# Familles libres, familles génératrices, repères

**Exercice 1.** Soit $\mathcal{A}$ une partie d'un espace affine $\mathcal{E}$, montrer que :

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{A}\rangle &= \left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i A_i \,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*, A_i\in\mathcal{A}, \lambda_i\in\mathbb{K}, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1\right\}\\ &= O + \operatorname{Vect}\left\{\overrightarrow{AB} \,\middle|\, A,B\in\mathcal{A}\right\}\\ &= O + \operatorname{Vect}\left\{\overrightarrow{OB} \,\middle|\, B\in\mathcal{A}\right\}\\ &= O + \left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i A_i \,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*, A_i\in\mathcal{A}, \lambda_i\in\mathbb{K}, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 0\right\}.\end{aligned}$$

**Exercice 2.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension $n$.

1. Montrer qu'une famille libre est de cardinal au plus $n+1$.
2. Montrer qu'une famille libre de cardinal $n+1$ de $\mathcal{E}$ est un repère affine.
3. Montrer qu'une famille génératrice est de cardinal au moins $n+1$.
4. Montrer qu'une famille génératrice de cardinal $n+1$ de $\mathcal{E}$ est un repère affine.

**Exercice 3.** Montrer que trois points d'un espace affine sont alignés ou forment une famille libre.

**Exercice 4** (Lien affine-vectoriel, Fresnel p. 13)**.** Soit $V$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\mathcal{E}$ un hyperplan affine de $V$ ne contenant pas 0. On note $E$ la direction de $\mathcal{E}$, qui est un hyperplan vectoriel de $V$. Soient $A_0,\dots,A_n\in\mathcal{E}$.

1. Décrire $E$ en fonction de $\mathcal{E}$ et de la structure d'espace vectoriel de $V$.
2. Montrer que l'application $F\mapsto F\cap\mathcal{E}$ est une bijection de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $V$ non inclus dans $E$ vers l'ensemble des sous-espaces affines de $\mathcal{E}$. Expliciter la réciproque.
3. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, montrer que sa direction est $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})\cap E$.
4. Montrer que la famille $(A_0,\dots,A_n)$ est affinement libre (resp. génératrice) dans $\mathcal{E}$ si et seulement si elle est vectoriellement libre (resp. génératrice) dans $V$.
5. Conclure que $(A_0,\dots,A_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si c'est une base de $V$.
6. Soit $\mathcal{A}\subset\mathcal{E}$, montrer que $\langle\mathcal{A}\rangle = \operatorname{Vect}(\mathcal{A})\cap\mathcal{E}$.

**Exercice 5.** Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension $n$ et $A_0,\dots,A_n\in\mathcal{E}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

1. $(A_0,\dots,A_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$.
2. $(A_0,\overrightarrow{A_0A_1},\dots,\overrightarrow{A_0A_n})$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$.

**Exercice 6** (Rapport de volumes)**.** Soient $B_0,\dots,B_n\in\mathcal{E}$ et $(A_0,\dots,A_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$, soit $e$ une base de $E$. Montrer que $\det_e\left(\overrightarrow{A_0A_1},\dots,\overrightarrow{A_0A_n}\right)\neq 0$ et que le rapport

$$\frac{\det_e\left(\overrightarrow{B_0B_1},\dots,\overrightarrow{B_0B_n}\right)}{\det_e\left(\overrightarrow{A_0A_1},\dots,\overrightarrow{A_0A_n}\right)}$$

ne dépend pas du choix de $e$.