Coordonnées barycentriques

Exercice 1. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n et $(A_0, \ldots, A_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$. Soit $A \in \mathcal{E}$, on note (λ_i) ses coordonnées barycentriques dans $(A_0, \ldots, A_n)$ et (x_j) ses coordonnées cartésiennes dans $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$. Exprimer les λ_i en fonction des x_j et réciproquement.

Exercice 2 (Le calcul barycentrique comme calcul vectoriel, Fresnel p. 13)**.** Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\mathcal{E}$ un hyperplan affine de V ne contenant pas 0 (penser à l'exemple fondamental $\left\{(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \,\middle|\, \sum \lambda_i = 1\right\} \subset \mathbb{K}^{n+1}$). On note E la direction de $\mathcal{E}$, qui est un hyperplan vectoriel de V.

Soient $A_0, \ldots, A_k \in \mathcal{E}$ avec A_j de coordonnées barycentriques $(a_{0j}, \ldots, a_{nj})$ dans un certain repère affine de $\mathcal{E}$. Montrer que $(A_0, \ldots, A_k)$ est affinement libre si et seulement si la matrice des (a_{ij}) est de rang $k+1$. En déduire que $(A_0, \ldots, A_n)$ est un repère affine si et seulement si $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Exercice 3 (Les coordonnées barycentriques comme volumes, Fresnel p. 14)**.** Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n, $(A_0, \cdots, A_n)$ un repère affine et e une base quelconque de E. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, et tout $M \in \mathcal{E}$ on note :

$$\Delta_i(M) := \det_e\left(\overrightarrow{MA_0}, \ldots, \overrightarrow{MA_{i-1}}, \overrightarrow{MA_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{MA_n}\right).$$

1. Soit $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées barycentriques $(x_0, \ldots, x_n)$ dans le repère $(A_0, \ldots, A_n)$, montrer que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $x_i = \frac{\Delta_i(M)}{\Delta_i(A_i)}$.
2. Montrer que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\Delta_i(A_i) = (-1)^i \Delta_0(A_0)$.
3. Interpréter les coordonnées barycentriques en termes de volumes orientés.