Espaces affines, barycentres

Exercice 1. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et F un sous-espace vectoriel de E. On note $\mathcal{E}/F$ l'ensemble des orbites de $\mathcal{E}$ sous l'action de F par translation. Montrer que $\mathcal{E}/F$ peut être muni d'une structure d'espace affine de direction E/F.

Exercice 2 (Carte affine sur la grassmannienne, Berger T. 1 p. 60)**.** Soient F un sous-espace de l'espace vectoriel de dimension finie E et $\mathcal{S}$ l'ensemble $\{G \mid G \oplus F = E\}$ des supplémentaires de F. Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace affine dirigé par $\mathcal{L}(E/F, F)$.

Exercice 3 (Définition équivalente, Audin p. 9)**.** Soient $\mathcal{E}$ un ensemble et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer qu'il est équivalent de dire que $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E et qu'il existe une application $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \to E$, $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ telle que :

- pour tout $A \in \mathcal{E}$, $B \mapsto \overrightarrow{AB}$ est une bijection de $\mathcal{E}$ dans E,
- pour tout A, B et $C \in E$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Exercice 4 (Identité du parallélogramme, Fresnel p. 16)**.** Soient A, B, C et D quatre points d'un espace affine $\mathcal{E}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
2. Si $\operatorname{car}(\mathbb{K}) = 2$, montrer que ces conditions impliquent $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}$.
3. Si $\operatorname{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, montrer que ces conditions sont équivalentes à : les milieux de $[AC]$ et $[BD]$ sont confondus.

Exercice 5 (Centre de gravité, Fresnel p. 8)**.**

1. Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes et se rencontrent à un tiers de leurs longueurs.
2. Montrer que l'isobarycentre d'un tétraèdre est aussi le milieu des segments joignants les milieux de deux arêtes opposées.

Exercice 6 (Un barycentre peu intuitif)**.** Déterminer l'isobarycentre de $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ dans $(\mathbb{F}_2)^3$.

Exercice 7 (Associativé du barycentre)**.** Soient $(A_i, \lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ des points pondérés d'un espace affine $\mathcal{E}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$ et soit G le barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$. On suppose qu'au moins trois des λ_i sont non nuls.

1. Si $\operatorname{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, montrer qu'il existe I et $J \subset [\![1, n]\!]$ disjoints tels que $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$, $\sum_{j \in J} \lambda_j \neq 0$ et $I \cup J = [\![1, n]\!]$.
2. En déduire que, dans ce cas, G est aussi le barycentre de $\left(\frac{1}{\sum_{i \in I} \lambda_i} \displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i A_i, \sum_{i \in I} \lambda_i \right)$ et $\left(\frac{1}{\sum_{j \in J} \lambda_j} \displaystyle\sum_{j \in J} \lambda_j A_j, \sum_{j \in J} \lambda_j \right)$.
3. Que se passe-t-il en caractéristique 2 ?