Convexité

Exercice 1. Quels sont les convexes de $\mathbb{R}$?

Exercice 2. Montrer qu'une réunion croissante de convexes est convexe.

Exercice 3 (Somme de Minkowski, Berger T. 3 p. 11)**.** Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux convexes d'un espace vectoriel E, soient α et $\alpha' \in \mathbb{R}$, montrer que $\alpha\mathcal{C} + \alpha'\mathcal{C}'$ est un convexe.

Exercice 4 (ε-voisinage, Berger T. 3 pp. 11–12)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. Pour tout $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ et tout $\varepsilon > 0$, on note $V(\mathcal{A}, \varepsilon) := \{x \in \mathcal{E} \mid d(x, \mathcal{A}) < \varepsilon\}$ le ε-voisinage ouvert (resp. $\overline{V}(\mathcal{A}, \varepsilon) := \{x \in \mathcal{E} \mid d(x, \mathcal{A}) \leqslant \varepsilon\}$ le ε-voisinage fermé) de $\mathcal{A}$.

1. Montrer que $V(\mathcal{A}, \varepsilon) = \mathcal{A} + \mathbb{B}(0, \varepsilon)$, où $\mathbb{B}(0, \varepsilon)$ est la boule ouverte de centre 0 et de rayon ε dans E.
2. Si $\mathcal{A}$ est compact, montrer que $\overline{V}(\mathcal{A}, \varepsilon) = \mathcal{A} + \overline{\mathbb{B}(0, \varepsilon)}$.
3. En déduire que si $\mathcal{A}$ est convexe alors $V(\mathcal{A}, \varepsilon)$ est convexe. Si de plus $\mathcal{A}$ est compact, en déduire également que $\overline{V}(\mathcal{A}, \varepsilon)$ est convexe.

Exercice 5 (Topologie des convexes, Berger T. 3 sect. 11.2 et 11.3)**.** Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ un convexe non vide d'un espace affine de dimension finie n.

1. Montrer que $\overline{\mathcal{C}}$ est convexe.
2. Soient $A \in \overline{\mathcal{C}}$ et $B \in \mathring{\mathcal{C}}$, montrer que $]AB[\subset \mathring{C}$. En déduire que $\mathring{C}$ est convexe.
3. Montrer que $\mathring{\mathcal{C}} = \mathring{\overline{\mathcal{C}}}$. Si de plus $\mathring{\mathcal{C}} \neq \emptyset$, montrer que $\overline{\mathcal{C}} = \overline{\mathring{\mathcal{C}}}$.
4. Si $\mathcal{C}$ est compact, montrer que C est l'enveloppe convexe de sa frontière. Que se passe-t-il lorsque $\mathcal{C}$ n'est pas compact ?
5. Si $\mathcal{C}$ est ouvert, montrer que $\mathcal{C}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.
6. Si $\mathcal{C}$ est compact, montrer que $\mathcal{C}$ est homéomorphe à la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. Montrer que sa frontière est homéomorphe à $\mathbb{S}^{n-1}$.
7. L'enveloppe convexe d'un borné (resp. fermé) est-elle bornée (resp. fermée) ?

Exercice 6. Dans un espace affine de dimension infinie, l'enveloppe convexe d'un compact est-elle compacte ?

Exercice 7 (Droite sécante, Berger T. 3 p. 56)**.** Soit $\mathcal{E}$ un plan affine réel et $(\mathcal{S}_i)_{i \in I}$ une famille finie de segments parallèles telle que pour tout i, j et $k \in I$, il existe une droite intersectant $\mathcal{S}_i$, $\mathcal{S}_j$ et $\mathcal{S}_k$. Montrer qu'il existe une droite intersectant tous les $\mathcal{S}_i$.

Exercice 8 (Points centraux, Matoušek sect. 1.4)**.** Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension n et $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ un ensemble fini de cardinal k. On dit qu'un point $M \in \mathcal{E}$ est *central* pour $\mathcal{A}$ si tout demi-espace fermé contenant M contient au moins $\frac{k}{n+1}$ points de $\mathcal{A}$.

1. Montrer que M est central si et seulement si pour tout demi-espace ouvert δ contenant strictement plus de $\frac{n}{n+1}k$ points de $\mathcal{A}$ on a $M \in \delta$.
2. Montrer que $\mathcal{A}$ possède un point central.