Isométries et similitudes vectorielles, groupe orthogonal

Exercice 1 (Caractérisations des isométries vectorielles, Berger T. 2 sect. 8.1)**.** Soit $\varphi : E \to F$ une application ensembliste entre espaces vectoriels euclidiens de même dimension, montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.
- $\forall x, y \in E$, $\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle_F = \langle x, y\rangle_E$.
- φ est linéaire et $\forall x \in E$, $\|\varphi(x)\|_F = \|x\|_E$.

Exercice 2 (Centre du groupe orthogonal, Berger T. 2 sect. 8.2)**.** Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, déterminer le centre de $O(E)$ et le centre de $SO(E)$.

Exercice 3 (Générateurs du groupe orthogonal, Berger T. 2 sect. 8.4)**.** Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, soient $\varphi \in O(E)$ et $r := \mathrm{rg}(\varphi - \mathrm{Id})$.

1. Montrer que φ est produit de r réflexions et que ce nombre est minimal.
2. Si $\dim(E) \geqslant 3$ et $\varphi \in SO(E)$, montrer que φ est produit d'au plus r retournements. Ce nombre est-il minimal ? Qu'en est-il en dimension 2 ?

Exercice 4 (Décomposition en réflexions)**.** Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un plan euclidien, montrer que tout élément de $SO(E)$ est produit de deux réflexions, dont l'une peut être choisie arbitrairement.

Exercice 5. Déterminer un invariant total pour l'action naturelle $O(E) \curvearrowright E$. Quelles sont les orbites de cette action ? Mêmes questions pour l'action naturelle de $O(E)$ sur $E \times E$. Que se passe-t-il si on remplace $O(E)$ par $SO(E)$?

Exercice 6. Montrer que $O(E)$ agit simplement transitivement sur l'ensemble des bases orthonormée de $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Combien y a-t-il d'orbites pour l'action de $SO(E)$ sur ces bases ?

Exercice 7 (Conjugaison)**.**
1. Dans $O_2(\mathbb{R})$, soit r la rotation d'angle α, s et s' deux réflexions par rapport aux droites D et D'. Déterminer le type et les éléments caractéristiques de srs^{-1}, $ss's^{-1}$, rsr^{-1}.
2. Soient r et r' deux rotations de $SO_3(\mathbb{R})$, déterminer les éléments caractéristiques de $rr'r^{-1}$ en fonction de ceux de r et r'.
3. À quelle condition deux rotations de $SO_3(\mathbb{R})$ commutent-elles ?

Exercice 8 (Encore des produits semi-directs)**.** Montrer que $O_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^1 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Plus généralement, montrer que $O(E) \simeq SO(E) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 9 (Connexité de $SO(E)$)**.** Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Montrer que $SO(E)$ est connexe. Montre que $O(E)$ a exactement deux composantes connexes.

Exercice 10 (Similitude directe ou indirecte)**.** Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien et soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi \in O(E)$, à quelles conditions sur λ et O la similitude $\psi := \lambda\varphi$ est-elle directe ?

Exercice 11 (Commutation des similitudes vectorielles)**.** Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un plan euclidien, montrer que les similitudes directes commutent. Qu'en est-il des similitudes indirectes ? Que se passe-t-il en dimension supérieure ?