $\overline{V}(\mathcal{A}, \varepsilon) := \{x \in \mathcal{E} \mid d(x, \mathcal{A}) \leq \varepsilon\}$ le ε -voisinage fermé) de \mathcal{A} .

1. Montrer que $V(\mathcal{A}, \varepsilon) = \mathcal{A} + \mathbb{B}(0, \varepsilon)$, où $\mathbb{B}(0, \varepsilon)$ est la boule ouverte de centre 0 et de rayon ε dans E .
2. Si \mathcal{A} est compact, montrer que $\overline{V}(\mathcal{A}, \varepsilon) = \mathcal{A} + \overline{\mathbb{B}(0, \varepsilon)}$.
3. En déduire que si \mathcal{A} est convexe alors $V(\mathcal{A}, \varepsilon)$ est convexe. Si de plus \mathcal{A} est compact, en déduire également que $\overline{V}(\mathcal{A}, \varepsilon)$ est convexe.

Exercice 4.5 (Topologie des convexes, [4] T. 3 sect. 11.2 et 11.3). Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ un convexe non vide d'un espace affine de dimension finie n .

1. Montrer que $\overline{\mathcal{C}}$ est convexe.
2. Soient $A \in \overline{\mathcal{C}}$ et $B \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$, montrer que $]AB[\subset \overset{\circ}{\mathcal{C}}$. En déduire que $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$ est convexe.
3. Montrer que $\overset{\circ}{\mathcal{C}} = \overset{\circ}{\overline{\mathcal{C}}}$. Si de plus $\overset{\circ}{\mathcal{C}} \neq \emptyset$, montrer que $\overline{\mathcal{C}} = \overline{\overset{\circ}{\mathcal{C}}}$.
4. Si \mathcal{C} est compact, montrer que $\overline{\mathcal{C}}$ est l'enveloppe convexe de sa frontière. Que se passe-t-il lorsque \mathcal{C} n'est pas compact ?
5. Si \mathcal{C} est ouvert, montrer que $\overline{\mathcal{C}}$ est homéomorphe à \mathbb{R}^n .
6. Si \mathcal{C} est compact, montrer que $\overline{\mathcal{C}}$ est homéomorphe à la boule unité fermée de \mathbb{R}^n . Montrer que sa frontière est homéomorphe à \mathbb{S}^{n-1} .
7. L'enveloppe convexe d'un borné (resp. fermé) est-elle bornée (resp. fermée) ?

Exercice 4.6. Dans un espace affine de dimension infinie, l'enveloppe convexe d'un compact est-elle compacte ?

Exercice 4.7 (Théorème de Kakutani, [11] pp. 77–78). Soient \mathcal{E} un espace affine dont la direction est un espace normé et $K \subset \mathcal{E}$ un convexe compact non vide. Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ affine continue telle que $f(K) \subset K$, montrer que f admet un point fixe dans K .

Exercice 4.8 (Droite sécante, [4] T. 3 p. 56). Soit \mathcal{E} un plan affine réel et $(\mathcal{S}_i)_{i \in I}$ une famille finie de segments parallèles telle que pour tout i, j et $k \in I$, il existe une droite intersectant $\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j$ et \mathcal{S}_k . Montrer qu'il existe une droite intersectant tous les \mathcal{S}_i .

Exercice 4.9 (Points centraux, [14] sect. 1.4). Soit \mathcal{E} un \mathbb{R} -espace affine de dimension n et $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ un ensemble fini de cardinal k . On dit qu'un point $M \in \mathcal{E}$ est *central* pour \mathcal{A} si tout demi-espace fermé contenant M contient au moins $\frac{k}{n+1}$ points de \mathcal{A} .

1. Montrer que M est central si et seulement si pour tout demi-espace ouvert δ contenant strictement plus de $\frac{n}{n+1}k$ points de \mathcal{A} on a $M \in \delta$.
2. Montrer que \mathcal{A} possède un point central.

4.2 Hyperplans et séparation

4.2.1 Le théorème de Hahn–Banach

Dans cette section, on présente des résultats dits de séparation. Ces résultats s'appuient sur le théorème de Hahn–Banach, dont on donne une démonstration en dimension finie. La version en dimension infinie de ce théorème a de très nombreuses applications en analyse, mais la preuve dans le contexte le plus général nécessite l'utilisation de l'axiome du choix. Le lecteur intéressé pourra consulter les premières pages de [5]. Il est aussi possible de donner une démonstration sans axiome du choix du théorème de Hahn–Banach dans le cadre d'un espace vectoriel normé séparable, voir [17, sect. VII.8].

Définition 4.2.1. Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux parties d'un espace affine réel \mathcal{E} (éventuellement de dimension infinie) et \mathcal{H} un hyperplan fermé de \mathcal{E} , on dit que \mathcal{H} *sépare* (resp. *sépare strictement*) \mathcal{A} et \mathcal{B} si l'un des deux demi-espaces fermés (resp. ouverts) définis par \mathcal{H} contient \mathcal{A} et l'autre contient \mathcal{B} .

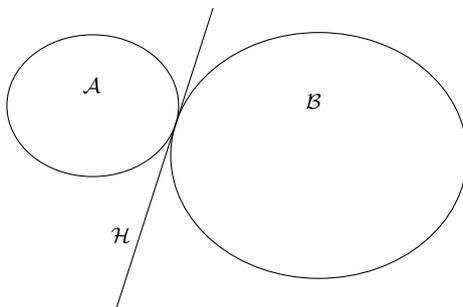


Figure 4.6 – L'hyperplan \mathcal{H} sépare strictement les ensembles ouverts \mathcal{A} et \mathcal{B} . Il sépare également leurs adhérences, mais pas strictement.

Théorème 4.2.2 (Hahn–Banach). *Soit \mathcal{E} un \mathbb{R} -espace affine de dimension finie. Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux convexes non vides disjoints de \mathcal{E} . On suppose que \mathcal{B} est ouvert. Alors il existe un hyperplan qui sépare \mathcal{A} et \mathcal{B} .*

Remarques 4.2.3. 1. On a en fait un peu mieux : comme \mathcal{B} est ouvert, il est inclus dans un demi-espace ouvert délimité par \mathcal{H} .
2. On peut en particulier appliquer ce résultat avec \mathcal{A} un sous-espace affine de \mathcal{E} .

Pour démontrer le théorème 4.2.2, nous allons utiliser le lemme suivant. Ce lemme est d'intérêt indépendant et permet notamment de prouver des résultats sur la topologie des ensembles convexes (voir exercice 4.5 ou [4, T. 3 sect. 11.2 et 11.3]).

Lemme 4.2.4. *Soit \mathcal{C} un convexe d'un \mathbb{R} -espace affine \mathcal{E} de dimension finie. Soient $A \in \overline{\mathcal{C}}$ et $B \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$, alors $]AB[:= \{\lambda A + (1 - \lambda)B \mid \lambda \in]0, 1[\} \subset \overset{\circ}{\mathcal{C}}$.*

Démonstration du lem. 4.2.4. La topologie de \mathcal{E} est définie par l'unique topologie normée sur sa direction E . On choisit une norme auxiliaire $\|\cdot\|$ pour faire la démonstration. Dans la suite on note $\mathbb{B}(O, r)$ la boule ouverte de \mathcal{E} de centre O et de rayon r pour $\|\cdot\|$.

Soient $\lambda \in]0, 1[$ et $G := \lambda A + (1 - \lambda)B$. Comme $B \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$, il existe $r > 0$ tel que $\mathbb{B}(B, r) \subset \mathcal{C}$. Soient $\varepsilon > 0$ et $C \in \mathcal{C}$ tel que $d(A, C) < \varepsilon$. On note $G' := \lambda C + (1 - \lambda)B$. Par convexité de \mathcal{C} , on a $\mathbb{B}(G', (1 - \lambda)r) \subset \mathcal{C}$. En effet, l'homothétie de centre C et de rapport $(1 - \lambda)$ envoie $\mathbb{B}(B, r)$ sur $\mathbb{B}(G', (1 - \lambda)r)$.

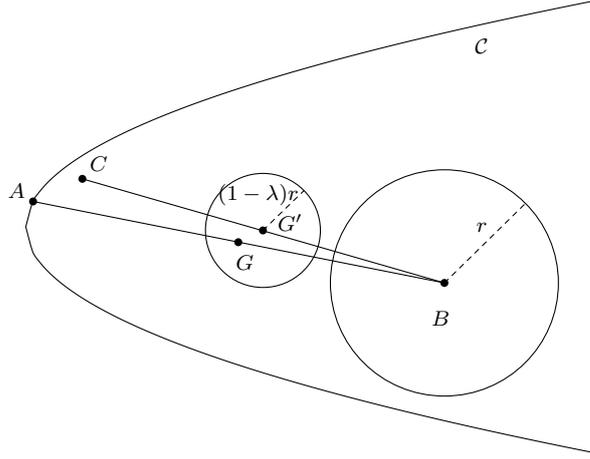


Figure 4.7 – Pour $d(A, C)$ petit, G est contenu dans la boule de centre G' et de rayon $(1 - \lambda)r$, donc dans l'intérieur de \mathcal{C} .

Par ailleurs,

$$d(G', G) = \|\overrightarrow{GG'}\| = \|\lambda\overrightarrow{GC} + (1 - \lambda)\overrightarrow{GB}\| = \|\lambda\overrightarrow{GC} - \lambda\overrightarrow{GA}\| = \lambda\|\overrightarrow{AC}\| < \lambda\varepsilon.$$

Donc si $\varepsilon \leq \frac{1-\lambda}{\lambda}r$ on a $G \in \mathbb{B}(G', (1 - \lambda)r) \subset \mathcal{C}$. Donc $G \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$ et $]AB[\subset \overset{\circ}{\mathcal{C}}$. \square

Démonstration du thm. 4.2.2. Soit $\mathcal{C} := \mathcal{B} - \mathcal{A} := \{\overrightarrow{AB} \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$, cet ensemble est un convexe non vide de la direction E de \mathcal{E} . De plus \mathcal{C} est ouvert car réunion d'ouverts et ne contient pas 0.

Supposons qu'il existe $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $\forall x \in \mathcal{C}, \varphi(x) \geq 0$. Soit f une forme affine sur \mathcal{E} de partie linéaire φ , $\forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}$, on a $f(B) - f(A) = \overline{f(A)f(B)} = \varphi(\overrightarrow{AB}) \geq 0$. Soit $\mu := \sup\{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$, on a pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $B \in \mathcal{B}$, $f(B) \geq \mu \geq f(A)$. Donc $\mathcal{H} := f^{-1}(\mu)$ sépare \mathcal{A} et \mathcal{B} . Il s'agit donc de trouver $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $\varphi(\mathcal{C}) \subset \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire de séparer \mathcal{C} de 0 dans E .

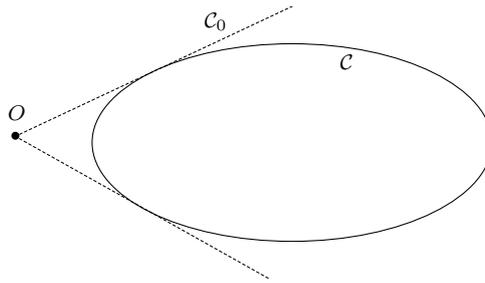


Figure 4.8 – Le demi-cône ouvert \mathcal{C}_0 sur \mathcal{C} .

Si E est de dimension 2, soit $\mathcal{C}_0 := \bigcup_{\alpha > 0} \alpha\mathcal{C}$ le demi-cône ouvert sur \mathcal{C} . C'est encore un ouvert disjoint de 0. Il est aussi convexe. En effet, si $x, y \in \mathcal{C}$, $\alpha, \beta > 0$ et $t \in [0, 1]$, alors :

$$t\alpha x + (1 - t)\beta y = m \left(\frac{t\alpha}{m} x + \frac{(1 - t)\beta}{m} y \right) \in m\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_0,$$

où $m = t\alpha + (1 - t)\beta$. Soit $x \in \overline{\mathcal{C}_0} \setminus \{0\}$. Si $-x \in \mathcal{C}_0$, comme \mathcal{C}_0 est ouvert convexe on aurait $0 \in]-x, x[\subset \mathcal{C}_0$ par le lemme 4.2.4. C'est absurde, donc $-x \notin \mathcal{C}_0$. Comme \mathcal{C}_0 est

un demi-cône qui ne contient ni x , ni $-x$, ni 0 , on a $\text{Vect}(x) \cap \mathcal{C}_0 = \emptyset$. Donc $\text{Vect}(x) \cap \mathcal{C} = \emptyset$ et $\text{Vect}(x)$ sépare \mathcal{C} de 0 .

On s'intéresse maintenant au cas où E est de dimension finie. Soit H un sous-espace vectoriel de E disjoint de \mathcal{C} et de dimension maximale parmi les sous-espaces vérifiant cette propriété. En particulier $H \neq E$. Soit $p : E \rightarrow E/H$ la projection canonique, p est linéaire surjective donc ouverte. Alors $p(\mathcal{C})$ est un ouvert convexe de E/H ne rencontrant pas 0 .

Si $\text{codim}(H) \geq 2$, alors soit P un plan vectoriel de E/H . On a $p(\mathcal{C}) \cap P$ ouvert convexe de P ne rencontrant pas 0 . D'après le cas de dimension 2, il existe une droite vectorielle $D \subset P \subset E/H$ disjointe de $p(\mathcal{C})$. Mais alors $p^{-1}(D)$ est un sous-espace vectoriel de E disjoint de \mathcal{C} et de dimension $\dim(H) + 1$. Contradiction, donc H est un hyperplan.

Finalement, soit $\varphi \in E^*$ telle que $\ker(\varphi) = H$, par convexité et théorème des valeurs intermédiaires, \mathcal{C} est contenu dans $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+)$ ou $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_-)$. \square

4.2.2 Hyperplans d'appui

Définition 4.2.5. Soit \mathcal{A} une partie d'un \mathbb{R} -espace affine et $A \in \mathcal{A}$. On dit qu'un hyperplan affine \mathcal{H} est un *hyperplan d'appui* de \mathcal{A} en A si \mathcal{H} sépare A de \mathcal{A} .

Remarque 4.2.6. Il peut y avoir plusieurs hyperplans d'appui distincts de \mathcal{A} en A .

Proposition 4.2.7. Soit \mathcal{C} un convexe d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Alors \mathcal{C} admet un hyperplan d'appui en tout point de sa frontière.

Démonstration. Si \mathcal{C} est contenu dans un hyperplan le résultat est vrai.

Sinon, \mathcal{C} contient un repère affine. Par convexité, \mathcal{C} contient alors le simplexe défini par ce repère. Ce simplexe est d'intérieur non vide, donc $\overset{\circ}{\mathcal{C}} \neq \emptyset$.

