Séparation, points extrémaux

Exercice 1. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux convexes disjoints d'un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension finie.

1. Si B est d'intérieur non vide, montrer qu'il existe un hyperplan affine qui sépare $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.
2. Montrer qu'on peut se passer d'hypothèse sur $\mathcal{B}$, en se ramenant à la question précédente.

Exercice 2 (Séparation, Berger T. 3 sect. 11.4)**.** Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux convexes disjoints dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer les résultats de séparation suivants.

1. Si A et B sont ouverts, alors il existe un hyperplan qui les séparent strictement.
2. Si A est fermé et B est compact, alors il existe un hyperplan qui les séparent strictement.

Exercice 3 (Convexes fermés, Berger T. 3 sect. 11.5)**.** Montrer qu'un convexe fermé dans un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension finie est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

Exercice 4 (Lemme de Farkas, Matoušek sect. 1.2)**.** Soit $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, montrer qu'une et une seule des possibilités suivantes est vérifiée.

1. Il existe $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ dont les composantes sont positives ou nulles et tel que $Mx = 0$.
2. Il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que toutes les composantes de $(y^{\mathrm{t}})M = 0$ soient strictement négatives.

Exercice 5 (Enveloppe convexe du groupe orthogonal, FGN alg. 1 pp. 329–330, Queffélec–Zuily pp. 206–207)**.** On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\varphi_M : A \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$.

1. Montrer que $M \mapsto \varphi_M$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers son dual.
2. Montrer que $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est un compact inclus dans $\mathbb{B}$, la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que pour tout $\varphi \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^*$, $\max\limits_{A \in \mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))} \varphi(A) = \max\limits_{A \in O_n(\mathbb{R})} \varphi(A)$.
4. Montrer que pour tout $\varphi \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^*$ et tout $M \in \mathbb{B}$, $\varphi(M) \leqslant \max\limits_{A \in O_n(\mathbb{R})} \varphi(A)$.
   (*Indication :* écrire φ comme φ_A et utiliser la décomposition polaire de A)
5. Conclure que $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R})) = \mathbb{B}$.

Exercice 6 (Point extrémal)**.** Soient $\mathcal{C}$ un convexe d'un $\mathbb{R}$-espace affine et $M \in \mathcal{C}$.

1. Montrer que M est extrémal si et seulement si $\mathcal{C} \setminus \{M\}$ est convexe.
2. Montrer que M est extrémal si et seulement si pour tout $A, B \in \mathcal{C}$, $M \notin \,]AB[$.

Exercice 7 (Existence d'un point extrémal, Barvinok p. 53)**.** Soit $\mathcal{C}$ un convexe d'un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension finie ne contenant pas de droite. Montrer que $\mathcal{C}$ possède un point extrémal.

Exercice 8 (Théorème de Birkhoff–von Neumann, Barvinok sect. II.5)**.** Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $M_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients (m_{ij}) vérifient $m_{ij} = 1$ si $j = \sigma(i)$ et $m_{ij} = 0$ sinon. Les $(M_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$ sont appelées *matrices de permutations.*

On appelle matrice *bi-stochastique* une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs telle que la somme des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne soit égale à 1.

1. Vérifier que les matrices de permutation sont bi-stochastiques.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}$ des matrices bi-stochastiques est un convexe.
3. Montrer que $\mathcal{B} = \mathrm{Conv}\left(\{M_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}\right)$.

Remarque : une application de ce résultat est de démontrer le théorème de Schur sur les matrices symétriques, voir Barvinok p. 60.