Isométries et similitudes affines

Exercice 1 (Plus de produits semi-directs)**.** Soit $(\mathcal{E}, E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espace affine euclidien, montrer que $\mathrm{Isom}(\mathcal{E}) \simeq E \rtimes O(E)$ et $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E}) \simeq E \rtimes SO(E)$. Montrer de même que $\mathrm{Sim}(\mathcal{E})$ (resp. $\mathrm{Sim}^+(\mathcal{E})$) est le produit semi-direct de E par le groupe des similitudes (resp. similitudes directes) vectorielles de E.

Exercice 2 (Action des isométries)**.** Soit $(\mathcal{E}, E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espace affine euclidien.

1. Déterminer un invariant total pour l'action de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ sur les couples de points de $\mathcal{E}$.
2. Déterminer un invariant total pour l'action de $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ sur les couples de points de $\mathcal{E}$ lorsque $n \geqslant 2$. Que se passe-t-il en dimension 1 ?
3. Déterminer des invariants totaux pour les actions de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ et $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ sur les triplets de points de $\mathcal{E}$.
4. Montrer que $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ agit simplement transitivement sur les repères euclidiens de $\mathcal{E}$. Combien y a-t-il d'orbites pour l'action de $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ sur les repères euclidiens ? Déterminer un invariant total pour cette action.

Exercice 3 (Groupes finis d'isométries)**.** Soit $(\mathcal{E}, E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espace affine euclidien.

1. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$, montrer que les éléments de G ont un point fixe commun.
2. Si $\dim(E) = 2$, déterminer les sous-groupes finis de $SO(E)$ et $O(E)$.
3. En déduire la liste des sous-groupes finis de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ et $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ lorsque $\dim(\mathcal{E}) = 2$.

Exercice 4 (Générateurs de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$, Fresnel pp. 146–147)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. Soient $f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ et $r := \mathrm{rg}\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)$.

1. Si f a un point fixe, montrer que f s'écrit comme produit de r réflexions affines et pas moins.
2. Si f a un point fixe, montrer que f s'écrit comme produit de $r + 2$ réflexions affines et pas moins.
3. Montrer que f s'écrit comme produit d'au plus $\dim(\mathcal{E}) + 1$ réflexions.

Exercice 5 (Décomposition en réflexions)**.** Pour chacune des classes d'isométries en dimension 2 ou 3 donner une décomposition explicite en produit de réflexions, avec le nombre minimal de réflexions.

Exercice 6 (Composée de rotations)**.** Soient $r_{A,\alpha}$ et $r_{B,\beta}$ deux rotations d'un plan affine euclidien, de centre A (resp. B) et d'angle α (resp. β). Déterminer la nature de la composée de ces rotations et ses éléments caractéristiques.

Exercice 7 (Action des similitudes)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien.

1. Déterminer un invariant total pour l'action de $\mathrm{Sim}(\mathcal{E})$ sur les triplets de points alignés (resp. non alignés).
2. Même question pour l'action de $\mathrm{Sim}^+(\mathcal{E})$.