On va utiliser les résultats de l'exercice 4.5 (voir aussi [4, T. 3, sect. 11.2]). On sait que $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$ est convexe. Soit $A \in \overline{\mathcal{C}} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{C}}$, par le théorème de Hahn–Banach (thm. 4.2.2), il existe un hyperplan \mathcal{H} séparant A de $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$. On utilise ensuite le fait que si $\overset{\circ}{\mathcal{C}} \neq \emptyset$ alors $\overline{\mathcal{C}} = \overline{\overset{\circ}{\mathcal{C}}}$. Ainsi, \mathcal{H} sépare A de $\overline{\mathcal{C}}$ donc de \mathcal{C} . \square

Proposition 4.2.8. Soit \mathcal{A} un fermé d'intérieur non vide dans un \mathbb{R} -espace affine \mathcal{E} de dimension finie. Si \mathcal{A} admet un hyperplan d'appui en tout point de sa frontière, alors \mathcal{A} est convexe.

Démonstration. On fait une preuve par l'absurde. Soient A et $B \in \mathcal{A}$ tels qu'il existe $M \in]AB[\setminus \mathcal{A}$. Soit $C \in \overset{\circ}{\mathcal{A}}$, le connexe $[CM]$ rencontre \mathcal{A} et $\mathcal{E} \setminus \mathcal{A}$, donc il rencontre la frontière de \mathcal{A} par le théorème de passage des douanes. Soit $N \in [CM]$ un point de la frontière de \mathcal{A} . Nécessairement $N \in]CM[$, car $C \in \overset{\circ}{\mathcal{A}}$ et $M \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{A}$ avec \mathcal{A} fermé.

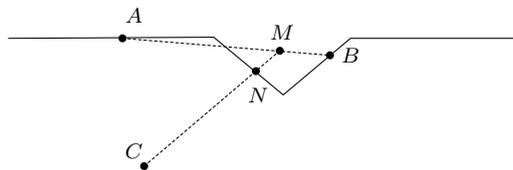


Figure 4.9 – Le point N est sur la frontière de \mathcal{A} et dans l'intérieur du triangle ABC .

Soit \mathcal{H} un hyperplan d'appui en N pour \mathcal{A} . Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ une forme affine telle que $\mathcal{H} = f^{-1}(0)$. Comme $C \in \overset{\circ}{\mathcal{A}}$, $C \notin \mathcal{H}$ et donc $f(C) \neq 0$, disons $f(C) > 0$. Mais alors,

$\mathcal{A} \subset f^{-1}(\mathbb{R}_+)$. Or, N est combinaison convexe de A, B et C avec des coefficients α, β et γ positifs et $\gamma > 0$: $N = \alpha A + \beta B + \gamma C$. Donc

$$f(N) = \alpha f(A) + \beta f(B) + \gamma f(C) \geq \gamma f(C) > 0.$$

C'est absurde, comme \mathcal{H} sépare N de \mathcal{A} on devrait avoir $f(N) \leq 0$. □

4.2.3 Exercices

Exercice 4.10. 1. Montrer que le théorème de Hahn–Banach (thm. 4.2.2) reste vrai si on suppose seulement que \mathcal{B} est d'intérieur non vide.

2. Montrer qu'on peut en fait se passer de l'hypothèse sur \mathcal{B} .
(*Indication* : se ramener à la question précédente.)

Exercice 4.11 (Séparation, [4] T. 3 sect. 11.4). Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux convexes disjoints dans un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Montrer les résultats de séparation suivants.

1. Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont ouverts, alors il existe un hyperplan qui les séparent strictement.
2. Si \mathcal{A} est fermé et \mathcal{B} est compact, alors il existe un hyperplan qui les séparent strictement.

Exercice 4.12 (Convexes fermés, [4] T. 3 sect. 11.5). Montrer qu'un convexe fermé dans un \mathbb{R} -espace affine de dimension finie est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent. (*Indication* : utiliser le résultat de l'exercice 4.11.)

Exercice 4.13 (Lemme de Farkas, [14] sect. 1.2). Soit $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, montrer qu'une et une seule des possibilités suivantes est vérifiée.

1. Il existe $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ dont les composantes sont positives ou nulles et tel que $Mx = 0$.
2. Il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que toutes les composantes de $(y^t)M = 0$ soient strictement négatives.

Exercice 4.14 (Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$, [9] pp. 329–330 et [16] pp. 206–207). On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur subordonnée à la norme euclidienne de \mathbb{R}^n . Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\varphi_M : A \mapsto \text{Tr}(AM)$.

1. Montrer que $M \mapsto \varphi_M$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers son dual.
2. Montrer que $\text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est un convexe compact inclus dans \mathbb{B} , la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que pour tout $\varphi \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^*$, $\max_{A \in \text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))} \varphi(A) = \max_{A \in O_n(\mathbb{R})} \varphi(A)$.
4. Montrer que pour tout $\varphi \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^*$, $\max_{A \in \mathbb{B}} \varphi(A) = \max_{A \in O_n(\mathbb{R})} \varphi(A)$.
(*Indication* : écrire φ comme φ_M et utiliser la décomposition polaire de M)
5. Conclure que $\text{Conv}(O_n(\mathbb{R})) = \mathbb{B}$.

4.3 Points extrémaux

Dans cette section, on définit la notion de point extrémal. L'intérêt de cette notion vient du fait qu'une fonction affine définie sur un convexe compact atteint nécessairement ses extrema en des points extrémaux. On peut donc ramener des problèmes d'optimisation sous contrainte pour des fonctions affines à comparer les valeurs de la fonction sur les points extrémaux.

4.3.1 Définition et premières propriétés

On se place dans un \mathbb{R} -espace affine \mathcal{E} de dimension finie.

Définition 4.3.1. Soit \mathcal{C} un convexe de \mathcal{E} . Un point $M \in \mathcal{C}$ est dit *extrémal* si pour tout $A, B \in \mathcal{C}$, si M est le milieu de $[AB]$, alors $A = M = B$.

Remarque 4.3.2. De façon équivalente, M est extrémal s'il n'existe pas de points $A, B \in \mathcal{C}$ tels que $M \in]A, B[$.

Exemples 4.3.3. • Les points extrémaux d'un polygône sont ses sommets.

- Les points extrémaux d'une boule euclidienne fermée sont les points de la sphère de même rayon. Ce n'est plus vrai si on considère la boule fermée pour une norme qui n'est pas strictement convexe.

Proposition 4.3.4. Soit M un point extrémal du convexe \mathcal{C} . Soit $f \in \text{Aff}(\mathcal{E})$, alors $f(M)$ est un point extrémal du convexe $f(\mathcal{C})$.

Démonstration. Si $f(M)$ est le milieu du segment joignant deux points de $f(\mathcal{C})$, disons $f(A)$ et $f(B)$, alors M est le milieu de $[AB]$ en appliquant f^{-1} . Donc $A = M = B$ et $f(A) = f(M) = f(B)$. \square

Proposition 4.3.5. Soient $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ un convexe et f une forme affine sur \mathcal{E} . Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ l'ensemble des points de maximum de $f|_{\mathcal{C}}$. Alors \mathcal{A} est convexe et tout point extrémal de \mathcal{A} est un point extrémal de \mathcal{C} .

Démonstration. Si $A, B \in \mathcal{A}$, alors pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda A + (1 - \lambda)B \in \mathcal{C}$ et

$$f(\lambda A + (1 - \lambda)B) = \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B) = \max_{M \in \mathcal{C}} f(M).$$

Donc $[AB] \subset \mathcal{A}$ et \mathcal{A} est convexe. Soit M un point extrémal de \mathcal{A} . Si M est le milieu de $[AB]$ avec $A, B \in \mathcal{C}$, alors A et $B \in \mathcal{A}$. En effet, si $A \notin \mathcal{A}$, alors $f(A) < f(M)$, $f(B) \leq f(M)$ et $f(M) = \frac{1}{2}(f(A) + f(B)) < f(M)$. De même pour B .

Comme M est extrémal pour \mathcal{A} , $A = M = B$. Donc M est extrémal pour \mathcal{C} . \square

Corollaire 4.3.6. Soient $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ un convexe et f une forme affine sur \mathcal{E} . Si $f|_{\mathcal{C}}$ atteint un maximum en un unique point $M \in \mathcal{C}$, alors M est extrémal.

Démonstration. On applique la prop. 4.3.5 avec $\mathcal{A} = \{M\}$. Comme M est un point extrémal de \mathcal{A} , c'est un point extrémal de \mathcal{C} . \square

4.3.2 Le théorème de Krein–Milman

Nous allons maintenant nous intéresser au théorème de Krein–Milman dans le cadre d'un \mathbb{R} -espace affine de dimension finie n .

Théorème 4.3.7 (Krein–Milman). Soit K un convexe compact dans un \mathbb{R} -espace affine \mathcal{E} de dimension n . Alors K est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. En particulier, si $K \neq \emptyset$ il possède un point extrémal.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n .

Si $n = 0$, alors \mathcal{E} est un point et le résultat est vrai. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat vrai en dimension $n - 1$.

Soit $M \in K$. Si $M \in \overset{\circ}{K}$, alors il existe un hyperplan d'appui \mathcal{H} de K en M d'après la proposition 4.2.7. Comme $M \in K$, M appartient aux deux demi-espaces fermés délimités par \mathcal{H} , donc $M \in \mathcal{H}$. Par hypothèse de récurrence, le convexe compact $K \cap \mathcal{H}$

est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. On applique ensuite la prop. 4.3.5 pour une forme affine f telle que $f^{-1}(0) = \mathcal{H}$ et $K \subset f^{-1}(]-\infty, 0])$. Les points extrémaux de $K \cap \mathcal{H}$ sont donc des points extrémaux de K . En particulier, M est combinaison convexe de points extrémaux de $K \cap \mathcal{H}$ donc de K .



(a) Si M appartient à la frontière de K .

(b) Si M appartient à l'intérieur de K .

Figure 4.10 – M est combinaison convexe de points extrémaux de K .

Si $M \in \overset{\circ}{K}$, soit \mathcal{D} une droite de \mathcal{E} passant par M . Alors $\mathcal{D} \cap K$ est un convexe compact de \mathcal{D} , donc de la forme $[AB]$. Les points A et B appartiennent à $K \setminus \overset{\circ}{K}$ donc sont combinaisons convexes de points extrémaux de K . Il en est donc de même pour M . \square

Corollaire 4.3.8. *Soit f une forme affine sur un convexe compact K non vide, alors $f|_K$ atteint son maximum en un point extrémal.*

Démonstration. Comme f est continue, elle admet un maximum sur K . Soit \mathcal{A} l'ensemble des points de \mathcal{C} où ce maximum est atteint. On sait déjà que \mathcal{A} est convexe (prop. 4.3.5). De plus $\mathcal{A} \subset K$ est fermé donc compact. Par le théorème de Krein–Milman (thm. 4.3.7) \mathcal{A} possède un point extrémal M . D'après la proposition 4.3.5, M est également extrémal pour K . Donc $f|_K$ atteint son maximum en M qui est extrémal. \square

Remarque 4.3.9. La version du théorème de Krein–Milman énoncée dans cette section est une version simplifiée. Ce théorème est en fait valable dans un \mathbb{R} -espace vectoriel topologique localement convexe. On pourra se reporter à [3, sect. III.4]. On peut trouver des applications de ce résultat dans [3, chap. III]. Par exemple, le théorème de Krein–Milman permet de montrer (cf. [3, sect. III.8]) que l'ensemble des mesures de probabilités sur $[0, 1]$ muni de sa tribu borélienne est l'enveloppe convexe des mesures de Dirac dans l'espace des formes linéaires continues sur $(\mathcal{C}^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.

4.3.3 Exercices

Exercice 4.15 (Point extrémal). Soient \mathcal{C} un convexe d'un \mathbb{R} -espace affine et $M \in \mathcal{C}$.

1. Montrer que M est extrémal si et seulement si $\mathcal{C} \setminus \{M\}$ est convexe.
2. Montrer que M est extrémal si et seulement si pour tout $A, B \in \mathcal{C}$, $M \notin]AB[$.

Exercice 4.16 (Existence d'un point extrémal, [3] p. 53). Soit \mathcal{C} un convexe d'un \mathbb{R} -espace affine de dimension finie. On suppose que \mathcal{C} ne contient pas de droite. Montrer que \mathcal{C} possède un point extrémal.

Exercice 4.17 (Théorème de Birkhoff–von Neumann, [3] sect. II.5). Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $M_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients (m_{ij}) vérifient $m_{ij} = 1$ si $j = \sigma(i)$ et $m_{ij} = 0$ sinon. Les $(M_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$ sont appelées *matrices de permutations*.

On appelle matrice *bi-stochastique* une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs telle que la somme des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne soit égale à 1.

1. Vérifier que les matrices de permutation sont bi-stochastiques.
2. Montrer que l'ensemble \mathcal{B} des matrices bi-stochastiques est un convexe.
3. Montrer que $\mathcal{B} = \text{Conv}(\{M_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\})$.

Remarque : une application de ce résultat est de démontrer le théorème de Schur sur les matrices symétriques, voir [3, p. 60].

4.4 Projection sur un convexe complet

Pour conclure ce chapitre sur la convexité, on s'intéresse au théorème de projection sur un convexe complet. On se place dans un \mathbb{R} -espace affine \mathcal{E} ambiant dont la direction est un espace de Hilbert. On ne suppose pas ici que \mathcal{E} est de dimension finie. On va voir que l'ajout d'une structure métrique permet d'obtenir des résultats supplémentaires sur les convexes.

Théorème 4.4.1. *Soit \mathcal{C} un convexe fermé non vide d'un \mathbb{R} -espace affine \mathcal{E} dont la direction est un espace de Hilbert $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Pour tout $A \in \mathcal{E}$, il existe un unique $p(A) \in \mathcal{C}$ tel que $d(A, p(A)) = d(A, \mathcal{C})$. De plus, pour tout $M \in \mathcal{C}$, $\langle \overrightarrow{p(A)A}, \overrightarrow{p(A)M} \rangle \leq 0$.*

Définition 4.4.2. Le point $p(A)$ est appelé *projeté* de A sur \mathcal{C} . L'application $p : A \mapsto p(A)$ est appelée *projection* sur \mathcal{C} .

- Remarques 4.4.3.**
1. La condition sur le produit scalaire est connue sous le nom de *condition de l'angle obtus*. Cette condition assure que, si $A \neq p(A)$, l'hyperplan orthogonal à $\overrightarrow{Ap(A)}$ et passant par $p(A)$ sépare A de \mathcal{C} .
 2. On va présenter une démonstration valable dans un espace de dimension infinie qui utilise la complétude. En dimension finie, on peut remplacer cet argument par un argument plus simple de compacité.
 3. En dimension finie, le théorème de Motzkin affirme que la réciproque est vraie : si \mathcal{C} est fermé et pour tout $A \in \mathcal{E}$ il existe un unique $p(A) \in \mathcal{C}$ tel que $d(A, p(A)) = d(A, \mathcal{C})$ alors \mathcal{C} est convexe.

Démonstration du théorème 4.4.1. On note $d := d(A, \mathcal{C})$. Commençons par prouver l'unicité du projeté. Soient B et $C \in \mathcal{C}$ tels que $\|\overrightarrow{AB}\| = d = \|\overrightarrow{AC}\|$. Soit M le milieu de $[BC]$. Comme A appartient à la médiatrice de $[BC]$, on a $d(A, B)^2 = d(A, M)^2 + d(B, M)^2$ par Pythagore. Or $M \in \mathcal{C}$, donc $d(A, M) \geq d = d(A, B)$. Donc $d(B, M) = 0$ et $B = M = C$.

