Le groupe affine

Exercice 1. Déterminer le groupe affine de $\mathbb{K}$ muni de sa structure canonique de droite affine.

Exercice 2 (Groupe des homothéties-translations)**.** Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{K}$-espace affine, on note $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$ le sous-groupe des homothéties-translations de $\mathcal{E}$.

1. Soit $f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E})$ envoyant tout sous-espace affine de $\mathcal{E}$ sur un sous-espace parallèle. Montrer que $f \in \mathcal{HT}(\mathcal{E})$.
2. Soit $f \in \mathcal{HT}(\mathcal{E})$, déterminer les sous-espaces stables par f.
3. Déterminer le centre de $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$.
4. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que les homothéties engendrent $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$. Que se passe-t-il sur les autres corps ?

Exercice 3 (Produits semi-directs)**.** Soit $(\mathcal{E}, E)$ un $\mathbb{K}$-espace affine, montrer qu'on a les décompositions en produits semi-directs suivantes.

- $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}) = E \rtimes GL(E)$,
- $\left\{ f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}) \;\middle|\; \det(\overrightarrow{f}) = 1 \right\} = E \rtimes SL(E)$,
- $\mathcal{HT}(\mathcal{E}) = E \rtimes \mathbb{K}^*$.

Exercice 4 (Invariants et obstructions)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine.

1. Montrer que $\mathrm{Aff}(\mathcal{E})$ agit simplement transitivement sur les repères affines (resp. cartésiens) de $\mathcal{E}$.
2. Montrer que $\mathrm{Aff}(\mathcal{E})$ agit 2-transitivement sur $\mathcal{E}$. Identifier l'obstruction à ce que cette action soit 3-transitive.
3. Montrer que $\mathrm{Aff}(\mathcal{E})$ agit transitivement sur l'ensemble des droites affines de $\mathcal{E}$. Identifier l'obstruction à ce que cette action soit 2-transitive.
4. Trouver une obstruction à ce que l'action $\mathcal{HT}(\mathcal{E}) \curvearrowright \mathcal{E}$ soit 2-transitive.
5. Donner un invariant total pour l'action de $\mathrm{Aff}(\mathcal{E})$ sur les sous-espaces affines de $\mathcal{E}$. Même question lorsqu'on restreint l'action à $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$ à la source.

Exercice 5 (Représentation linéaire du groupe affine)**.** Soit V un espace vectoriel de dimension $n+1$ et $\eta \in V^* \setminus \{0\}$.

1. Montrer que $\mathcal{E} := \eta^{-1}(\{1\})$ est un espace affine de direction $\ker(\eta)$. Montrer que le sous-groupe $\{f \in GL(V) \mid \eta \circ f = \eta\}$ est isomorphe au groupe affine de $\mathcal{E}$.
2. En déduire que le groupe affine d'un $\mathbb{K}$-espace affine de dimension n est isomorphe au sous-groupe de $GL_{n+1}(\mathbb{K})$ dont les éléments sont les matrices de la forme :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & a_n \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right),$$

avec $A \in GL_n(\mathbb{K})$.