Nombres complexes en géométrie

Exercice 1 (Une formule bien connue)**.** Montrer que $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Exercice 2 (Trigonométrie)**.** Vérifier que vous savez redémontrer les formules de trigonométrie usuelles :

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$
$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a),$$
$$\dots$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(3x) = 4\cos(x)^3 - 3\cos(x)$.

Exercice 3 (Forme cartésienne, forme polaire)**.**

1. Mettre sous forme cartésienne les complexes : $\frac{9+2i}{3-2i}$, $(2 + 3i)^3$ et $e^{i\frac{7\pi}{12}}$.
2. Mettre sous forme polaire les complexes : $\sqrt{3} + i$ et $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}$.

Exercice 4 (Cercles-droites)**.** Déterminer l'image du cercle de centre 1 et de rayon 1 dans $\mathbb{C}$ par $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Exercice 5 (Équations en complexes)**.** Déterminer la nature géométrique des ensembles suivants :

1. $\{z \in \mathbb{C} \mid z\overline{z} = 4\}$,
2. $\{z \in \mathbb{C} \mid z + \overline{z} = 1\}$,
3. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = |z + i|\}$,
4. $\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z - i) = \frac{\pi}{4}\}$,
5. $\left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \;\middle|\; \Re\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0\right\}$,
6. $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \Re\left(z(\overline{b - a})\right) = \frac{|b|^2-|a|^2}{2}\right\}$.

Exercice 6 (Angle moitié et angle au centre)**.** Soient α et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer l'argument de $\frac{e^{i\theta}-e^{i\alpha}}{e^{i\theta}-1}$. En déduire le théorème de l'angle au centre.

Exercice 7 (Caractérisation des triangles équilatéraux)**.** Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj = 0$, où $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Exercice 8 (Théorème de Gauss–Lucas)**.** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que les racines de P' appartiennent à l'enveloppe convexe des racines de P.

Exercice 9 (Isométries hyperboliques)**.** Soit $M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, on définit pour tout $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $M \cdot z := \frac{az+b}{cz+d}$, avec les conventions que $M \cdot \infty := \frac{a}{c}$ et $M \cdot (-\frac{d}{c}) := \infty$.

1. Montrer que ceci définit bien une action de groupe $SL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
2. Déterminer le noyau de cette action.
3. Montrer que $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ est stable sous l'action de $SL_2(\mathbb{R})$.