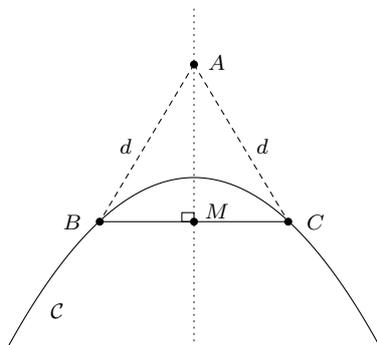


Figure 4.11 – Le projeté de A sur \mathcal{C} est unique.

Comme \mathcal{C} est fermé dans \mathcal{E} complet, \mathcal{C} est complet. Soit (M_n) une suite de points de \mathcal{C} tels que $d(A, M_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d(A, \mathcal{C})$. On va montrer que (M_n) est de Cauchy.

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et G le milieu de $[M_p, M_q]$, on a :

$$4 \|\overrightarrow{AG}\|^2 = 4 \left\| \frac{1}{2} \overrightarrow{AM_p} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AM_q} \right\|^2 = \|\overrightarrow{AM_p}\|^2 + \|\overrightarrow{AM_q}\|^2 + 2 \langle \overrightarrow{AM_p}, \overrightarrow{AM_q} \rangle,$$

puis,

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{M_p M_q}\|^2 &= \|\overrightarrow{AM_q} - \overrightarrow{AM_p}\|^2 = \|\overrightarrow{AM_p}\|^2 + \|\overrightarrow{AM_q}\|^2 - 2 \langle \overrightarrow{AM_p}, \overrightarrow{AM_q} \rangle \\ &= 2 \|\overrightarrow{AM_p}\|^2 + 2 \|\overrightarrow{AM_q}\|^2 - 4 \|\overrightarrow{AG}\|^2. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|\overrightarrow{AM_n}\| < d + \varepsilon$. Alors si $p, q \geq N$, comme $G \in \mathcal{C}$, on a $\|\overrightarrow{AG}\| \geq d$ et $\|\overrightarrow{M_p M_q}\|^2 \leq 4(d + \varepsilon)^2 - 4d^2 = 8\varepsilon d + 4\varepsilon^2$. Donc (M_n) est de Cauchy, donc converge dans \mathcal{C} vers un certain $p(A)$. On a $d(A, p(A)) = d$ par continuité de la norme.

Soit $M \in \mathcal{C}$, pour tout $t \in [0, 1]$, $p(A) + t\overrightarrow{p(A)M} = tM + (1-t)p(A) \in \mathcal{C}$ et donc

$$\|\overrightarrow{Ap(A)}\|^2 \leq \|\overrightarrow{Ap(A)} + t\overrightarrow{p(A)M}\|^2 = \|\overrightarrow{Ap(A)}\|^2 - 2t \langle \overrightarrow{p(A)A}, \overrightarrow{p(A)M} \rangle + t^2 \|\overrightarrow{p(A)M}\|^2.$$

Donc $\langle \overrightarrow{p(A)A}, \overrightarrow{p(A)M} \rangle \leq 0$. □

Pour finir, présentons une application de ce résultat.

Proposition 4.4.4. *Soient $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de H telle que $J(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf_H J$. On suppose de plus que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x \in H$, c'est-à-dire que $\forall y \in H$, $\langle x_n, y \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle x, y \rangle$. Alors J atteint un minimum global en x .*

Remarque 4.4.5. Cette proposition est l'étape finale dans un développement visant à démontrer l'existence d'un minimum global pour une fonction $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ continue, convexe et coercive, c'est-à-dire telle que $|f(x)| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$. Le début de l'argument consiste à prouver l'existence d'une suite minimisante (x_n) admettant une limite faible, sous l'hypothèse supplémentaire de coercivité. Voir par exemple [1, pp. 298–299] ou [8, pp. 176–178].

Démonstration. Soit $\alpha > \inf_H J$, on note $\mathcal{C}_\alpha := J^{-1}(]-\infty, \alpha])$. Comme J est convexe, \mathcal{C}_α est convexe. Comme J est continue, \mathcal{C}_α est fermé dans H donc complet.

On peut alors appliquer le théorème 4.4.1. On note $p(x)$ le projeté de x sur \mathcal{C}_α . Comme la suite (x_n) est minimisante, pour tout n assez grand, $x_n \in \mathcal{C}_\alpha$. La condition de l'angle obtus s'écrit alors :

$$\langle p(x) - x, p(x) \rangle - \langle p(x) - x, x_n \rangle = \langle p(x) - x, p(x) - x_n \rangle \leq 0.$$

En passant à la limite faible, on obtient :

$$\|p(x) - x\|^2 = \langle p(x) - x, p(x) \rangle - \langle p(x) - x, x \rangle \leq 0.$$

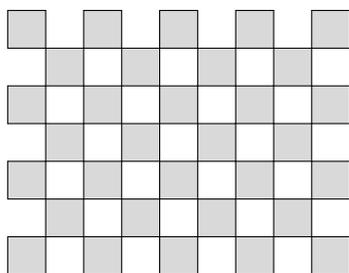
Donc $p(x) = x$ et $x \in \mathcal{C}_\alpha$. Donc, pour tout $\alpha > \inf_H J$, $J(x) \leq \alpha$. Donc $J(x) \leq \inf_H J$ et J atteint bien un minimum global en x . □

Chapitre 5

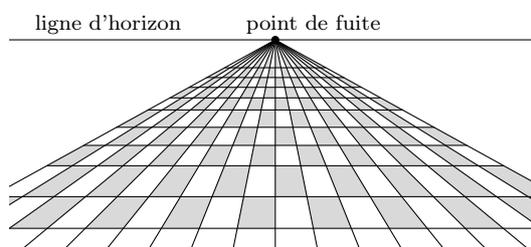
Géométrie projective

Nous allons maintenant aborder une géométrie sensiblement différente de la géométrie affine : la géométrie projective. Cette géométrie permet de parler d'alignement et d'incidence, mais plus de parallélisme, par exemple. Il existe une approche axiomatique de la géométrie projective, dans laquelle on stipule par exemple que deux droites distinctes du plan ont toujours un unique point d'intersection. Comme dans les chapitres précédents, nous allons plutôt présenter une approche qui s'appuie sur l'algèbre linéaire.

La géométrie projective apparaît naturellement dans certaines situations. Lorsqu'on observe des rails (ou une route) sur une portion rectiligne, les rails sont parallèles, et pourtant on les voit se rapprocher et finalement converger vers un même point sur la ligne d'horizon. On a envie de dire que ces droites parallèles se coupent en un point à l'infini. Ceci est utilisé pour dessiner des perspectives et donner une impression de profondeur dans un tableau, par exemple. C'est exactement ce que formalise la géométrie projective.



(a) Un pavage du plan par des carrés, vu de dessus.



(b) Ce que voit un observateur situé au-dessus du plan pavé et regardant vers l'horizon.

Figure 5.1 – La géométrie projective permet de formaliser le concept de point à l'infini, utilisé pour dessiner en perspective.

Autre piste de réflexion, notre œil ne perçoit pas les points d'un espace à trois dimensions mais seulement les rayons lumineux qui lui parviennent. Il ne détecte donc qu'une direction et pas une position (notre perception de la profondeur vient de l'utilisation simultanée des deux yeux et d'un gros travail inconscient de notre cerveau). En bref, on voit une carte affine dans l'espace projectif de dimension 2. D'ailleurs, quand on veut assembler plusieurs photos prises d'un même point pour en faire un panorama, les photos sont recollées par des homographies, c'est-à-dire des transformations projectives.

La géométrie projective ayant totalement disparu de la liste des leçons pour la session 2017, nous allons la traiter de façon très succincte. L'objectif est de donner une idée de ce que sont les homographies et le birapport et de faire le lien entre espaces affine et projectif.

Nos références pour ce chapitre sont [4, T. 1 chap. 4, 5 et 6], [10, chap. B], [18, chap. 1 et 2] et [19, chap. 1].

Dans tout ce chapitre, on ne considérera que des espaces (vectoriels, affines ou projectifs) de dimension finie.

5.1 Espaces projectifs

5.1.1 Définitions

Définition 5.1.1. Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n + 1$, où $n \in \mathbb{N}$. L'espace projectif associé est l'ensemble $\mathbb{P}(V)$ des droites vectorielles de V , vu comme l'ensemble des orbites pour l'action $\mathbb{K}^* \curvearrowright V \setminus \{0\}$ par homothéties.

Dans toute la suite, on note $\Pi : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ la projection canonique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ pour $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$.

Définitions 5.1.2. On définit la *dimension* de $\mathbb{P}(V)$ par $\dim(\mathbb{P}(V)) := \dim(V) - 1$. On dit que $\mathbb{P}(V)$ est un *point* (resp. une *droite*, resp. un *plan*) si sa dimension est 0 (resp. 1, resp. 2).

5.1.2 Sous-espaces

Définition 5.1.3. Soit $P \subset \mathbb{P}(V)$ non vide, on dit que P est un *sous-espace projectif* de $\mathbb{P}(V)$ si P est la projection d'un sous-espace vectoriel de V privé de 0, i.e. si $\Pi^{-1}(P) \cup \{0\}$ est un sous-espace vectoriel de V non réduit à $\{0\}$.

Un sous-espace projectif $\Pi(W) \subset \mathbb{P}(V)$ est un espace projectif de dimension $\dim(W) - 1$. On appelle *codimension* de $\Pi(W)$ dans $\mathbb{P}(V)$:

$$\text{codim}(\Pi(W)) := \dim(\mathbb{P}(V)) - \dim(\Pi(W)) = \dim(V) - \dim(W) = \text{codim}(W).$$

Si $\text{codim}(\Pi(W)) = 1$ on dit que $\Pi(W)$ est un *hyperplan projectif* de $\mathbb{P}(V)$.

Proposition 5.1.4. Une intersection de sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$ est un sous-espace projectif ou est vide.

Démonstration. Soient P_i des sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$ avec $P_i = \Pi(W_i)$, où les W_i sont des sous-espaces vectoriels de V non réduits à $\{0\}$. Alors

$$\bigcap P_i = \bigcap \Pi(W_i) = \Pi\left(\bigcap W_i\right).$$

Donc si cet ensemble est non vide, c'est la projection d'un sous-espace vectoriel de V non réduit à $\{0\}$. \square

Proposition 5.1.5. Soient P et Q deux sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$ tels que :

$$\dim(P) + \dim(Q) \geq \dim(\mathbb{P}(V)).$$

Alors $P \cap Q \neq \emptyset$.

Démonstration. On a $P := \Pi(E)$ et $Q := \Pi(F)$ où E et F sont des sous-espaces vectoriels de V . Alors,

$$\dim(E) + \dim(F) = \dim(P) + \dim(Q) + 2 \geq \dim(\mathbb{P}(V)) + 2 > \dim(V).$$

Donc $E \cap F$ est un sous-espace vectoriel de V non réduit à $\{0\}$ et $P \cap Q = \Pi(E \cap F)$. \square

Exemple 5.1.6. Deux droites d'un plan projectif s'intersectent toujours. De plus, si elles sont distinctes alors leur intersection est réduite à un point.

5.1.3 Familles libres et génératrices

Définition 5.1.7. Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(V)$ non vide, on appelle *sous-espace projectif engendré* par \mathcal{A} l'intersection de tous les sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$ contenant \mathcal{A} . On le note $\langle \mathcal{A} \rangle$.

Le sous-espace $\langle \mathcal{A} \rangle$ est le plus petit sous-espace projectif de $\mathbb{P}(V)$ contenant \mathcal{A} . De plus,

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \Pi(\text{Vect}(\Pi^{-1}(\mathcal{A}))).$$

Exemple 5.1.8. Soient A et $B \in \mathbb{P}(V)$ distincts, $\langle \{A, B\} \rangle$ est une droite projective. On la note (AB) . Si $C \in (AB)$ on dit que A, B et C sont *alignés*.

Définitions 5.1.9. • Une partie $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(V)$ non vide est dite *projectivement génératrice* si $\langle \mathcal{A} \rangle = \mathbb{P}(V)$.

- Soient $A_0, \dots, A_k \in \mathbb{P}(V)$, la famille (A_0, \dots, A_k) est dite *projectivement libre* si $\langle \{A_i \mid i \in \llbracket 0, k \rrbracket\} \rangle$ est de dimension k . Sinon la famille est dite *projectivement liée*.

Exemple 5.1.10. Soit (e_0, \dots, e_n) une base de V , on note $A_i := \mathbb{K}e_i \in \mathbb{P}(V)$. La famille (A_0, \dots, A_n) est projectivement libre et génératrice dans $\mathbb{P}(V)$.

Remarque 5.1.11. Une famille libre et génératrice n'est pas ce que l'on veut appeler un repère projectif. Ceci sera développé dans la section 5.2.3.

5.1.4 Exercices

Exercice 5.1. Soit H un hyperplan de $\mathbb{P}(V)$ et $M \in \mathbb{P}(V) \setminus H$, montrer que toute droite passant par M coupe H en un unique point.

Exercice 5.2. Montrer que 3 points non alignés de $\mathbb{P}(V)$ définissent un unique plan projectif.

Exercice 5.3. Soient P et Q deux sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$. Montrer que

$$\langle P \cup Q \rangle = \Pi((\Pi^{-1}(P) \cup \{0\}) + (\Pi^{-1}(Q) \cup \{0\})).$$

Donner la dimension de $\langle P \cup Q \rangle$ en fonction des dimensions de P, Q et $P \cap Q$.

Exercice 5.4 (Dénombrement). Soit \mathbb{K} un corps de cardinal q . Quel est le cardinal de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$? Combien y a-t-il de sous-espaces projectifs de dimension k dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$?

Exercice 5.5 (Dobble, cf. article de M. Bourrigan sur Images des Maths). En utilisant le plan projectif sur \mathbb{F}_7 , expliquer comment, à partir de 57 symboles différents, on peut créer 57 cartes, chacune avec 8 symboles dessus, de telle sorte que deux cartes distinctes ont toujours un et un seul symbole en commun. Réfléchir à des applications ludiques!

Exercice 5.6. Vérifier que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Exercice 5.7 (Topologie des espaces projectifs). Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$) muni de sa topologie quotient est compact.

Remarque. Le point pénible est de montrer qu'il est séparé. En fait c'est une variété lisse compacte sans bord de dimension n (resp. $2n$). Cela permet de parler de tangence dans ces espaces.

Exercice 5.8. Montrer que \mathcal{A} engendre $\mathbb{P}(V)$ si et seulement si $\text{Vect}(\Pi^{-1}(\mathcal{A})) = V$.

Exercice 5.9. Soient $(A_1, \dots, A_k) \in \mathbb{P}(V)$. Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, soit $x_i \in \Pi^{-1}(A_i)$. Montrer que (A_1, \dots, A_k) est projectivement libre si et seulement si (x_1, \dots, x_k) est libre dans V .

