Sous-espaces affines

Exercice 1 (Retour aux axiomes, Fresnel p. 16)**.** Montrer que dans un plan affine deux droites sont concourantes ou parallèles.

Exercice 2 (Retour aux axiomes 2, Fresnel p. 16)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine, montrer que $\mathcal{E}$ satisfait les axiomes suivants.

1. Par deux points distincts passe une unique droite (axiome d'incidence).
2. Soit $\mathcal{D}$ une droite et $A \in \mathcal{E}$, il existe une unique droite parallèle à $\mathcal{D}$ passant par A (axiome des parallèles).

Exercice 3 (Une caractérisation des sous-espaces affines, Fresnel p. 16)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur un corps de cardinal strictement supérieur à 2. Montrer que $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine si et seulement si pour tout A et $B \in \mathcal{F}$, (AB) est incluse dans $\mathcal{F}$. Que se passe-t-il sur $\mathbb{F}_2$?

Exercice 4 (Direction d'un sous-espace)**.** Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, montrer que sa direction est :

$$F := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*, A_i \in \mathcal{F}, \lambda_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \right\}.$$

Exercice 5 (Dénombrement)**.**

1. Quel est le cardinal d'un k-plan sur $\mathbb{F}_q$?
2. Combien y a-t-il de familles vectoriellement libres de cardinal k dans $(\mathbb{F}_q)^n$ $(k \leqslant n)$? En déduire le cardinal de $GL_n(\mathbb{F}_q)$.
3. Combien y a-t-il de k-plans vectoriels dans $(\mathbb{F}_q)^n$? De k-plans affines ?

Exercice 6 (Union de sous-espaces, Audin exo. 1.5)**.** Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$. À quelle condition $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est-il un sous-espace affine de $\mathcal{E}$?

Exercice 7 (Union de sous-espaces 2)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$, de direction F et F' respectivement. Soit $\mathcal{G}$ le sous-espace de $\mathcal{E}$ engendré par $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$.

1. Montrer que si $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \neq \emptyset$ alors $\mathcal{G}$ est dirigé par $F + F'$ et donner sa dimension.
2. Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' = \emptyset$, montrer que $\dim \mathcal{G} = \dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{F}' - \dim (F \cap F') + 1$.