Angles

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel euclidien, déterminer un invariant total pour l'action de $O(E)$ sur les couples de vecteurs de E.

Exercice 2 (Angles et réflexions)**.** Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux demi-droites d'un plan vectoriel euclidien, montrer qu'on a $(\widehat{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2}) = -(\widehat{\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1})$ entre angles orientés et $(\widehat{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2}) = (\widehat{\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1})$ entre angles géométriques.

Exercice 3 (Angles de droites et de demi-droites, Audin p. 73)**.** Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites d'un plan euclidien et $(\widehat{D, D'})$ l'angle de droites orienté qu'elles définissent. Vérifier que $2(\widehat{D, D'})$ définit bien un unique angle orienté de demi-droites. En déduire que les groupes des angles orientés de droites et de demi-droites sont isomorphes.

Exercice 4 (Angles et orientation, Audin p. 110)**.** Dans un plan euclidien orienté E, soient $u, v \in E \setminus \{0\}$. Montrer que (u, v) est une base directe (resp. indirecte) de E si et seulement si $(\widehat{u, v})$ admet une mesure dans $]0, \pi[$ (resp. dans $]-\pi, 0[$). Que se passe-t-il si les mesures de $(\widehat{u, v})$ sont congrues à 0 (resp. π) modulo 2π ?

Exercice 5 (Bissectrices, Berger T. 2 sect. 8.7)**.** Montrer que l'équation $2x = a$ d'inconnue x a exactement deux solutions dans le groupes des angles orientés de droites (resp. demi-droites). Utiliser ce fait pour définir les bissectrices d'un angle orienté de droites (resp. demi-droites).

Exercice 6 (Audin, pp. 83–84)**.** Soient A, B et C trois points distincts sur un cercle de centre O dans un plan affine euclidien.

1. Montrer qu'on a l'égalité d'angles orientés de demi-droites $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right)$.
2. En déduire que l'angle orienté de droites $(\widehat{(CA), (CB)})$ ne dépend pas de C.
3. On note $\mathcal{D}$ la tangente au cercle en B, montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = 2(\widehat{(AB), \mathcal{D}})$. En quoi ce résultat est-il le cas limite de la question précédente ?

Exercice 7 (Audin, p. 85)**.** Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine euclidien.

1. Montrer qu'il existe un unique cercle $\mathcal{C}$ passant par A, B et C et expliquer comment construire son centre O.
2. Montrer que $D \in \mathcal{C}$ si et seulement si $(\widehat{(CA), CB)}) = (\widehat{(DA), (DB)})$.
3. On identifie le plan à $\mathbb{C}$ par le choix d'une base orthonormée. Traduire le critère de cocyclicité précédent en termes des affixes a, b, c et d des points A, B, C et D.

Exercice 8 (Angles et similitudes affines)**.** Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension au moins 2 et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$. On dit que f préserve les angles orientés (resp. non-orientés) de demi-droites, si pour tout $A, B, C \in \mathcal{E}$ avec $B \neq A \neq C$ on a

$$\left(\widehat{\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right).$$

1. Montrer que $f \in \mathrm{Sim}(\mathcal{E})$ si et seulement si f préserve les angles non-orientés de demi-droites.
2. Si $\dim(\mathcal{E}) = 2$, montrer que $f \in \mathrm{Sim}^+(\mathcal{E})$ si et seulement si f préserve les angles orientés de demi-droites.