Exercice 5.10. Soit $\mathbb{P}(V)$ un espace projectif de dimension $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'une famille génératrice de $\mathbb{P}(V)$ est de cardinal au moins $n + 1$.
2. Montrer qu'une famille libre de $\mathbb{P}(V)$ est de cardinal au plus $n + 1$.
3. Montrer qu'une famille génératrice de cardinal $n + 1$ est libre.
4. Montrer qu'une famille libre de cardinal $n + 1$ est génératrice.

Exercice 5.11 (Le plan de Fano). Identifier le plan projectif sur \mathbb{F}_2 à la figure 5.2.

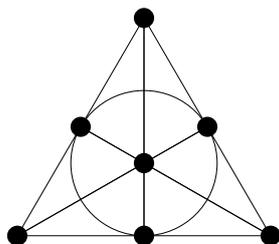


Figure 5.2 – Le plan de Fano.

5.2 Homographies

Dans cette section, on s'intéresse aux homographies, qui sont les morphismes d'espaces projectifs. Pour cela, on va prendre des applications linéaires et les passer au quotient pour en faire des applications entre espaces projectifs. Il y a une subtilité cependant, pour que ce procédé fonctionne il faut considérer des applications linéaires injectives.

5.2.1 Définitions

Soient V et W deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions supérieures ou égales à 1, on note $\Pi_V : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ et de même $\Pi_W : W \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(W)$. Soit $f : V \rightarrow W$ linéaire. Si f est injective, alors $f(V \setminus \{0\}) \subset W \setminus \{0\}$ et $\Pi_W \circ f$ est bien définie sur $V \setminus \{0\}$. De plus, soient $x \in V \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors

$$\Pi_W(f(\lambda x)) = \Pi_W(\lambda f(x)) = \Pi_W(f(x)).$$

Donc $\Pi_W \circ f$ passe au quotient et définit $\bar{f} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} V \setminus \{0\} & \xrightarrow{f} & W \setminus \{0\} \\ \Pi_V \downarrow & & \downarrow \Pi_W \\ \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{P}(W) \end{array} \quad (5.1)$$

Définition 5.2.1. Soit $f : V \rightarrow W$ une application linéaire injective entre \mathbb{K} -espaces vectoriels non réduits à $\{0\}$, alors l'application induite $\bar{f} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ est appelée *homographie*.

Remarque 5.2.2. Une homographie est nécessairement injective. De plus, \bar{f} est surjective si et seulement si f l'est. En particulier, les homographies de $\mathbb{P}(V)$ dans lui-même sont bijectives.

Proposition 5.2.3. Soient $\bar{f} : \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ et $\bar{g} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ deux homographies, alors $\bar{g} \circ \bar{f} = \overline{g \circ f}$ est une homographie de $\mathbb{P}(U)$ dans $\mathbb{P}(W)$. Si de plus \bar{f} est inversible, alors $(\bar{f})^{-1} = \overline{f^{-1}}$ est une homographie.

Démonstration. Si f et g sont linéaires injectives, alors $g \circ f$ aussi. Donc $\overline{g \circ f}$ est bien définie et on vérifie que $\bar{g} \circ \bar{f} = \overline{g \circ f}$.

Si \bar{f} est bijective, alors f l'est aussi (voir remarque 5.2.2) et par le premier point $\bar{f} \circ \overline{f^{-1}} = \text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$. De même $\overline{f^{-1}} \circ \bar{f} = \text{Id}_{\mathbb{P}(U)}$, donc $\overline{f^{-1}} = (\bar{f})^{-1}$ et ceci est bien une homographie. \square

Définition 5.2.4. Soit $\mathbb{P}(V)$ un espace projectif, l'ensemble des homographies de $\mathbb{P}(V)$ dans lui-même est un groupe pour la composition. Ce groupe est appelé *groupe projectif* ou *groupe des homographies*. On le note $PGL(V)$, lorsque $V = \mathbb{K}^{n+1}$ on le note $PGL_{n+1}(\mathbb{K})$.

Remarque 5.2.5. Attention, $PGL_{n+1}(\mathbb{K})$ est le groupe des homographies de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

5.2.2 Action sur les sous-espaces

Maintenant qu'on a défini les morphismes d'espaces projectifs, il s'agit de vérifier qu'ils se comportent bien. Comme dans le cas affine, on veut surtout que les homographies préservent l'alignement.

Proposition 5.2.6. Soient $\bar{f} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ une homographie, P un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(V)$ et Q un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(W)$. Alors $\bar{f}(P)$ est un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(W)$ et $(\bar{f})^{-1}(Q)$ est un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(V)$. De plus $\dim(P) = \dim(\bar{f}(P))$.

Démonstration. Soient E un sous-espace vectoriel de V tel que $\Pi_V(E \setminus \{0\}) = P$ et F un sous-espace vectoriel de W tel que $\Pi_W(F \setminus \{0\}) = Q$. En utilisant la commutativité du diagramme (5.1),

$$\bar{f}(P) = \bar{f}(\Pi_V(E \setminus \{0\})) = \Pi_W(f(E \setminus \{0\})) = \Pi_W(f(E) \setminus \{0\}).$$

De plus, comme f est injective on a $\dim(E) = \dim(f(E))$. D'où $\dim(P) = \dim(\bar{f}(P))$. De même,

$$(\Pi_V)^{-1}((\bar{f})^{-1}(Q)) = f^{-1}((\Pi_W)^{-1}(Q)) = f^{-1}(F \setminus \{0\}) = f^{-1}(F) \setminus \{0\}.$$

Donc $(\bar{f})^{-1}(Q) = \Pi_V(f^{-1}(F) \setminus \{0\})$. \square

Corollaire 5.2.7. Les homographies préservent l'alignement.

Comme dans le cas affine, on a une réciproque partielle. Le résultat suivant permet par exemple de prouver que tout automorphisme de $SO_3(\mathbb{R})$ est intérieur¹ (voir [15, chap. 6 thm. 8.1]). La preuve est trop longue pour être reproduite ici, on peut la trouver dans [18, thm. 7 p. 32].

Théorème 5.2.8 (Théorème fondamental de la géométrie projective). Soient $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}(W)$ deux espaces projectifs réels de même dimension $n \geq 2$. Soit $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ une bijection préservant l'alignement, alors f est une homographie.

1. Merci à Simon Allais de m'avoir signalé cette application

5.2.3 Repères projectifs

Soit $\mathbb{P}(V)$ un \mathbb{K} -espace projectif de dimension 1. Soient $A_0, A_1 \in \mathbb{P}(V)$ distincts, alors (A_0, A_1) est libre et génératrice. Soient $e_0 \in \Pi_V^{-1}(A_0)$ et $e_1 \in \Pi_V^{-1}(A_1)$, alors (e_0, e_1) est une base de V , par exemple parce qu'elle est libre et $\dim(V) = 2$.

De même, soient B_0 et $B_1 \in \mathbb{P}(W)$ distincts et soient f_0 et $f_1 \in W \setminus \{0\}$ des relevés de B_0 et B_1 respectivement. Alors (f_0, f_1) est une base de W . Soient h et h' linéaires de V dans W telles que :

$$\begin{cases} h(e_0) = f_0, \\ h(e_1) = f_1, \end{cases} \quad \begin{cases} h'(e_0) = f_0, \\ h'(e_1) = \lambda f_1, \end{cases} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{K}^*.$$

Les homographies induites \bar{h} et \bar{h}' envoient toutes les deux A_0 sur B_0 et A_1 sur B_1 . Cependant, notons $A_2 := \Pi_V(e_0 + e_1)$, alors $\bar{h}(A_2) = \Pi_W(h(e_0 + e_1)) = \Pi_W(f_0 + f_1)$ et $\bar{h}'(A_2) = \Pi_W(f_0 + \lambda f_1)$. Si \mathbb{K} a au moins trois éléments, on peut choisir $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$. Comme $f_0 + f_1$ et $f_0 + \lambda f_1$ ne sont pas colinéaires, $\bar{h}(A_2) \neq \bar{h}'(A_2)$. Il ne suffit donc pas de définir une homographie sur une famille projectivement libre et génératrice pour la définir totalement. C'est pour cela qu'une telle famille n'est pas appelée "repère projectif".

Remarque 5.2.9. Sur \mathbb{F}_2 , le groupe des homothétie de V est trivial et l'image d'une famille libre et génératrice suffit à déterminer une homographie.

Proposition 5.2.10. Soient $\mathbb{P}(V)$ de dimension n et $A_0, \dots, A_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$, les propositions suivantes sont équivalentes.

1. Toute sous-famille à $n + 1$ éléments de (A_0, \dots, A_{n+1}) est projectivement libre et génératrice.
2. Soient $e_0, \dots, e_{n+1} \in V \setminus \{0\}$ tels que pour tout $i \in \llbracket 0, n + 1 \rrbracket$, $\Pi(e_i) = A_i$ alors (e_0, \dots, e_n) est base de V et il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}^*$ tels que $e_{n+1} = \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i$.
3. Il existe $e_0, \dots, e_{n+1} \in V \setminus \{0\}$ tels que pour tout $i \in \llbracket 0, n + 1 \rrbracket$, $\Pi(e_i) = A_i$, (e_0, \dots, e_n) est une base de V et $e_{n+1} = \sum_{i=0}^n e_i$.

Démonstration. Supposons 1, soient $e_0, \dots, e_{n+1} \in V \setminus \{0\}$ tels que pour tout $i \in \llbracket 0, n + 1 \rrbracket$, $\Pi(e_i) = A_i$. Comme (A_0, \dots, A_n) est génératrice de $\mathbb{P}(V)$, alors (e_0, \dots, e_n) est génératrice de V et donc c'est une base. On a alors $e_{n+1} = \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i$ avec $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Si $\lambda_j = 0$ alors $e_{n+1} \in \text{Vect}(\{e_i \mid i \in \llbracket 0, n \rrbracket, i \neq j\})$ et donc la famille $(A_i)_{i \neq j}$ est contenue dans un sous-espace projectif strict de $\mathbb{P}(V)$. En particulier elle est liée, contradiction. Donc 1 implique 2.

Si (e_0, \dots, e_{n+1}) satisfait 2, posons $e'_i := \lambda_i e_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $e'_{n+1} := e_{n+1}$. Alors (e'_0, \dots, e'_n) est une base de V et $e'_{n+1} = \sum_{i=0}^n e'_i$. Donc 3 est vérifié.

Enfin si 3 est vrai, alors pour tout $I \subset \llbracket 0, n + 1 \rrbracket$ de cardinal $n + 1$, $(e_i)_{i \in I}$ est une base de V . Donc pour tout $I \subset \llbracket 0, n + 1 \rrbracket$ de cardinal $n + 1$, $(A_i)_{i \in I}$ engendre $\mathbb{P}(V)$ et est donc libre. Donc la condition 1 est vérifiée. \square

Définition 5.2.11. Soit $\mathbb{P}(V)$ un espace projectif de dimension n et (A_0, \dots, A_{n+1}) vérifiant les conditions de la proposition 5.2.10, on dit que (A_0, \dots, A_{n+1}) est un *repère projectif* de $\mathbb{P}(V)$.

Exemple 5.2.12. En dimension 1, trois points distincts forment un repère projectif. En dimension 2, quatre points dont trois quelconques ne sont jamais alignés forment un repère projectif.

Remarque 5.2.13. Le point 3 de la proposition 5.2.10 montre que tout espace projectif de dimension finie admet un repère.

Proposition 5.2.14. Soient $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}(W)$ deux espaces projectifs de dimension n . Soient (A_0, \dots, A_{n+1}) et (B_0, \dots, B_{n+1}) des repères projectifs de $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}(W)$ respectivement, alors il existe une unique homographie $\phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ telle que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\phi(A_i) = B_i$.

Démonstration. Soient $e_0, \dots, e_{n+1} \in V \setminus \{0\}$ vérifiant la condition 3 de la prop. 5.2.10 pour $(A_i)_{i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket}$ et $f_0, \dots, f_{n+1} \in W \setminus \{0\}$ vérifiant cette condition pour $(B_i)_{i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket}$. Soit $h : V \rightarrow W$ linéaire telle que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $h(e_i) = f_i$. Comme (e_0, \dots, e_n) et (f_0, \dots, f_n) sont des bases, cela définit bien une injection linéaire. De plus,

$$h(e_{n+1}) = h\left(\sum_{i=0}^n e_i\right) = \sum_{i=0}^n f_i = f_{n+1}.$$

Donc pour tout $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $\bar{h}(A_i) = B_i$.

Montrons que h est unique à homothétie près, ce qui prouvera que \bar{h} est unique. Soit $h' : V \rightarrow W$ une injection linéaire telle que $\bar{h}'(A_i) = B_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$. Pour tout $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}^*$ tel que $h'(e_i) = \lambda_i f_i$. Or,

$$\lambda_{n+1} \sum_{i=0}^n f_i = \lambda_{n+1} f_{n+1} = h'(e_{n+1}) = \sum_{i=0}^n h'(e_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i.$$

Comme (f_0, \dots, f_n) est une base de W , on a $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n+1}$. Donc $h' = \lambda h$, où $\lambda \in \mathbb{K}^*$ est la valeur commune des λ_i . Donc $\bar{h}' = \bar{h}$. \square

5.2.4 Exercices

Exercice 5.12. Soient f et g deux applications linéaires injectives de V dans W . Montrer que $\bar{f} = \bar{g}$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $f = \lambda g = g(\lambda \cdot)$.

Exercice 5.13 (Un grand classique de prépa révisité). Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel, quels sont les $f \in GL(V)$ tels que $\bar{f} = \text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$. Montrer qu'on a une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \mathbb{K}^* \longrightarrow GL(V) \longrightarrow PGL(V) \longrightarrow 1.$$

En déduire que $PGL(V) \simeq GL(V)/\mathbb{K}^*$. La suite exacte courte ci-dessus est-elle scindée ?

Exercice 5.14 ([2] p. 207). Soit $f \in PGL(V)$ une homographie. Montrer que si $K = \mathbb{R}$ et $\dim(\mathbb{P}(V))$ est paire ou si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors f a un point fixe. Trouver $f \in PGL_2(\mathbb{R})$ sans point fixe.

Exercice 5.15 ([2] p. 207). Soient f et g deux homographies d'une droite projective ayant chacune deux points fixes. Montrer que f et g commutent si et seulement si elles ont les mêmes points fixes.

Exercice 5.16 (Perspectives, [2] p. 208). Soient \mathcal{H} et \mathcal{H}' deux hyperplans projectifs de $\mathbb{P}(V)$ et $A \notin \mathcal{H} \cup \mathcal{H}'$. Soit p_A l'application $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ qui à M associe l'intersection de (AM) avec \mathcal{H}' . Montrer que p_A est une homographie de \mathcal{H} sur \mathcal{H}' .

