Géométrie euclidienne

Exercice 1 (Identité du parallélogramme)**.** Soit $ABCD$ un parallélogramme dans un espace affine euclidien $\mathcal{E}$, montrer que :

$$d(A,B)^2 + d(B,C)^2 + d(C,D)^2 + d(D,A)^2 = 2d(A,C)^2 + 2d(B,D)^2.$$

Exercice 2. Montrer que les hauteurs (resp. bissectrices, resp. médiatrices, resp. médianes) d'un triangle sont concourantes.

Exercice 3 (Constructions à la règle et au compas)**.** Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclicien.

1. Soient $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{E}$ et $A \in \mathcal{E}$, construire à la règle et au compas la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par A.
2. Même question avec la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par A.
3. Soient $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ trois droites parallèles de $\mathcal{E}$. Construire à la règle et au compas trois points A, B, C tels que $A \in \mathcal{D}_1$, $B \in \mathcal{D}_2$, $C \in \mathcal{D}_3$ et ABC est équilatéral.

Exercice 4 (Cercle et droite d'Euler, Eiden pp. 30 et 224)**.** Soit ABC un vrai triangle du plan euclidien, on note :

- G le centre de gravité de ABC,
- H l'orthocentre de ABC,
- O le centre du cercle circonscrit à ABC,
- M_A, M_B et M_C les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$,
- H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de A, B et C respectivement,
- H'_A, H'_B et H'_C les symétriques H par rapport à $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement.
- P_A, P_B et P_C les milieux respectifs de $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$.

1. Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$, montrer que l'image de ABC par h est $M_AM_BM_C$. On note Γ le cercle circonscrit à $M_AM_BM_C$
2. Montrer que $h(H) = O$. On note $\Omega := h(O)$. Montrer que Ω est le centre de Γ.
3. Montrer que $\overrightarrow{\Omega H} = -\overrightarrow{\Omega O}$. En déduire que O, G, Ω et H sont alignés dans cet ordre.
4. Soit h' l'homothétie de centre H et de rapport 2, montrer que $h'(\Omega) = O$ et $h'(\Gamma)$ est le cercle circonscrit à ABC. (*Indication* : quelle est la nature de $h' \circ h$?)
5. Montrer que H'_A, H'_B et H'_C appartiennent au cercle circonscrit à ABC.
6. En déduire que H_A, H_B et $H_C \in \Gamma$.
7. Montrer que P_A, P_B et $P_C \in \Gamma$.

Exercice 5. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'un plan affine euclidien, A et B deux points hors de $\mathcal{D}$ et dans le même demi-plan. Construire $M \in \mathcal{D}$ tel que $d(M,A) + d(M,B)$ soit minimal.

Exercice 6 (Point de Fermat, Fresnel pp. 212–214)**.** Soient ABC un triangle non dégénéré d'un plan affine euclidien et $f : M \mapsto d(M,A) + d(M,B) + d(M,C)$.

1. Montrer que f admet un unique minimum, en un point M situé dans l'enveloppe convexe des sommets.
2. Si $M \notin \{A, B, C\}$, montrer que les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$, $(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}})$ sont égaux. En déduire que leur mesure est congrue à $\pm\frac{2\pi}{3}$ après un choix d'orientation du plan.