Théorèmes classiques de géométrie affine

Exercice 1 (Thalès, Fresnel p. 43)**.** Soient $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$ trois hyperplans parallèles distincts de direction H et soient $(\mathcal{D}, D)$ et $(\mathcal{D}', D')$ deux droites telles que $D \oplus H = E$ et $D' \oplus H = E$. On note A_i (resp. B_i) l'unique point de $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{D}'$). Montrer que :

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_1B_3}}.$$

Si de plus $A_1 = B_1$ et $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}'$, montrer que :

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_1B_3}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_3B_3}}.$$

Exercice 2 (Pappus affine, Fresnel p. 46)**.** Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites affines distinctes d'un plan affine. Soient $A, B, C \in \mathcal{D}$ et $A', B', C' \in \mathcal{D}'$, on suppose ces six points distincts. Montre que si $(AB') \parallel (A'B)$ et $(BC') \parallel (B'C)$ alors $(AC') \parallel (A'C)$.

Exercice 3 (Desargues affine, Fresnel p. 47)**.** Soient ABC et $A'B'C'$ deux vrais triangles sans sommet commun et tels que $(AB) \parallel (A'B')$, $(AC) \parallel (A'C')$ et $(BC) \parallel (B'C')$. Montrer que (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.

Exercice 4 (Théorème de Menelaüs, Fresnel p. 44)**.** Soient (A, B, C) un repère d'un plan affine, $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$. On suppose que A', B' et C' sont distincts de A, B et C. Montrer que A', B' et C' sont alignés si et seulement si :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Exercice 5 (Théorème de Céva, Fresnel p. 45)**.** Soient (A, B, C) un repère d'un plan affine, $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$. On suppose que A', B' et C' sont distincts de A, B et C. Montrer que (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes si et seulement si :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Exercice 6 (Théorème de Gergonne, Fresnel p. 49)**.** Soient (A, B, C) un repère d'un plan affine, $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$. On suppose que A', B' et C' sont distincts de A, B et C. Si (AA'), (BB') et (CC') concourent en un point M, montrer que :

$$\frac{\overline{MA'}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{MB'}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{MC'}}{\overline{CC'}} = 1.$$