Exercice 5.17 (Le théorème des trois perspectives). Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et \mathcal{D}_3 trois droites d'un plan projectif qui concourent en O . Soient A, B et C trois points distincts tels que $A \notin \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3$, $B \notin \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_3$ et $C \notin \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. On considère les perspectives (voir exercice 5.16) $p_A : \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathcal{D}_3$, $p_B : \mathcal{D}_3 \rightarrow \mathcal{D}_2$ et $p_C : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ de centres respectifs A, B et C . Montrer que si $p_C \circ p_B \circ p_A = \text{Id}_{\mathcal{D}_2}$ alors A, B et C sont alignés.

Exercice 5.18 (Isomorphismes exceptionnels, [15] p. 106). Démontrer les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} GL_2(\mathbb{F}_2) = PGL_2(\mathbb{F}_2) = PSL_2(\mathbb{F}_2) &\simeq \mathfrak{S}(3) & PGL_2(\mathbb{F}_4) = PSL_2(\mathbb{F}_4) &\simeq \mathfrak{A}(5) \\ PGL_2(\mathbb{F}_3) &\simeq \mathfrak{S}(4) & PSL_2(\mathbb{F}_3) &\simeq \mathfrak{A}(4). \end{aligned}$$

Exercice 5.19. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , montrer que les homographies sont des applications lisses. *Remarque.* En particulier, les homographies préservent les tangences.

Exercice 5.20. Montrer que l'image d'un repère projectif par une homographie est un repère projectif de l'image.

Exercice 5.21 (Action du groupe des homographies). Soit $\mathbb{P}(V)$ un \mathbb{K} -espace projectif de dimension finie.

1. Montrer que l'action $PGL(V) \curvearrowright \mathbb{P}(V)$ est 2-transitive. Trouver une obstruction à sa 3-transitivité.
2. Trouver un invariant total pour l'action de $PGL(V)$ sur les sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$.
3. Montrer que $PGL(V)$ agit simplement transitivement sur les repères projectifs de $\mathbb{P}(V)$.

Exercice 5.22 (Plus de dénombrement). Soit \mathbb{K} un corps de cardinal q . Combien y a-t-il de repères projectifs dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$? Quel est le cardinal de $PGL_{n+1}(\mathbb{K})$?

5.3 Birapport

D'après la proposition 5.2.14, l'action de $PGL(V)$ sur les repères projectifs de $\mathbb{P}(V)$ est simplement transitive. Dans le cas où $\dim(\mathbb{P}(V)) = 1$, un repère est simplement un triplet de points distincts. L'action des homographies sur une droite projective est donc 3-transitive. Le birapport est un invariant total pour l'action des homographies sur les quadruplets des points distincts d'une droite projective. En particulier, c'est l'obstruction à la 4-transitivité de $PGL(V) \curvearrowright \mathbb{P}(V)$ lorsque $\dim(\mathbb{P}(V)) = 1$.

En dimension supérieure, on peut parler du birapport de quatre points distincts alignés. Le birapport est alors un invariant total pour l'action de $PGL(V)$ sur les quadruplets de points distincts alignés.

Au sujet du birapport, on peut se référer à [2, sect. VI.6], [4, T. 1 chap. 6], [18, chap. 2] ou encore [19, sect. 1.5].

5.3.1 Définition

Dans la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ on définit trois points privilégiés, notés respectivement 0, 1 et ∞ , par :

$$0 := \Pi(0, 1), \quad 1 := \Pi(1, 1) \quad \text{et} \quad \infty := \Pi(1, 0).$$

Définition 5.3.1. Soit \mathcal{D} une droite projective sur \mathbb{K} . Soient A, B, C et $D \in \mathcal{D}$ tels que A, B et C sont distincts. Alors (A, B, C) est un repère projectif de \mathcal{D} et il existe une unique homographie $h : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ telle que : $h(A) = \infty$, $h(B) = 0$ et $h(C) = 1$. On appelle *birapport* de A, B, C et D l'image de D par h . On le note $[A, B, C, D] := h(D)$.

Exemple 5.3.2. On a $[A, B, C, A] = \infty$, $[A, B, C, B] = 0$ et $[A, B, C, C] = 1$.

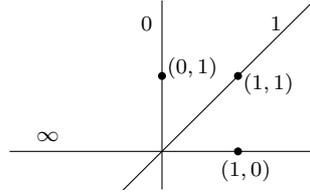


Figure 5.3 – Les trois points privilégiés de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.

Remarques 5.3.3. • On peut parler du birapport d’un quadruplet de points alignés d’un \mathbb{K} -espace projectif dès que les trois premiers sont distincts

- Le birapport $[A, B, C, D]$ dépend du quadruplet (A, B, C, D) , pas seulement de l’ensemble $\{A, B, C, D\}$. L’ordre des points est important.
- L’application $h := [A, B, C, \cdot]$ est une homographie de \mathcal{D} sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.

5.3.2 Birapport et homographies

Proposition 5.3.4. Soient A, B, C et $D \in \mathbb{P}(V)$ alignés avec A, B et C distincts, soit $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ une homographie, alors : $[f(A), f(B), f(C), f(D)] = [A, B, C, D]$.

Démonstration. Les homographies préservent l’alignement et sont injectives, donc $f(A), f(B), f(C)$ et $f(D)$ sont alignés et $f(A), f(B)$ et $f(C)$ sont distincts. Donc le birapport $[f(A), f(B), f(C), f(D)]$ est bien défini.

Soit $\mathcal{D} := (AB)$ et $h : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ l’unique homographie telle que $h(A) = \infty, h(B) = 0$ et $h(C) = 1$. Soit $\mathcal{D}' := f(\mathcal{D})$, alors $f|_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ est une homographie bijective. Notons $h' := h \circ (f|_{\mathcal{D}})^{-1}$, alors h' est l’unique homographie de \mathcal{D}' dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ telle que :

$$\begin{cases} h'(f(A)) = h(A) = \infty, \\ h'(f(B)) = h(B) = 0, \\ h'(f(C)) = h(C) = 1. \end{cases}$$

Donc $[f(A), f(B), f(C), f(D)] = h'(f(D)) = h(D) = [A, B, C, D]$. \square

Ainsi les homographies préservent l’alignement et le birapport. Il se trouve qu’inversement, les injections préservant l’alignement et le birapport sont des homographies. Contrairement au théorème fondamental (thm. 5.2.8), ce résultat est valable sur n’importe quel corps et en toute dimension finie.

Théorème 5.3.5. Soit $\phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ une application injective entre espaces projectifs de dimensions finies. Si ϕ préserve l’alignement et le birapport, alors c’est une homographie.

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension n de $\mathbb{P}(V)$. Si $n = 0$, il n’y a rien à montrer.

Le cas $n = 1$ est le seul utilisant l’hypothèse sur le birapport. Si $n = 1$, $\mathbb{P}(V)$ est une droite, et son image est donc contenue dans une droite \mathcal{D} de $\mathbb{P}(W)$. Soient A, B et $C \in \mathbb{P}(V)$ distincts, alors $\phi(A), \phi(B)$ et $\phi(C)$ sont distincts. Soit $h : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ définie par $h := [A, B, C, \cdot]$ et $h' : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ définie par $h' := [\phi(A), \phi(B), \phi(C), \cdot]$. Comme ϕ préserve le birapport, pour tout $D \in \mathbb{P}(V)$ on a $h'(\phi(A)) = h(A)$, c’est-à-dire que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{D} \\ & \searrow h & \swarrow h' \\ & & \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \end{array}$$

Or $h' : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ est une bijection, donc $\phi = (h')^{-1} \circ h$ est bien une homographie.

Soit $n \geq 2$, supposons le résultat établi en dimension $n - 1$ et considérons $\mathbb{P}(V)$ de dimension n . La première étape est de montrer que $\phi(\mathbb{P}(V))$ est contenu dans un sous-espace $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}(W)$ de dimension n et que ϕ envoie un repère de $\mathbb{P}(V)$ sur un repère de \mathcal{P} .

Soit $(A_i)_{i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket}$ un repère de $\mathbb{P}(V)$. La famille $(A_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est libre et génératrice, donc $(A_i)_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ est libre également, et $\mathcal{H} := \langle \{A_i \mid i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\} \rangle$ est un hyperplan de $\mathbb{P}(V)$ ne contenant pas A_n . Par hypothèse de récurrence, $\phi_{/\mathcal{H}}$ est une homographie, donc $\phi(\mathcal{H})$ est un sous-espace de $\mathbb{P}(W)$ de dimension $n - 1$.

Par injectivité de ϕ , comme $A_n \notin \mathcal{H}$ on a $\phi(A_n) \notin \phi(\mathcal{H})$. Notons $\mathcal{P} := \langle \{\phi(A_n)\} \cup \phi(\mathcal{H}) \rangle$. Soit $M \in \mathbb{P}(V)$, la droite (MA_n) coupe \mathcal{H} en un unique point N . Comme $M \in (NA_n)$, on a $\phi(M) \in (\phi(N)\phi(A_n))$ et donc $\phi(M) \in \mathcal{P}$. Finalement $\phi(\mathbb{P}(V)) \subset \mathcal{P}$.

Comme $\phi_{/\mathcal{H}}$ est une homographie et $\mathcal{H} = \langle \{A_i \mid i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\} \rangle$, $\phi(\mathcal{H})$ est engendré par $(\phi(A_i))_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$. Donc la famille $(\phi(A_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ engendre \mathcal{P} , et elle est également libre car $\dim(\mathcal{P}) = n$. De même, toute sous-famille à $n + 1$ éléments de $(\phi(A_i))_{i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket}$ est libre et génératrice de \mathcal{P} . Donc $(\phi(A_i))_{i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket}$ est un repère projectif de \mathcal{P} .

Notons $\psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ l'unique homographie telle que, pour tout $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $\psi(\phi(A_i)) = A_i$, alors ψ est inversible. Si on montre que $\psi \circ \phi = \text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$, on aura $\phi = \psi^{-1}$, ce qui conclura la récurrence.

Soit B l'unique point de $(A_n A_{n+1}) \cap \mathcal{H}$. Si (A_0, \dots, A_{n-1}, B) n'était pas un repère de \mathcal{H} , quitte à réindexer on pourrait supposer que la famille (A_1, \dots, A_{n-1}, B) est liée. Mais alors $\langle \{A_1, \dots, A_{n+1}\} \rangle = \langle \{A_1, \dots, A_n, B\} \rangle = \langle \{A_1, \dots, A_{n-1}, B\} \cup \{A_n\} \rangle$ serait de dimension au plus $n - 1$, ce qui contredirait le fait que $(A_i)_{i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket}$ est un repère de $\mathbb{P}(V)$.

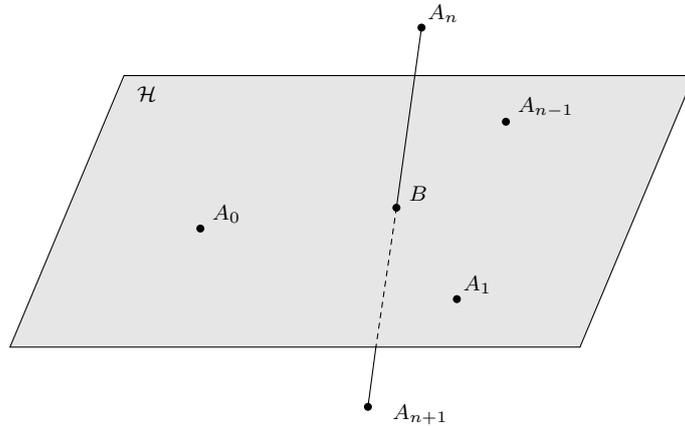


Figure 5.4 – B est l'unique point de $\mathcal{H} \cap (A_n A_{n+1})$.

D'une part, $\psi \circ \phi_{/\mathcal{H}}$ est une homographie et son image contient A_0, \dots, A_{n-1} . Son image est donc \mathcal{H} , d'après la prop. 5.2.6. Donc $\psi \circ \phi_{/\mathcal{H}}$ est une homographie de \mathcal{H} . D'autre part, $\psi \circ \phi$ stabilise $(A_n A_{n+1})$ et \mathcal{H} , donc $\psi(\phi(B)) = B$. Donc $\psi \circ \phi_{/\mathcal{H}}$ fixe point par point un repère projectif de \mathcal{H} et c'est l'identité de \mathcal{H} par la proposition 5.2.14.

Soit $M \in \mathbb{P}(V) \setminus (A_n A_{n+1})$, notons N l'unique point de $(MA_n) \cap \mathcal{H}$. Alors $M \in (NA_n)$ et donc $\psi(\phi(M)) \in (NA_n) = (MA_n)$ car $\psi \circ \phi$ préserve l'alignement et fixe N et A_n . Donc $\psi(\phi(M)) \in (MA_n)$ et de même $\psi(\phi(M)) \in (MA_{n+1})$. Comme $M \notin (A_n A_{n+1})$, les droites (MA_n) et (MA_{n+1}) sont distinctes et donc ne s'intersectent qu'en M . D'où $\psi(\phi(M)) = M$.

Pour conclure, soit $M \in (A_n A_{n+1}) \setminus \{B\}$, montrons que $\psi(\phi(M)) = M$. Comme $n \geq 2$, on a $\dim(\mathcal{H}) > 0$ et il existe donc $N \in \mathcal{H} \setminus \{B\}$. La droite projective (MN) est de cardinal au moins 3, soit donc $N' \in (MN)$ distinct de M et N . Si $N' \in (A_n A_{n+1})$, alors

$N \in (MN') = (A_n A_{n+1})$ ce qui est absurde. Donc N et $N' \in \mathbb{P}(V) \setminus (A_n A_{n+1})$ et ils sont fixés par $\psi \circ \phi$. Ainsi, M est le point d'intersection de (NN') et $(A_n A_{n+1})$ et ces deux droites sont fixées par $\psi \circ \phi$. d'où $\psi(\phi(M)) = M$.

Finalement, on a bien $\psi \circ \phi = \text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$, et $\phi = \psi^{-1}$ est une homographie. \square

5.3.3 Exercices

Exercice 5.23. Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites projectives sur \mathbb{K} , soient A, B, C et $D \in \mathcal{D}$ et A', B', C' et $D' \in \mathcal{D}'$ tels que A, B et C sont distincts et A', B' et C' sont distincts. Montrer qu'il existe une unique homographie $h : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ telle que $h(A) = A'$, $h(B) = B'$, $h(C) = C'$ et $h(D) = D'$ si et seulement si $[A, B, C, D] = [A', B', C', D']$.

Exercice 5.24. Montrer que le birapport est un invariant total pour l'action de $PGL(V)$ sur l'ensemble des quadruplets de points distincts alignés de $\mathbb{P}(V)$.

Exercice 5.25 (Égalités de birapports, [10] p. 76). Soient A, B, C, C', D et D' six points distincts d'une droite projective. Montrer que $[A, B, C, C'] = [A, B, D, D']$ si et seulement si $[A, B, C, D] = [A, B, C', D']$.

Exercice 5.26 ([2] p. 210). Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites distinctes d'un plan projectif qui se coupent en A . Soient $B, C, D \in \mathcal{D}$ distincts et $B', C', D' \in \mathcal{D}'$ distincts. Montrer que (BB') , (CC') et (DD') sont concourantes si et seulement si $[A, B, C, D] = [A, B', C', D']$.

Exercice 5.27 (Involutions, [10] p. 76). Soit \mathcal{D} une droite projective, et h une homographie de \mathcal{D} différente de Id . On note -1 pour $\Pi(-1, 1) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $h^2 = \text{Id}$ si et seulement si il existe $M \in \mathcal{D}$ tel que $h(M) \neq M$ et $h^2(M) = M$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
 - (a) h est une involution et a un point fixe.
 - (b) h est une involution et a exactement deux points fixes.
 - (c) h a exactement deux points fixes A et B et il existe $M \in \mathcal{D} \setminus \{A, B\}$ tel que $[A, B, M, h(M)] = -1$.
 - (d) h a exactement deux points fixes A et B et pour tout $M \in \mathcal{D} \setminus \{A, B\}$ on a $[A, B, M, h(M)] = -1$.

5.4 Lien affine–projectif

Jusqu'à présent, nous avons évoqué les espaces projectifs indépendamment de la géométrie affine. Comme évoqué dans l'introduction de ce chapitre, on peut voir un espace projectif comme un espace affine auquel on a ajouté des points à l'infini. Cette formulation est trompeuse car l'espace affine en question n'est pas unique, et les "points à l'infini" en dépendent fortement. Dans cette section, on va expliciter le lien entre les géométries affine et projective.

5.4.1 Cartes affines

Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n + 1$ (avec $n \in \mathbb{N}$), on va montrer que $\mathbb{P}(V)$ peut naturellement s'écrire comme l'union disjointe d'un hyperplan projectif et d'un \mathbb{K} -espace affine de dimension n .

Soit $\varphi \in V^* \setminus \{0\}$, on note $E := \ker(\varphi)$ et $\mathcal{E} := \varphi^{-1}(1)$. Comme on l'a vu (exemple 2.1.8), \mathcal{E} est un espace affine de direction E pour l'action induite par l'addition de V . Notons $\mathcal{H} := \Pi(E)$ et $U := \mathbb{P}(V) \setminus \mathcal{H} = \Pi(V \setminus E)$, où $\Pi : V \rightarrow \mathbb{P}(V)$ est la projection canonique.

Toute droite vectorielle de V non contenue dans E intersecte \mathcal{E} en un unique point. Donc $\Pi_{/\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow U$ est une bijection. On peut alors munir U d'une structure d'espace affine de direction E par transfert de structure via $\Pi_{/\mathcal{E}} : \text{pour tout } v \in E \text{ et tout } A \in U, A + v := \Pi_{/\mathcal{E}}((\Pi_{/\mathcal{E}})^{-1}(A) + v).$

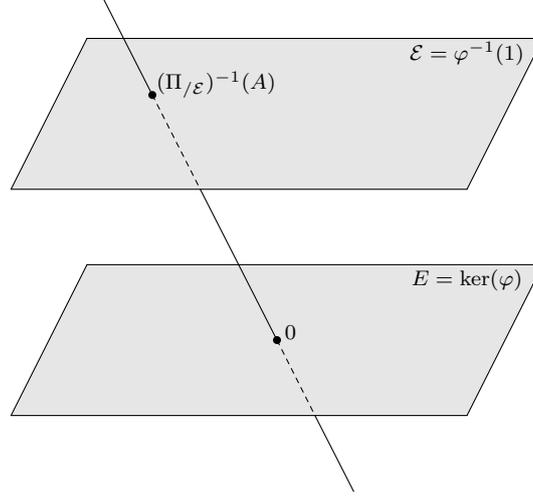


Figure 5.5 – La projection canonique se restreint en une bijection de \mathcal{E} vers U .

Définition 5.4.1. On appelle *carte affine* de $\mathbb{P}(V)$ l'ensemble $U := \mathbb{P}(V) \setminus \mathcal{H}$ muni de la structure d'espace affine de direction E induite par \mathcal{E} . L'hyperplan \mathcal{H} est appelé *hyperplan à l'infini* de cette carte, les éléments de \mathcal{H} sont appelés les *points à l'infini*.

Remarques 5.4.2. • La notion de point à l'infini n'a de sens que relativement à une carte affine, ce n'est pas une notion intrinsèquement projective.

- L'hyperplan \mathcal{H} et U ne dépendent que de E , c'est-à-dire que de φ à une constante multiplicative près. En revanche, \mathcal{E} et donc la structure d'espace affine sur U dépendent effectivement de φ . Pour s'en convaincre, comparer les structures affines sur U induites par φ et 2φ . En d'autres termes, la structure affine induite sur U par V n'est unique qu'à dilatation près.
- L'application $\Pi_{/\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow U$ est un isomorphisme affine entre espaces de même direction E . Vue la définition de la structure affine sur U , $\overline{\Pi_{/\mathcal{E}}} = \text{Id}_E$.

Exemple 5.4.3. Si V est un plan, alors E est une droite et \mathcal{H} est un point. Donc la droite projective $\mathbb{P}(V)$ est l'union disjointe de la droite affine \mathcal{E} et d'un point à l'infini.

On peut en fait définir la structure affine induite par φ sur U sans passer par une réalisation de U comme hyperplan affine de V . En effet, E agit linéairement sur V par :

$$\forall u \in E, \forall x \in V, \quad u \cdot x := x + \varphi(x)u.$$

La restriction de cette action à E est triviale. Les orbites de l'action induite $E \curvearrowright V \setminus E$ sont les hyperplans affines dirigés par E et l'action est simplement transitive en restriction à chacun de ces hyperplans. Comme l'action $E \curvearrowright V$ est linéaire, elle passe au quotient et induit une action $E \curvearrowright \mathbb{P}(V)$. L'action induite est alors triviale en restriction à \mathcal{H} , et simplement transitive en restriction à U . Cela permet de munir U d'une structure d'espace affine dirigé par E .

Soit $t \in \mathbb{K}^*$, notons $\mathcal{E}_t := \varphi^{-1}(t)$ et $\Pi_t : \mathcal{E}_t \rightarrow U$ la restriction de Π à \mathcal{E}_t . Alors, pour tout $t \in \mathbb{K}^*$, Π_t est une bijection entre espaces affines dirigés par E . On vérifie que Π_t est un

isomorphisme affine de partie linéaire $\frac{1}{t} \text{Id}_E$. En particulier, $\Pi_1 = \Pi_{/\mathcal{E}}$ est un isomorphisme de partie linéaire Id_E , ce qui montre qu'on retrouve bien la structure de carte affine induite par φ sur U .

5.4.2 Complété projectif

On vient de voir qu'un espace projectif $\mathbb{P}(V)$ se décompose comme l'union d'un hyperplan projectif "à l'infini" et d'une carte affine. Inversement, tout espace affine se réalise comme carte affine d'un certain espace projectif.

Soit (\mathcal{E}, E) un \mathbb{K} -espace affine de dimension n . On a vu que \mathcal{E} est isomorphe, par le choix d'un repère affine, à l'hyperplan affine $\{(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1\} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ (voir section 2.5.4). Cet hyperplan est quant à lui canoniquement isomorphe à la carte affine de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ qu'il définit. Donc (\mathcal{E}, E) est isomorphe à une carte affine de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, l'isomorphisme dépendant du choix d'un repère.

Soit $O \in \mathcal{E}$, on peut identifier \mathcal{E} à E en vectorialisant en O . Cela permet de définir un isomorphisme de \mathcal{E} vers l'hyperplan affine $E \times \{1\} \subset E \times \mathbb{K}$ qui envoie O sur $(0, 1)$. Donc \mathcal{E} est isomorphe, par le choix d'une origine, à la carte affine de $\mathbb{P}(E \times \mathbb{K})$ définie par $E \times \{1\}$.

En fait, on a vu à la section 2.5.5, que \mathcal{E} est canoniquement isomorphe à l'hyperplan $\{f \in \text{Aff}(\mathcal{E}, \mathbb{K})^* \mid f(\mathbf{1}) = 1\}$, où $\mathbf{1} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}$ est la fonction constante égale à 1. L'espace affine \mathcal{E} est donc canoniquement isomorphe à la carte affine de $\mathbb{P}(\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathbb{K})^*)$ définie par cet hyperplan.

Définition 5.4.4. L'espace projectif $\mathbb{P}(\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathbb{K})^*)$ est appelé le *complété projectif* de \mathcal{E} .

Remarque 5.4.5. L'isomorphisme $\mathcal{E} \rightarrow \{f \in \text{Aff}(\mathcal{E}, \mathbb{K})^* \mid f(\mathbf{1}) = 1\}$ est donné par l'application d'évaluation : $\text{ev} : A \mapsto \text{ev}_A$. Par ailleurs, les droites de $\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathbb{K})^*$ sont naturellement en bijection avec les hyperplans vectoriels de $\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$, la bijection étant donnée par le passage au quotient de $f \mapsto \ker(f)$. Si on voit $\mathbb{P}(\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathbb{K})^*)$ comme l'ensemble des hyperplans vectoriels de $\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$, le plongement de \mathcal{E} dans son complété projectif est donné par $A \mapsto \ker(\text{ev}_A)$.

5.4.3 Sous-espaces et morphismes

Soient V un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n + 1$ et $\varphi \in V^* \setminus \{0\}$. Comme précédemment, on note $E := \ker(\varphi)$, $\mathcal{E} := \varphi^{-1}(1)$, $\mathcal{H} := \Pi(E)$ et $U := \mathbb{P}(V) \setminus \mathcal{H}$, munit de sa structure de carte affine induite par \mathcal{E} . Nous allons faire le lien entre les sous-espaces de $\mathbb{P}(V)$ et U , ainsi qu'entre les homographies de $\mathbb{P}(V)$ et les applications affines de U .

Proposition 5.4.6. *Soit \mathcal{P} un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(V)$ non contenu dans \mathcal{H} . Alors $\mathcal{P} \cap U$ est un sous-espace affine de U dirigé par $\Pi^{-1}(\mathcal{P} \cap \mathcal{H}) \cup \{0\}$. En particulier, \mathcal{P} et $\mathcal{P} \cap U$ sont de même dimension.*

Inversement, soit \mathcal{F} un sous-espace affine de U dirigé par F . Alors \mathcal{F} engendre un sous-espace projectif $\langle \mathcal{F} \rangle$ de même dimension et tel que :

$$\begin{cases} \langle \mathcal{F} \rangle \cap U = \mathcal{F} \\ \langle \mathcal{F} \rangle \cap \mathcal{H} = \Pi(F). \end{cases}$$

Démonstration. Soit W le sous-espace vectoriel de V tel que $\mathcal{P} = \Pi(W)$. Comme \mathcal{P} n'est pas inclus dans \mathcal{H} , W n'est pas contenu dans E . Alors $W \cap \mathcal{E}$ est un sous-espace affine non vide de \mathcal{E} dirigé par $W \cap E$.

Ensuite $\Pi_{/\mathcal{E}}(W \cap \mathcal{E}) = \mathcal{P} \cap U$ et $\Pi_{/\mathcal{E}}$ est un isomorphisme affine de partie linéaire Id_E . Donc $\mathcal{P} \cap U$ est un sous-espace affine de U dirigé par $W \cap E = \Pi^{-1}(\mathcal{P} \cap \mathcal{H}) \cup \{0\}$. En particulier,

$$\dim(\mathcal{P} \cap U) = \dim(W \cap E) = \dim(W) - 1 = \dim(\mathcal{P}).$$

Inversement, soit \mathcal{F} un sous-espace affine de U dirigé par F . Alors $(\Pi_{/\mathcal{E}})^{-1}(\mathcal{F})$ est un sous-espace affine de \mathcal{E} dirigé par F .

Notons cette fois $W := \text{Vect}((\Pi_{/\mathcal{E}})^{-1}(\mathcal{F})) = \text{Vect}(\Pi^{-1}(\mathcal{F}))$. Soit $O \in (\Pi_{/\mathcal{E}})^{-1}(\mathcal{F})$, on a $(\Pi_{/\mathcal{E}})^{-1}(\mathcal{F}) = O + F$ donc $W = \text{Vect}(O + F) = \mathbb{K} \cdot O \oplus F$ car $O \notin E$. Alors on a $\langle \mathcal{F} \rangle = \Pi(W)$ et ce sous-espace est de dimension $\dim(W) - 1 = \dim(F) = \dim(\mathcal{F})$.

D'une part, on a $W \cap E = F$, donc $\langle \mathcal{F} \rangle \cap \mathcal{H} = \Pi(W) \cap \Pi(E) = \Pi(W \cap E) = \Pi(F)$. D'autre part, $\langle \mathcal{F} \rangle \cap U = \Pi(W) \setminus \mathcal{H} = \Pi(W \setminus E) = \Pi(W \cap \mathcal{E}) = \mathcal{F}$. \square

Proposition 5.4.7. *Soit $\bar{h} \in PGL(V)$ tel que $\bar{h}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$, alors \bar{h} stabilise U et $\bar{h}_{/U}$ est affine. De plus, l'homographie de \mathcal{H} induite par $\bar{h}_{/U}$ est $\bar{h}_{/\mathcal{H}}$.*

Inversement, soit $f \in \text{Aff}(U)$, alors il existe une unique homographie $\bar{h} \in PGL(V)$ telle que $\bar{h}_{/U} = f$. De plus, $\bar{h}_{/\mathcal{H}}$ est induite par \vec{f} .

Démonstration. Soit $h \in GL(V)$ induisant \bar{h} , alors $h(E) = E$. Comme h est injective, h stabilise également $V \setminus E$ et donc \bar{h} stabilise U . On a $\bar{h}_{/U} = \Pi \circ h_{/\mathcal{E}} \circ (\Pi_{/\mathcal{E}})^{-1}$, mais $h(\mathcal{E}) \neq \mathcal{E}$ a priori.

Comme $h(E) = E$, $h(\mathcal{E})$ est un hyperplan affine parallèle à \mathcal{E} et ne contenant pas 0. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $h(\mathcal{E}) = \lambda\mathcal{E}$. Mais alors $\frac{1}{\lambda}h$ induit également l'homographie \bar{h} et stabilise \mathcal{E} . Quitte à considérer $\frac{1}{\lambda}h$ au lieu de h , on peut supposer que $h(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$. Dans ce cas, $h_{/\mathcal{E}} \in \text{Aff}(\mathcal{E})$ et $\bar{h}_{/U} = \Pi_{/\mathcal{E}} \circ h_{/\mathcal{E}} \circ (\Pi_{/\mathcal{E}})^{-1}$ est bien affine et inversible. Donc $\bar{h}_{/U} \in \text{Aff}(U)$. De plus, comme $\overrightarrow{\Pi_{/\mathcal{E}}} = \text{Id}_E$ on a $\overrightarrow{\bar{h}_{/U}} = \overrightarrow{h_{/\mathcal{E}}} = h_{/E}$, et cette application linéaire induit bien l'homographie $\bar{h}_{/\mathcal{H}}$.

Inversement, soit $f \in \text{Aff}(U)$. Notons $g := (\Pi_{/\mathcal{E}})^{-1} \circ f \circ \Pi_{/\mathcal{E}}$, on a $g \in \text{Aff}(\mathcal{E})$ et $\vec{g} = \vec{f}$. Soit $O \in \mathcal{E}$, comme $V = \mathbb{K} \cdot O \oplus F$, on définit une application $h \in GL(V)$ par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \quad h(\lambda O + x) := \lambda g(O) + \vec{g}(x).$$

On a alors $h_{/\mathcal{E}} = g$, donc $\bar{h}_{/U} = f$. D'autre part, $h_{/E} = \vec{g} = \vec{f}$ donc $\bar{h}_{/\mathcal{H}}$ est bien induite par \vec{f} .

Il reste à vérifier que \bar{h} est unique. Soit (e_0, \dots, e_n) une base de V contenue dans \mathcal{E} , alors $e_{n+1} := \sum_{i=0}^n e_i \in V \setminus E$. Notons $A_i := \Pi(e_i)$ pour tout $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, alors (A_0, \dots, A_{n+1}) est un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$ inclus dans U . Soit $\bar{h}' \in PGL(V)$ telle que $\bar{h}'_{/U} = f = \bar{h}_{/U}$, alors $(\bar{h}' \circ \bar{h}^{-1})_{/U}$ est l'identité sur U et fixe donc un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$. Donc $\bar{h}' \circ \bar{h}^{-1} = \text{Id}$ et $\bar{h}' = \bar{h}$. \square

5.4.4 Théorème de Pappus projectif

On a vu dans les sections précédentes que la géométrie projective contient en un sens la géométrie affine. Cela permet de déduire des théorèmes affines de théorèmes projectifs et inversement. Plus précisément, si on a un énoncé projectif, on peut en déduire un énoncé affine en regardant la trace des objets impliqués sur une carte affine. Inversement, si on a un énoncé affine, on peut en déduire un énoncé projectif en passant au complété projectif. On peut aussi passer d'un énoncé affine à un autre énoncé affine équivalent en passant au complété projectif puis en regardant la trace de cette situation projective dans une nouvelle carte affine.

Nous allons déduire par cette méthode la version projective du théorème de Pappus. On pourrait penser que le théorème de Pappus tel qu'énoncé en 2.8.3 est typiquement affine puisqu'il fait apparaître des alignements, des incidences et le parallélisme de certaines droites. C'est en fait un théorème projectif. On peut en effet remplacer les conditions de parallélisme par l'alignement de certains points d'intersection sur la droite à l'infini du plan affine. On pourrait raisonner de même à partir du théorème de Desargues affine (thm. 2.8.4).

Théorème 5.4.8 (Pappus projectif). Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites distinctes d'un plan projectif $\mathbb{P}(V)$. Soient A, B et $C \in \mathcal{D}$ et A', B' et $C' \in \mathcal{D}'$, on suppose ces six points distincts. Notons α (resp. β , resp. γ) l'unique point de $(BC') \cap (B'C)$ (resp. $(AC') \cap (A'C)$, resp. $(AB') \cap (A'B)$). Alors α , β et γ sont alignés.

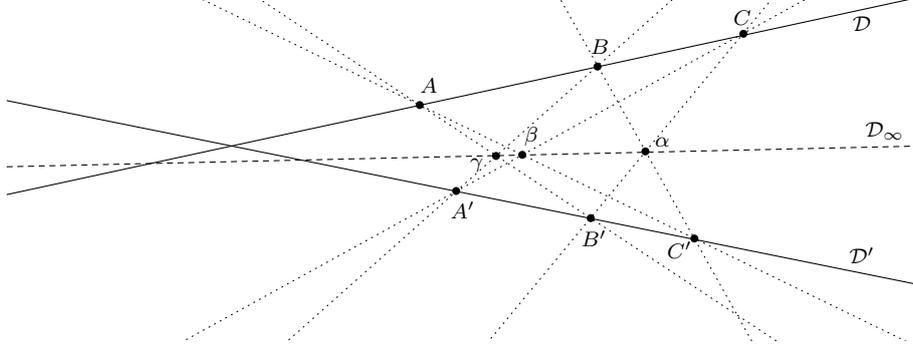


Figure 5.6 – Le théorème de Pappus projectif.

Démonstration. Si $A \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$, alors $(AB') = \mathcal{D}'$ et $A' \in (A'B) \cap (AB')$ donc $A' = \gamma$. Comme $B \neq A$, on a bien $B \notin \mathcal{D}'$ et $(A'B) \neq (AB')$. De même, on a alors $(AC') = \mathcal{D}'$ et $A' \in (A'C) \cap (AC')$ donc $A' = \beta$. Donc $\beta = \gamma$ et α , β et γ sont bien alignés.

Par un raisonnement similaire, on prouve que le résultat est vrai si l'un des six points A, B, C, A', B', C' est l'unique point d'intersection de \mathcal{D} et \mathcal{D}' . Dans la suite, on suppose que A, B et $C \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'$ et A', B' et $C' \in \mathcal{D}' \setminus \mathcal{D}$.

Soit $\mathcal{D}_\infty := (\alpha\beta)$, on veut montrer que $\gamma \in \mathcal{D}_\infty$. Pour prouver ce résultat, on va se ramener au théorème de Pappus affine (thm. 2.8.3) par le choix d'une carte affine. Soit $U := \mathbb{P}(V) \setminus \mathcal{D}_\infty$, on peut munir U d'une structure de carte affine. Cette structure n'est pas unique mais cela n'a pas d'influence dans ce qui suit.

Supposons que $\alpha \in \mathcal{D}$. Alors, si $\alpha \neq B$ on a $(BC') = (B\alpha) = \mathcal{D}$ et $C' \in \mathcal{D}$, et si $\alpha = B$ on a $\alpha \neq C$ et $(B'C) = (\alpha C) = \mathcal{D}$ d'où $B' \in \mathcal{D}$. Dans les deux cas, cela contredit nos hypothèses. Donc $\alpha \notin \mathcal{D}$ et de même $\alpha \notin \mathcal{D}'$. On prouve de façon similaire que $\beta \notin \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ et $\gamma \notin \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$.

Si $A \in \mathcal{D}_\infty$, alors $(AC') = (A\beta) = \mathcal{D}_\infty$ et $C' \in \mathcal{D}_\infty$. Mais alors $(BC') = (\alpha C') = \mathcal{D}_\infty$, donc $B \in \mathcal{D}_\infty$ et $\mathcal{D} = (AB) = \mathcal{D}_\infty$. Mais on a montré que $\alpha \notin \mathcal{D}$, contradiction. Donc $A \in U$. De même on montre que B, C, A', B' et $C' \in U$.

On a donc $\mathcal{D} \cap U$ et $\mathcal{D}' \cap U$ deux droites affines distinctes de U . On a aussi A, B et $C \in (\mathcal{D} \cap U)$ et A', B' et $C' \in (\mathcal{D}' \cap U)$ et ces six points sont distincts. Enfin, comme $\alpha, \beta \in \mathcal{D}_\infty$, on a $(B'C) \parallel (BC')$ et $(A'C) \parallel (AC')$ dans U . D'après le théorème de Pappus affine, on a $(A'B) \parallel (AB')$ dans U , c'est-à-dire $\gamma \in \mathcal{D}_\infty$. \square

Remarque 5.4.9. Dans la démonstration du théorème de Pappus affine (thm. 2.8.3), on a séparé deux cas, selon que les droites $\mathcal{D} \cap U$ et $\mathcal{D}' \cap U$ sont sécantes ou parallèles. Si on note O le point d'intersection de \mathcal{D} et \mathcal{D}' dans $\mathbb{P}(V)$, ces cas correspondent respectivement à $O \notin \mathcal{D}_\infty$ et $O \in \mathcal{D}_\infty$. La distinction n'a évidemment plus de sens en projectif.

On vient de démontrer un théorème dans le plan projectif en se ramenant à un énoncé affine déjà prouvé, dans une bonne carte affine. Si maintenant on lit ce théorème de Pappus projectif dans une carte affine U' de $\mathbb{P}(V)$ telle qu'aucun des neuf points $A, B, C, A', B', C', \alpha, \beta$ et γ ne soit à l'infini, l'énoncé fait toujours sens dans le plan affine U' . On obtient donc un théorème affine, en apparence nouveau, qui se déduit du théorème de Pappus affine par une homographie.

Théorème 5.4.10 (Pappus affine, seconde version). Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites distinctes d'un plan affine. Soient A, B et $C \in \mathcal{D}$ et A', B' et $C' \in \mathcal{D}'$, on suppose ces six points distincts. On suppose que plus que (BC') et $(B'C)$ sont sécantes en α , (AC') et $(A'C)$ sont sécantes en β et (AB') et $(A'B)$ sont sécantes en γ . Alors α , β et γ sont alignés.

5.4.5 Exercices

Exercice 5.28. Soit U une carte affine d'un \mathbb{K} -espace projectif $\mathbb{P}(V)$ et soit $\bar{h} \in PGL(V)$. Montrer que $\bar{h}|_U$ est une homothétie ou une translation si et seulement si \bar{h} fixe point par point l'hyperplan à l'infini $\mathbb{P}(V) \setminus U$.

Exercice 5.29. Soit U une carte affine d'un \mathbb{K} -espace projectif $\mathbb{P}(V)$ et soient P et Q deux sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$. À quelle condition les sous-espaces affines $P \cap U$ et $Q \cap U$ sont-ils parallèles ?

Exercice 5.30 (Une preuve absurde). Soit \mathbb{K} un corps de cardinal q . En itérant la décomposition $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$, montrer que $1 + q + \dots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Exercice 5.31 (Démonstration projective de Pappus, [2] p. 208). Démontrer le théorème de Pappus projectif sans utiliser la version affine de ce théorème.

Exercice 5.32 (Théorème de Desargues projectif, [2] p. 186). Soient ABC et $A'B'C$ deux vrais triangles sans sommet commun dans un plan projectif $\mathbb{P}(V)$. On suppose de plus que $(BC) \neq (B'C')$, $(AC) \neq (A'C')$ et $(AB) \neq (A'B')$. Notons α (resp. β , resp. γ) l'unique point de $(BC) \cap (B'C')$ (resp. $(AC) \cap (A'C')$, resp. $(AB) \cap (A'B')$). Montrer que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes si et seulement si les points α , β et γ sont alignés.

5.5 Coordonnées homogènes

Dans le chapitre 2, consacré à la géométrie affine, on a vu que la donnée d'un repère affine permet de définir des coordonnées barycentriques. Ces coordonnées se révèlent particulièrement adaptées pour traiter les problèmes affines. De même, en géométrie projective on sait construire des coordonnées adaptées aux problèmes projectifs à partir d'un repère projectif, ce sont les coordonnées homogènes.

5.5.1 Définition et premières propriétés

Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n+1$ et soit $\Pi : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ la projection canonique. On munit V d'une base (e_0, \dots, e_n) .

Définition 5.5.1. Soit $A \in \mathbb{P}(V)$ et soit $x \in \Pi^{-1}(A)$ de coordonnées (x_0, \dots, x_n) . On dit que les coordonnées de x forment un *jeu de coordonnées homogènes* de A associées à la base (e_0, \dots, e_n) et on note $A = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$.

Les coordonnées homogènes du point A ne sont définies qu'à une constante multiplicative près. En effet, les différents relevés de A sont de la forme λx avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On a donc pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $(\lambda x_0 : \lambda x_1 : \dots : \lambda x_n) = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$. Inversement, si $(x_0 : \dots : x_n) = (y_0 : \dots : y_n)$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $y_i = \lambda x_i$.

Remarque 5.5.2. Si $A := (x_0 : \dots : x_n)$ alors il existe $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $x_i \neq 0$. On a alors $A = \left(\frac{x_0}{x_i} : \dots : \frac{x_{i-1}}{x_i} : 1 : \frac{x_{i+1}}{x_i} : \dots : \frac{x_n}{x_i} \right)$.

Exemple 5.5.3. Considérons les coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ induites par \mathbb{K}^2 muni de sa base canonique. Les points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ sont de la forme $(x : y)$ avec $(x, y) \neq (0, 0)$. Si $y \neq 0$, alors $(x : y) = \left(\frac{x}{y} : 1\right)$, donc $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \{(x : 1) \mid x \in \mathbb{K}\} \sqcup \{(1 : 0)\}$.

Avec les notations de la section 5.3.1, $\infty := (1 : 0)$, $0 := (0 : 1)$ et $1 := (1 : 1)$. Plus généralement, on peut identifier x et $(x : 1)$ de sorte que $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \sqcup \{\infty\}$.

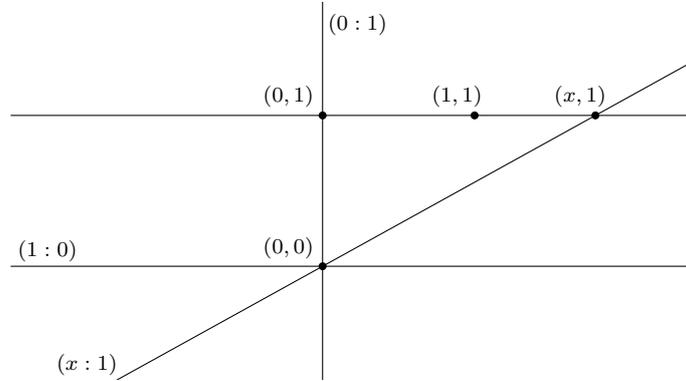


Figure 5.7 – La projection canonique réalise une bijection de $\mathbb{K} \times \{1\}$ vers $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \setminus \{\infty\}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, les bases $(e_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ et $(\lambda e_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ définissent les mêmes coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}(V)$. En fait, ces coordonnées homogènes ne dépendent que du repère projectif (A_0, \dots, A_{n+1}) défini par la base (e_0, \dots, e_n) , c'est-à-dire $A_i = \Pi(e_i)$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $A_{n+1} = \Pi(\sum_{i=0}^n e_i)$. En effet, les bases de V qui définissent le repère projectif (A_0, \dots, A_{n+1}) sont exactement les bases satisfaisant la condition 3 de la proposition 5.2.10. Ces bases ne diffèrent l'une de l'autre que par une homothétie et définissent donc les mêmes coordonnées homogènes.

Exemple 5.5.4. La base canonique de \mathbb{K}^2 définit le repère projectif $(\infty, 0, 1)$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. Les coordonnées de l'exemple 5.5.3 sont donc les coordonnées homogènes dans ce repère.

Au final, étant donné un repère projectif (A_0, \dots, A_{n+1}) de $\mathbb{P}(V)$ on dispose de coordonnées homogènes associées à ce repère. C'est-à-dire que chaque point est repéré par un $(n+1)$ -uplet de scalaires, défini à une constante multiplicative près.

Remarque 5.5.5. Dans le repère (A_0, \dots, A_{n+1}) on a toujours $A_{n+1} = (1 : 1 : \dots : 1)$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_i = (0 : \dots : 0 : 1 : 0 : \dots : 0)$ où le 1 est en i -ème position.

5.5.2 Sous-espaces et homographies

Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n+1$, soient (A_0, \dots, A_{n+1}) un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$ et (e_0, \dots, e_n) une base de V relevant ce repère, au sens de la proposition 5.2.10 condition 3.

Soit \mathcal{P} un sous-espace de $\mathbb{P}(V)$ et W un sous-espace vectoriel de V tel que $\Pi(W) = \mathcal{P}$. Supposons W défini dans la base (e_0, \dots, e_n) par le système d'équations

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{r0}x_0 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

d'inconnue (x_0, \dots, x_n) . Alors \mathcal{P} est l'ensemble des $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}(V)$ tels que (x_0, \dots, x_n) est solution du système (5.2). Comme le système (5.2) est homogène, cette condition ne dépend pas d'un choix de relevé.

Remarques 5.5.6. • Plus généralement, si $\mathbb{P}(V)$ est muni de coordonnées homogènes, on peut considérer dans $\mathbb{P}(V)$ les zéros communs d'une famille de polynômes homogènes en $n + 1$ variables. C'est la projection du cône formé des zéros communs de ces polynômes dans V .

- On peut définir le lieu d'annulation d'un polynôme homogène en $n + 1$ variables dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ mais on ne peut pas définir ses valeurs hors de son lieu d'annulation. En d'autres termes, ce polynôme ne définit pas une fonction sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Soit $h \in GL(V)$, notons $M := (m_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$ sa matrice dans la base (e_0, \dots, e_n) . Soit $A := (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}(V)$, comme $\bar{h}(A)$ est le projeté de $h(x_1, \dots, x_n)$, on a :

$$\bar{h}(A) = \left(\sum_{j=0}^n m_{0j} x_j : \dots : \sum_{j=0}^n m_{nj} x_j \right).$$

On dit que M est une matrice de \bar{h} . Les différentes matrices de \bar{h} sont exactement les λM avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Traitons le cas des homographies de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ dans le repère $(\infty, 0, 1)$. Soit $\bar{h} \in PGL_2(\mathbb{K})$, notons $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{K})$ un relevé de \bar{h} . On a alors $\bar{h} : (x : y) \mapsto (ax + by : cx + dy)$. En particulier, on a :

$$\bar{h}(1 : 0) = (a : c) = \begin{cases} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} : 1 & \text{si } c \neq 0, \\ (1 : 0) & \text{si } c = 0 \end{cases},$$

et pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$\bar{h}(x : 1) = (ax + b : cx + d) = \begin{cases} \begin{pmatrix} ax + b \\ cx + d \end{pmatrix} : 1 & \text{si } x \neq -\frac{d}{c}, \\ (1 : 0) & \text{si } x = -\frac{d}{c}. \end{cases}$$

Sous l'identification de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} \sqcup \{\infty\}$, on a donc $\bar{h} : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ prolongé par les conventions habituelles :

$$\bar{h}(\infty) := \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{si } c \neq 0, \\ \infty & \text{si } c = 0, \end{cases}$$

$$\bar{h}\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty \text{ si } c \neq 0.$$

5.5.3 Coordonnées homogènes et birapport

Dans cette section, nous allons traiter du birapport de quatre points alignés en coordonnées. Comme on peut toujours se ramener à quatre points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ par le choix d'un repère projectif, on se place dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ muni du repère $(\infty, 0, 1)$, que l'on identifie à $\mathbb{K} \sqcup \{\infty\}$ via $(x : y) \mapsto \frac{x}{y}$. En particulier, on voit le birapport de quatre points alignés comme un élément de $\mathbb{K} \sqcup \{\infty\}$.

Dans ce qui suit, on suppose qu'on a prolongé les opérations de corps à $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ de façon naturelle : $\frac{1}{\infty} := 0$, $\frac{1}{0} := \infty$, $x + \infty := \infty$, si $x \neq 0$ alors $x\infty := \infty \dots$

Remarque 5.5.7. Il est impossible de prolonger les opérations de corps à $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ de façon totalement satisfaisante. Par exemple, on voudrait parfois que $\infty - \infty = 0$, mais alors $1 = 1 + (\infty - \infty) = (1 + \infty) - \infty = \infty - \infty = 0$. Il ne s'agit donc que de conventions d'écriture. En cas de doute, il faut revenir aux coordonnées homogènes et à de l'algèbre linéaire dans \mathbb{K}^2 pour ne pas dire de bêtises.

Soient a, b et c trois points distincts de $\mathbb{K} \sqcup \{\infty\}$. L'unique homographie \bar{h} de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ telle que $\bar{h}(a) = \infty$, $\bar{h}(b) = 0$ et $\bar{h}(c) = 1$ est :

$$\bar{h} : x \longmapsto \frac{x - b}{x - a} \frac{c - a}{c - b}.$$

En particulier, pour tout $d \in \mathbb{K} \sqcup \{\infty\}$ on a : $[a, b, c, d] = \frac{d - b}{d - a} \frac{c - a}{c - b}$, d'où le nom de birapport.

5.5.4 Coordonnées homogènes et coordonnées barycentriques

Pour finir, faisons le lien entre les coordonnées homogènes dans un espace projectif et les coordonnées cartésiennes ou barycentriques dans une carte affine de cet espace.

Soient V un \mathbb{K} -espace affine de dimension $n + 1$ et $\varphi \in V^* \setminus \{0\}$. Comme à la section 5.4, on note $\Pi : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ la projection canonique, $\mathcal{E} := \varphi^{-1}(1)$ et $U_0 := \Pi(V \setminus \ker(\varphi))$. Quitte à choisir une bonne base de V , on peut se ramener à $V = \mathbb{K}^{n+1}$ et $\varphi : (x_0, \dots, x_n) \mapsto x_0$. On a alors $\mathcal{E} = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_0 = 1\}$ et $U_0 = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid x_0 \neq 0\}$.

Notons $O := (1, 0, \dots, 0)$ et (e_0, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{K}^{n+1} . Alors (x_1, \dots, x_n) sont les coordonnées associées au repère cartésien (O, e_1, \dots, e_n) de \mathcal{E} . Par ailleurs, l'isomorphisme affine $\Pi|_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow U_0$ s'écrit $(1, x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)$. Donc $(\Pi(O), e_1, \dots, e_n)$ est un repère cartésien de U_0 et les coordonnées associées sont :

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (1 : x_1 : \dots : x_n).$$

Remarque 5.5.8. Cela permet d'écrire de façon élémentaire que $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est l'union disjointe de l'espace affine \mathbb{K}^n et d'un hyperplan à l'infini $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) = \Pi(\ker(\varphi))$.

On peut aussi se ramener à $\varphi : (x_0, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=0}^n x_i$, toujours par le choix d'une bonne base de V . Dans ce cas, \mathcal{E} est l'hyperplan affine standard

$$\left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1 \right\},$$

la base canonique (e_0, \dots, e_n) de \mathbb{K}^{n+1} est un repère affine de \mathcal{E} , et si $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathcal{E}$ alors les x_i sont les coordonnées barycentriques de x dans ce repère. Alors φ induit une structure de carte affine sur $U := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid \sum_{i=0}^n x_i \neq 0\}$ qui fait de $\Pi|_{\mathcal{E}} : (x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_n)$ un isomorphisme affine.

Notons $A_i := \Pi(e_i)$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $A_{n+1} := \Pi(\sum_{i=0}^n e_i)$. Alors (A_0, \dots, A_n) est un repère de la carte affine U et (A_0, \dots, A_{n+1}) est un repère projectif de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. De plus, pour tout $A \in U$, si les coordonnées barycentriques de A dans le repère affine (A_0, \dots, A_n) sont (x_0, \dots, x_n) alors A a pour coordonnées homogènes $(x_0 : \dots : x_n)$ dans le repère projectif (A_0, \dots, A_{n+1}) .

Remarque 5.5.9. Attention, si $A := (x_0 : \dots : x_n) \in U$ alors ses coordonnées barycentriques dans le repère affine (A_0, \dots, A_n) sont $(\frac{x_0}{m}, \dots, \frac{x_n}{m})$, où on a noté $m := \sum_{i=0}^n x_i$.

5.5.5 Exercices

Exercice 5.33 (Matrice d'une homographie). Soient a, b et $c \in \mathbb{K}$ distincts, on définit $\bar{h} \in PGL_2(\mathbb{K})$ l'unique homographie telle que $\bar{h}(a : 1) = (1 : 0)$, $\bar{h}(b : 1) = (0 : 1)$ et $\bar{h}(c : 1) = (1 : 1)$. Expliciter une matrice de \bar{h} en fonction de a, b et c .

Exercice 5.34 (Un exercice pénible). Vérifier par un calcul en coordonnées que si A, B, C et D sont quatre points distincts d'une droite projective $\mathbb{P}(V)$ et $f \in PGL(V)$ alors $[f(A), f(B), f(C), f(D)] = [A, B, C, D]$. Se convaincre que ce n'est pas la bonne méthode.

Exercice 5.35 (Permutations et birapport, [2] p. 199). Soient $(A_i)_{1 \leq i \leq 4}$ quatre points distincts d'une droite projective. L'action de \mathfrak{S}_4 sur $(A_i)_{1 \leq i \leq 4}$ par permutation des indices induit une action de \mathfrak{S}_4 sur l'ensemble des valeurs que peut prendre le birapport des A_i . Déterminer l'orbite et le stabilisateur de $[A_1, A_2, A_3, A_4]$ pour cette action.

Exercice 5.36 ([2] p. 198). Soient $A := (a_0 : a_1)$, $B := (b_0 : b_1)$, $C := (c_0 : c_1)$ et $D := (d_0 : d_1)$ quatre points distincts de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$[A, B, C, D] = \frac{\det \begin{pmatrix} c_0 & a_0 \\ c_1 & a_1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix}} \cdot \frac{\det \begin{pmatrix} d_0 & b_0 \\ d_1 & b_1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} d_0 & a_0 \\ d_1 & a_1 \end{pmatrix}}.$$

Exercice 5.37. Soit $\bar{h} \in PGL_2(\mathbb{K}) \setminus \{\text{Id}\}$. Dans ce qui suit, on identifie $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K} \sqcup \{\infty\}$ via $(x : y) \mapsto \frac{x}{y}$ dans les coordonnées homogènes associées au repère $(\infty, 0, 1)$.

1. Montrer que \bar{h} a au plus deux points fixes.
2. Si \bar{h} a un unique point fixe, montrer qu'elle est conjuguée par une homographie à une translation $x \mapsto x + u$ de la carte affine $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$.
3. Si \bar{h} a exactement deux points fixes a et b , montrer qu'elle est conjuguée à $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$. Montrer que de plus, $\forall x \in \mathbb{P}^1(K) \setminus \{a, b\}$, $[a, b, x, \bar{h}(x)] = \lambda$.

Exercice 5.38 (Birapport et cocyclicité). On se place dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ vu comme $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$. On appelle *cercle-droite* toute partie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui est ou bien un cercle inclus dans \mathbb{C} ou bien une droite affine réelle de \mathbb{C} complétée par $\{\infty\}$.

1. Soient a, b, c et $d \in \mathbb{C}$ distincts, montrer que ces points sont alignés ou cocycliques si et seulement si $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$. (On pourra se rappeler de l'exercice 3.25.)
2. En déduire que l'image d'un cercle-droite par une homographie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est encore un cercle-droite.
3. Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ un cercle et $h \in PGL_2(\mathbb{C})$, à quelle condition l'image de \mathcal{C} par h est-elle une droite ?

Exercice 5.39 (Lemme des trois birapports). 1. Soient A, B, C, D et E cinq points distincts d'une droite projective. Montrer que

$$[B, C, D, E][C, A, D, E][A, B, D, E] = 1.$$

2. Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan projectif et deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ne passant pas par A, B ou C . On note α (resp. β , resp. γ) l'unique point d'intersection de \mathcal{D} avec (BC) (resp. (AC) , resp. (AB)) et α' (resp. β' , resp. γ') l'unique point d'intersection de \mathcal{D}' avec (BC) (resp. (AC) , resp. (AB)). Montrer que

$$[B, C, \alpha, \alpha'][C, A, \beta, \beta'][A, B, \gamma, \gamma'] = 1.$$

3. Réciproquement, soient A, B et C trois points non alignés d'un plan projectif, soient $\alpha, \alpha' \in (BC)$, $\beta, \beta' \in (AC)$ et $\gamma, \gamma' \in (AB)$. Si α, β et γ sont alignés et

$$[B, C, \alpha, \alpha'][C, A, \beta, \beta'][A, B, \gamma, \gamma'] = 1,$$

montrer que α', β' et γ' sont alignés.

4. En déduire une nouvelle preuve du théorème de Menelaüs (thm. 2.8.6).

Bibliographie

- [1] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation*, 1ère ed., Mathématiques appliquées, Les Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2012.
- [2] M. Audin, *Géométrie*, 1ère ed., Enseignement Sup, EDP Sciences, Les Ullis, 2006.
- [3] A. Barvinok, *A course in convexity*, 1st ed., Graduate studies in mathematics, vol. 54, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [4] M. Berger, *Géométrie*, Nathan Information, CEDIC, Paris, 1977, Tomes 1 à 5.
- [5] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, 2ème ed., Sciences Sup, Dunod, Paris, 2005.
- [6] Ph. Caldero and J. Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 1*, 1ère ed., Mathématiques en devenir, no. 111, Calvage et Mounet, Paris, 2013.
- [7] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, 1ère ed., Enseignement des sciences, Hermann, Paris, 1961.
- [8] P. G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, 2ème ed., Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Dunod, Paris, 1998.
- [9] S. Francinou, H. Gianella, and S. Nicolas, *Oraux X-ENS : algèbre 1*, 2ème ed., Enseignement des mathématiques, no. 10, Cassini, Paris, 2007.
- [10] J. Fresnel, *Méthodes modernes en géométrie*, 3ème ed., Hermann, Paris, 2010.
- [11] S. Gonnord and N. Tosel, *Thème d'analyse pour l'agrégation : topologie et analyse fonctionnelle*, 1ère ed., CAPES / Agrég Mathématiques, Ellipses, Paris, 1998.
- [12] B. Ingrao, *Coniques affines, projectives et métriques*, 1ère ed., Mathématiques en devenir, no. 105, Calvage et Mounet, Paris, 2011.
- [13] S. Katok, *Fuchsian groups*, Chigaco Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, Chicago, 1992.
- [14] J. Matoušek, *Lectures on discrete geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 212, Springer, New York, 2002.
- [15] D. Perrin, *Cours d'algèbre*, 1ère ed., CAPES / Agrégation, Ellipses, Paris, 1996.
- [16] H. Queffélec and C. Zuily, *Analyse pour l'agrégation*, 3ème ed., Sciences Sup, Dunod, Paris, 2007.
- [17] J. Saint-Raymond, *Topologie calcul différentiel et variable complexe*, 2ème ed., Mathématiques en devenir, no. 103, Calvage et Mounet, Paris, 2008.
- [18] P. Samuel, *Géométrie projective*, Presses universitaires de France, Paris, 1986.
- [19] J.-C. Sidler, *Géométrie projective*, Interéditions, Paris, 1993.
- [20] P. Tauvel, *Géométrie*, 2nde ed., Dunod, Paris, 2005.